

第九章 二阶电路分析

由二阶微分方程描述的电路称为二阶电路。分析二阶电路的方法仍然是建立二阶微分方程，并利用初始条件求解得到电路的响应。本章主要讨论含两个动态元件的线性二阶电路，重点是讨论电路的零输入响应。最后介绍如何利用计算机程序分析高阶动态电路。

§ 9-1 RLC串联电路的零输入响应

一、RLC串联电路的微分方程

为了得到图9-1所示RLC串联电路的微分方程，先列出KVL方程

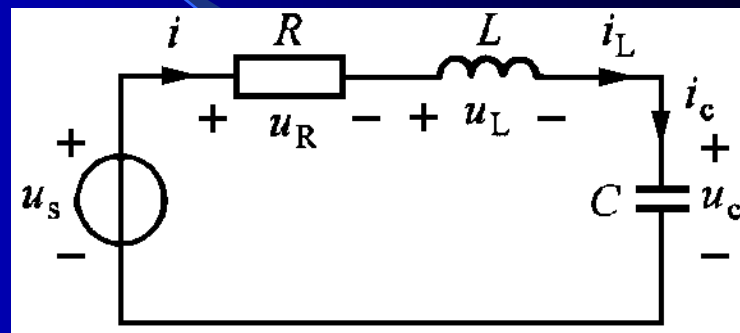


图9-1 RLC串联二阶电路

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u_S(t)$$

$$i(t) = i_L(t) = i_C(t) = C \frac{du_c}{dt}$$

$$u_R(t) = Ri(t) = RC \frac{du_c}{dt} \quad u_L(t) = L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2 u_c}{dt^2}$$

根据前述方程得到以下微分方程

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u_S(t) \quad (9-1)$$

这是一个常系数非齐次线性二阶微分方程。

零输入响应方程为

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad (9-2)$$

其特征方程为

$$LCs^2 + RCs + 1 = 0 \quad (9-3)$$

其特征根为

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (9-4)$$

电路微分方程的特征根，称为电路的固有频率。当 R ， L ， C 的量值不同时，特征根可能出现以下三种情况

1. $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时， s_1, s_2 为不相等的实根。过阻尼情况。

2. $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时， s_1, s_2 为两个相等的实根。临界阻尼情况。

3. $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时， s_1, s_2 为共轭复数根。欠阻尼情况。

二、过阻尼情况

当 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时，电路的固有频率 s_1, s_2 为两个不相同的实数，齐次微分方程的解答具有下面的形式

$$u_C(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (9-5)$$

式中的两个常数 K_1, K_2 由初始条件 $i_L(0)$ 和 $u_C(0)$ 确定。

$$u_C(0) = K_1 + K_2 \quad (9-6)$$

对式(9-5)求导，再令 $t=0$ 得到

$$\left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = K_1 s_1 + K_2 s_2 = \frac{i_L(0)}{C} \quad (9-7)$$

求解以上两个方程，可以得到

$$K_1 = \frac{1}{s_2 - s_1} \left[s_2 u_C(0) - \frac{i_L(0)}{C} \right]$$

$$K_2 = \frac{1}{s_1 - s_2} \left[s_1 u_C(0) - \frac{i_L(0)}{C} \right]$$

由此得到电容电压的零输入响应，再利用KCL方程和电容的VCR可以得到电感电流的零输入响应。

例9-1 电路如图9-1所示，已知 $R=3\Omega, L=0.5H, C=0.25F$ ， $u_C(0)=2V, i_L(0)=1A$ ，求电容电压和电感电流的零输入响应。

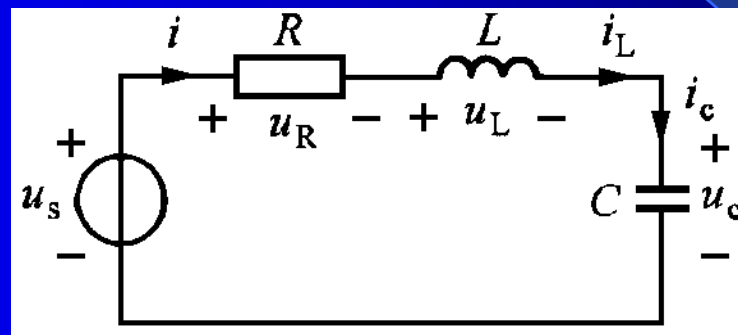


图9-1 RLC串联二阶电路

解：将 R, L, C 的量值代入式(9-4)计算出固有频率

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -3 \pm \sqrt{3^2 - 8} = -3 \pm 1 = \begin{cases} -2 \\ -4 \end{cases}$$

将固有频率 $s_1=-2$ 和 $s_2=-4$ 代入式(9-5)得到

$$u_C(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-4t} \quad (t \geq 0)$$

利用电容电压的初始值 $u_C(0)=2\text{V}$ 和电感电流的初始值 $i_L(0)=1\text{A}$ 得到以下两个方程:

$$u_C(0) = K_1 + K_2 = 2$$

$$\left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = -2K_1 - 4K_2 = \frac{i_L(0)}{C} = 4$$



$$K_1 = 6$$

$$K_2 = -4$$

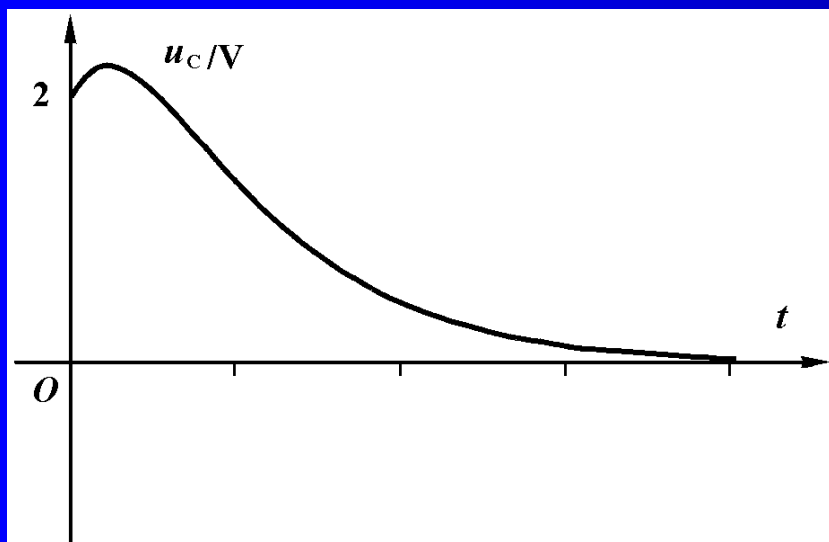
最后得到电容电压的零输入响应为

$$u_C(t) = (6e^{-2t} - 4e^{-4t})\text{V} \quad (t \geq 0)$$

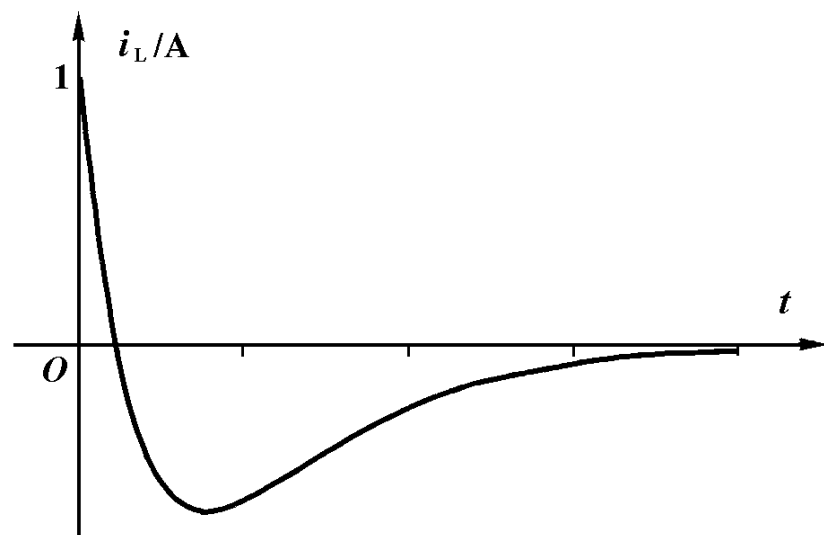
利用KCL和电容的VCR方程得到电感电流的零输入响应

$$i_L(t) = i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = (-3e^{-2t} + 4e^{-4t})A \quad (t \geq 0)$$

从图示电容电压和电感电流的波形曲线，可以看出电路各元件的能量交换过程。



(a)



(b)

三、临界情况

当 $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时，电路的固有频率 s_1, s_2 为两个相同的实数 $s_1 = s_2 = s$ 。齐次微分方程的解答具有下面的形式

$$u_C(t) = K_1 e^{st} + K_2 t e^{st} \quad (9-8)$$

式中的两个常数 K_1, K_2 由初始条件 $i_L(0)$ 和 $u_C(0)$ 确定。

令式(9-5)中的 $t=0$ 得到

$$u_C(0) = K_1 \quad (9-9)$$

对式(9-5)求导, 再令得到

$$\left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = K_1 s + K_2 = \frac{i_L(0)}{C} \quad (9-10)$$

联立求解以上两个方程, 可以得到

$$K_1 = u_C(0)$$

$$K_2 = \frac{i_L(0)}{C} - s_1 u_C(0)$$

将 K_1, K_2 的计算结果, 代入式(9-8)得到电容电压的零输入响应, 再利用KCL方程和电容的VCR可以得到电感电流的零输入响应。

例9-2 电路如图9-1所示。已知已知 $R=1\ \Omega$ ， $L=0.25\ \text{H}$ ， $C=1\ \text{F}$ ， $u_C(0)=-1\ \text{V}$ ， $i_L(0)=0$ ，求电容电压和电感电流的零输入响应。

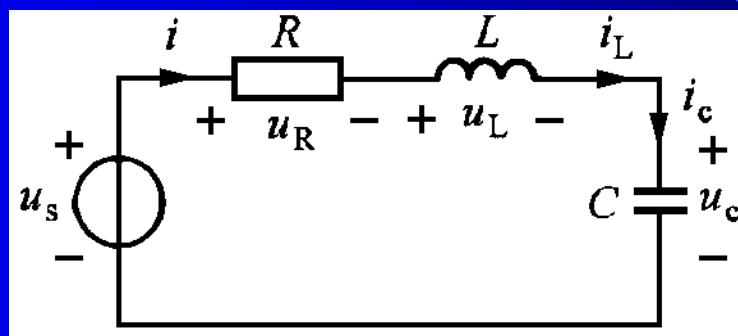


图9-1 RLC串联二阶电路

解：将 R ， L ， C 的量值代入式(9-4)计算出固有频率的数值

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -2 \pm \sqrt{2^2 - 4} = -2 \pm 0 = \begin{cases} -2 \\ -2 \end{cases}$$

将两个相等的固有频率 $s_1=s_2=-2$ 代入式(9-8)得到

$$u_c(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 t e^{-2t} \quad (t \geq 0)$$

利用电容电压的初始值 $u_c(0)=-1\text{V}$ 和电感电流的初始值 $i_L(0)=0$ 得到以下两个方程

$$u_c(0) = K_1 = -1$$

$$\left. \frac{du_c(t)}{dt} \right|_{t=0} = -2K_1 + K_2 = \frac{i_L(0)}{C} = 0$$

求解以上两个方程得到常数 $K_1=-1$ 和 $K_2=-2$ ，得到电容电压的零输入响应

$$u_C(t) = (-e^{-2t} - 2te^{-2t})V \quad (t \geq 0)$$

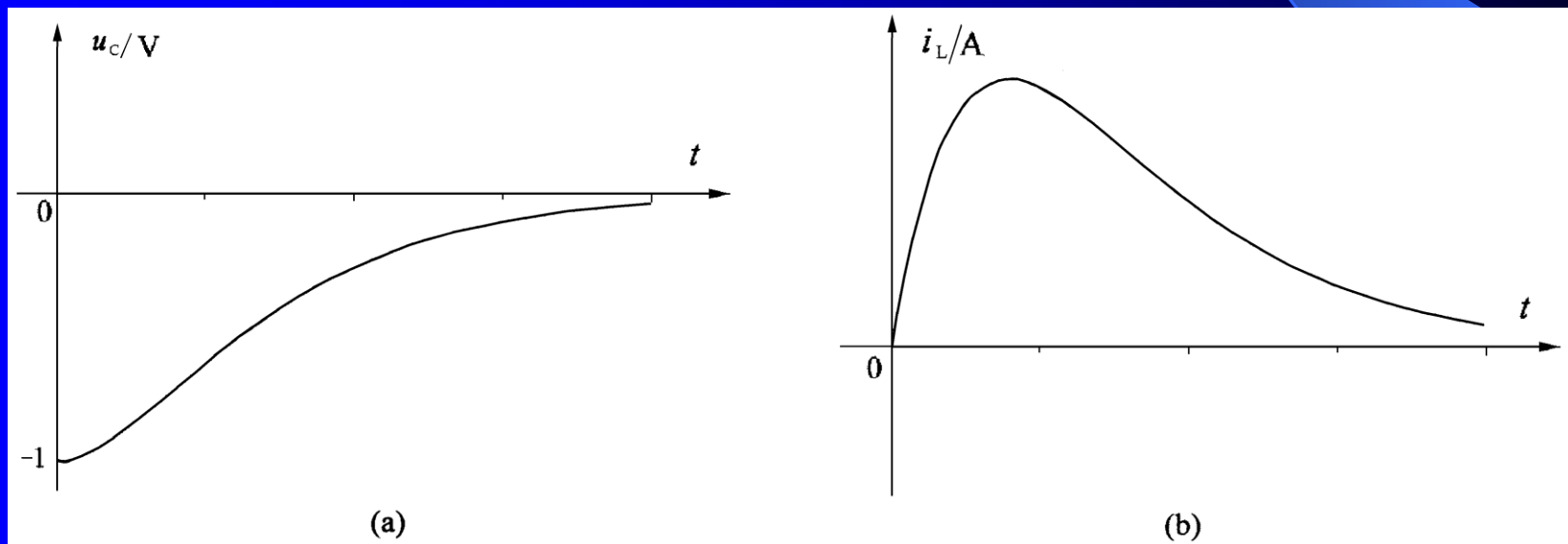
得到电感电流的零输入响应

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} \\ &= (2e^{-2t} - 2e^{-2t} + 4te^{-2t})A \\ &= 4te^{-2t}A \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

$$u_C(t) = (-e^{-2t} - 2te^{-2t})\text{V} \quad (t \geq 0)$$

$$i_L(t) = i_C(t) = 4te^{-2t}\text{A} \quad (t \geq 0)$$

根据以上两个表达式用计算机程序DNAP画出的波形曲线，如图9-3所示。



(a) 电容电压的波形

(b) 电感电流的波形

图9-3 临界阻尼情况

四、欠阻尼情况

当 $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时，电路的固有频率 s_1, s_2 为两个共轭复数根，它们可以表示为

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

其中

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

称为衰减系数

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

称为谐振角频率

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

称为衰减谐振角频率

齐次微分方程的解答具有下面的形式

$$\begin{aligned} u_C(t) &= e^{-\alpha t} [K_1 \cos(\omega_d t) + K_2 \sin(\omega_d t)] \\ &= Ke^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi) \end{aligned} \quad (9-11)$$

式中

$$K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \quad \varphi = -\arctan \frac{K_2}{K_1}$$

由初始条件 $i_L(0)$ 和 $u_C(0)$ 确定常数 K_1 , K_2 后, 得到电容电压的零输入响应, 再利用KCL和VCR方程得到电感电流的零输入响应。

例9-3 电路如图9-1所示。已知 $R=6\Omega$, $L=1\text{H}$, $C=0.04\text{F}$,
 $u_C(0)=3\text{V}$, $i_L(0)=0.28\text{A}$, 求电容电压和电感电流的
零输入响应。

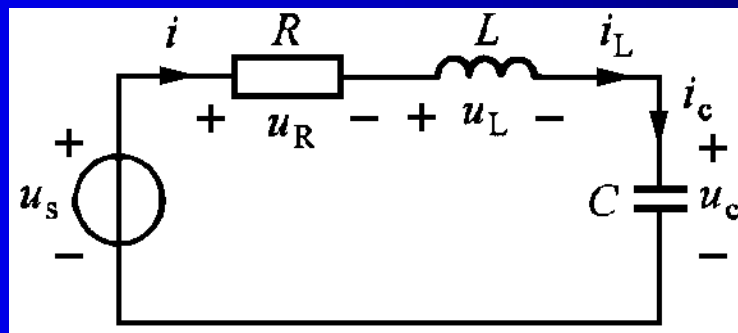


图9-1 RLC串联二阶电路

解：将 R , L , C 的量值代入式(9-4)计算出固有频率的数值

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -3 \pm \sqrt{3^2 - 5^2} = -3 \pm j4$$

将两个不相等的固有频率 $s_1 = -3 + j4$ 和 $s_2 = -3 - j4$ 代入式 (9-11) 得到

$$u_C(t) = e^{-3t} [K_1 \cos 4t + K_2 \sin(4t)] \quad (t \geq 0)$$

利用电容电压的初始值 $u_C(0) = 3\text{V}$ 和电感电流的初始值 $i_L(0) = 0.28\text{A}$ 得到以下两个方程

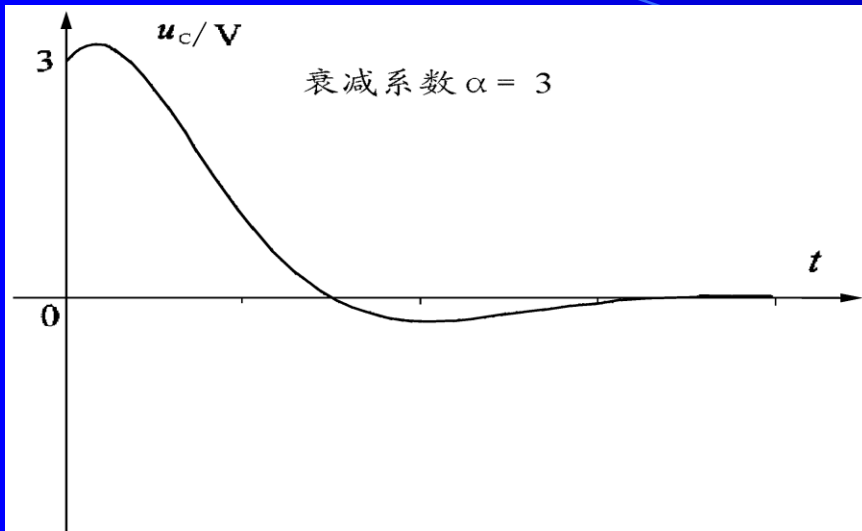
$$\begin{aligned} u_C(0) &= K_1 \\ \left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0} &= -3K_1 + 4K_2 = \frac{i_L(0)}{C} = 7 \end{aligned}$$

求解以上两个方程得到常数 $K_1 = 3$ 和 $K_2 = 4$, 得到电容电压和电感电流的零输入响应:

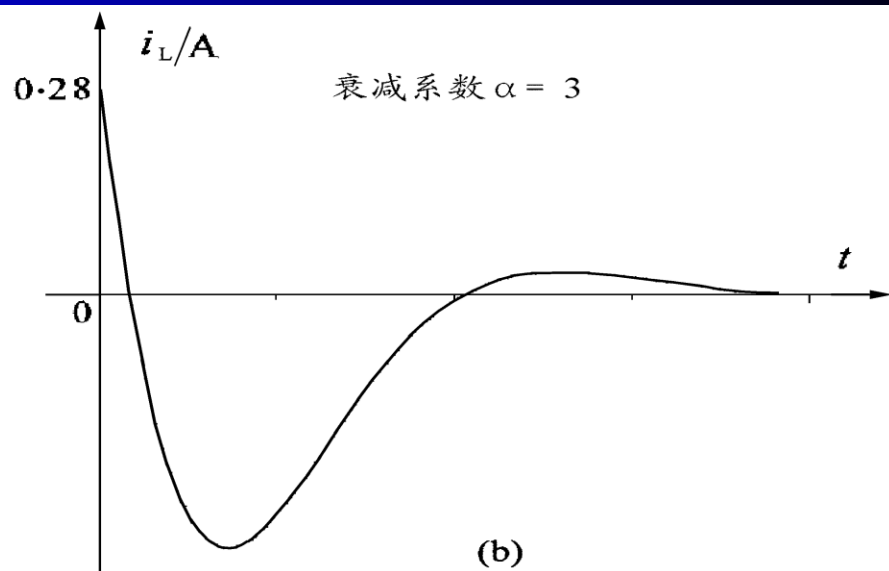
$$u_C(t) = e^{-3t} [3 \cos 4t + 4 \sin(4t)] = 5e^{-3t} \cos(4t - 53.1^\circ) \text{V} \quad (t \geq 0)$$

$$i_L(t) = C \frac{du_C}{dt} = 0.04e^{-3t} [7 \cos(4t) - 24 \sin(4t)] = e^{-3t} \cos(4t + 73.74^\circ) \text{A} \quad (t \geq 0)$$

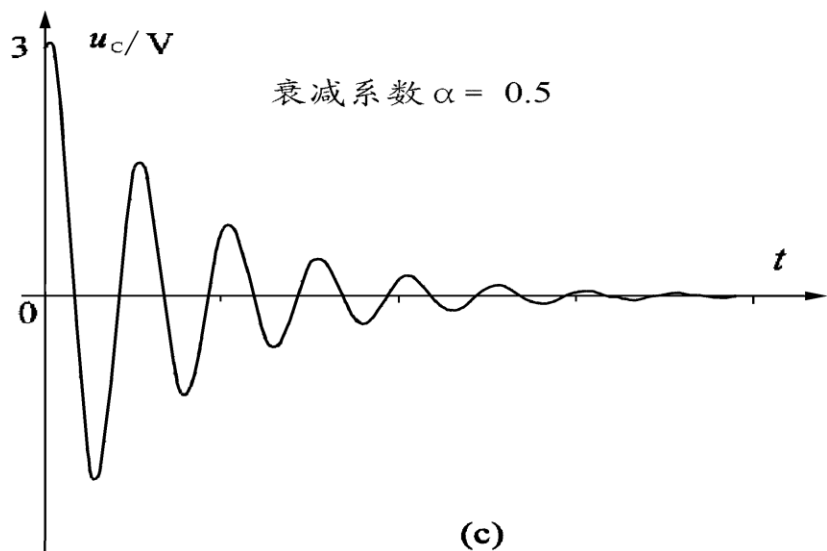
用计算机程序DNAP画出的波形曲线，如图9-4(a)和(b)所示



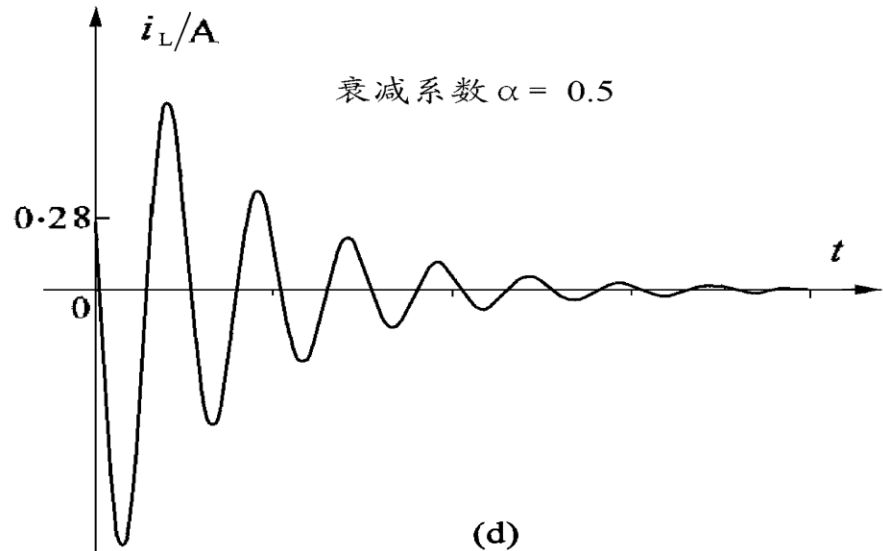
(a)



(b)



(c)



(d)

(a) 衰减系数为3的电容电压的波形

(b) 衰减系数为3的电感电流的波形

(c) 衰减系数为0.5的电容电压的波形

(d) 衰减系数为0.5的电感电流的波形

图9-4 欠阻尼情况

从式(9-11)和图9-4波形曲线可以看出，欠阻尼情况的特点是能量在电容与电感之间交换，形成衰减振荡。电阻越小，单位时间消耗能量越少，曲线衰减越慢。

当例9-3中电阻由 $R=6\Omega$ 减小到 $R=1\Omega$ ，衰减系数由3变为0.5时，用计算机程序DNAP得到的电容电压和电感电流的波形曲线，如图9-4(c)和(d)所示，由此可以看出曲线衰减明显变慢。假如电阻等于零，使衰减系数为零时，电容电压和电感电流将形成无衰减的等幅振荡。

例9-4 电路如图9-1所示。已知 $R=0, L=1\text{H}, C=0.04\text{F}$,
 $u_C(0)=3\text{V}, i_L(0)=0.28\text{A}$, 求电容电压和电感电流的零
输入响应。

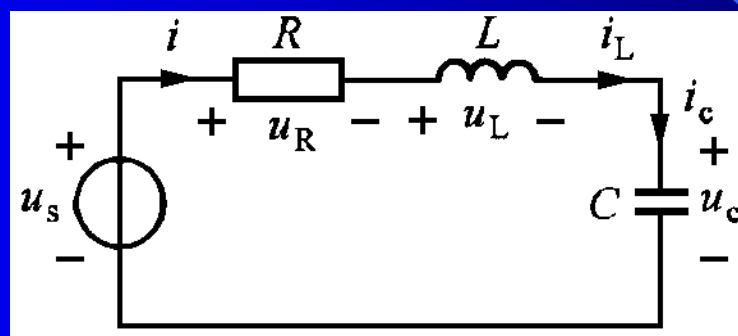


图9-1 RLC串联二阶电路

解：将 R, L, C 的量值代入式(9-4)计算出固有频率的
数值

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \pm \sqrt{-5^2} = \pm j5$$

将两个不相等的固有频率 $s_1=j5$ 和 $s_2=-j5$ 代入式(9-11)

得到

$$u_C(t) = [K_1 \cos(5t) + K_2 \sin(5t)] \quad (t \geq 0)$$

利用电容电压的初始值 $u_C(0)=3V$ 和电感电流的初始值 $i_L(0)=0.28A$ 得到以下两个方程

$$\begin{aligned} u_C(0) &= K_1 = 3 \\ \left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0} &= 5K_2 = \frac{i_L(0)}{C} = 7 \end{aligned}$$

求解以上两个方程得到常数 $K_1=3$ 和 $K_2=1.4$, 得到电容电压和电感电流的零输入响应:

$$u_C(t) = [3 \cos(5t) + 1.4 \sin(5t)] = 3.31 \cos(5t - 25^\circ) V \quad (t \geq 0)$$

$$i_L(t) = C \frac{du_C}{dt} = 0.04[-15 \sin(5t) + 7 \cos(5t)] = 0.66 \cos(5t + 65^\circ) A \quad (t \geq 0)$$

用计算机程序DNAP画出的电容电压和电感电流的波形曲线，如图9-5所示。

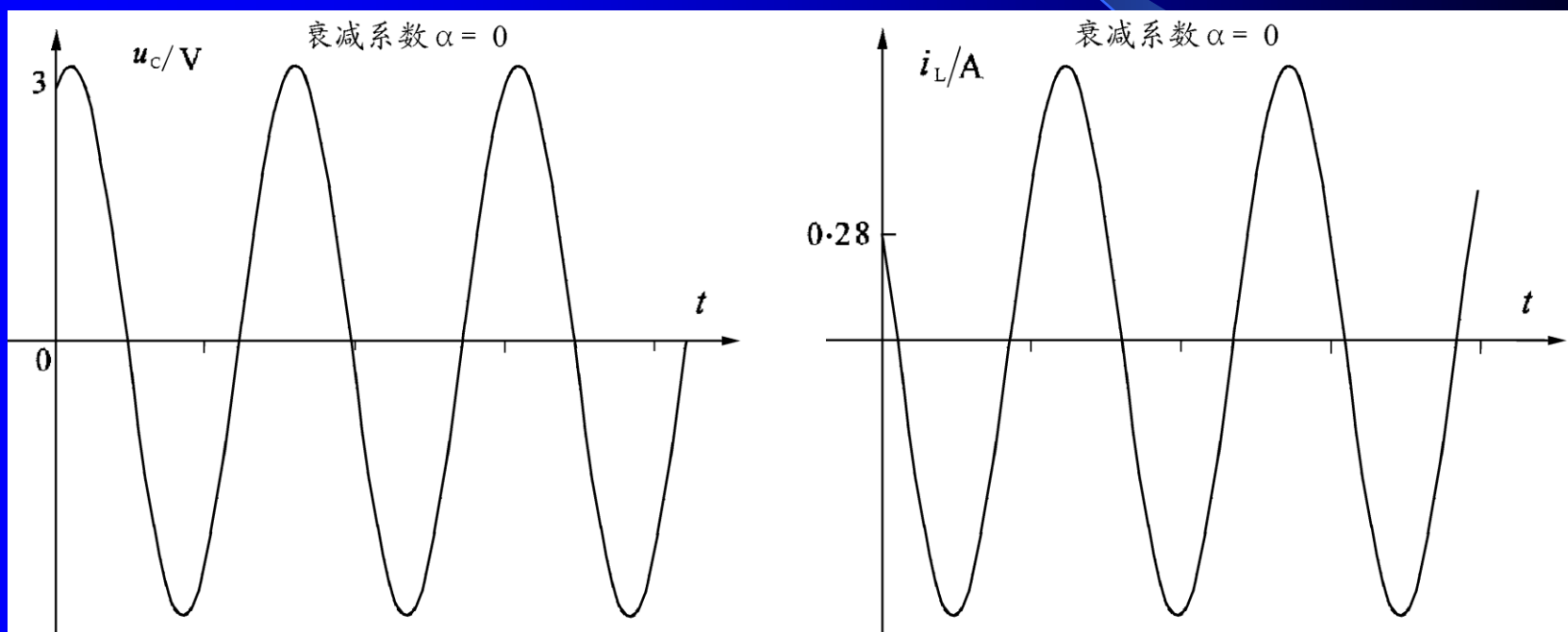


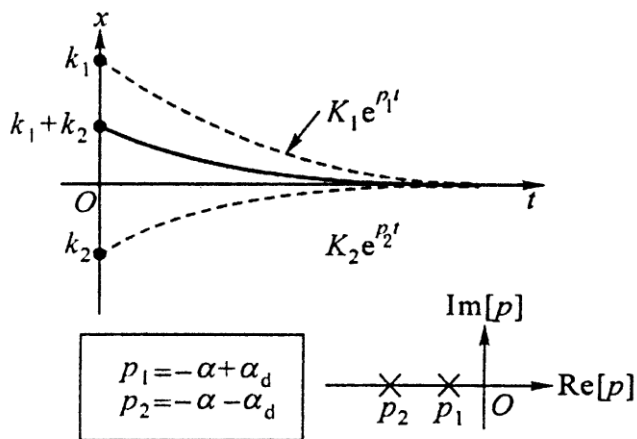
图9-5 无阻尼情况

从电容电压和电感电流的表达式和波形曲线可见，由于电路中没有损耗，能量在电容和电感之间交换，总能量不会减少，形成等振幅振荡。电容电压和电感电流的相位差为 90° ，当电容电压为零，电场储能为零时，电感电流达到最大值，全部能量储存于磁场中；而当电感电流为零，磁场储能为零时，电容电压达到最大值，全部能量储存于电场中。

从以上分析计算的结果可以看出， RLC 二阶电路的零输入响应的形式与其固有频率密切相关，我们将响应的几种情况画在图9-6上。

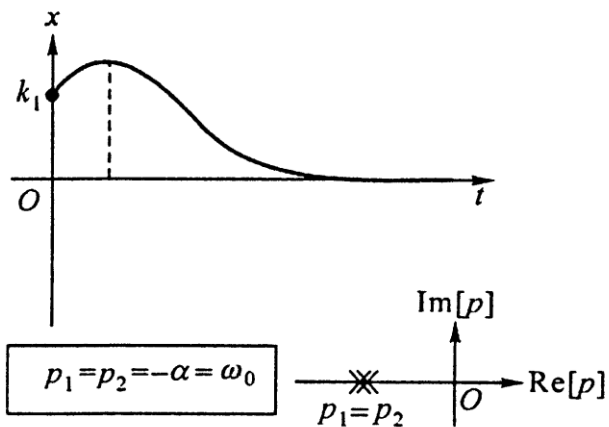
1. 过阻尼 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ ($\alpha > \omega_0 > 0$)

$$x(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t}$$



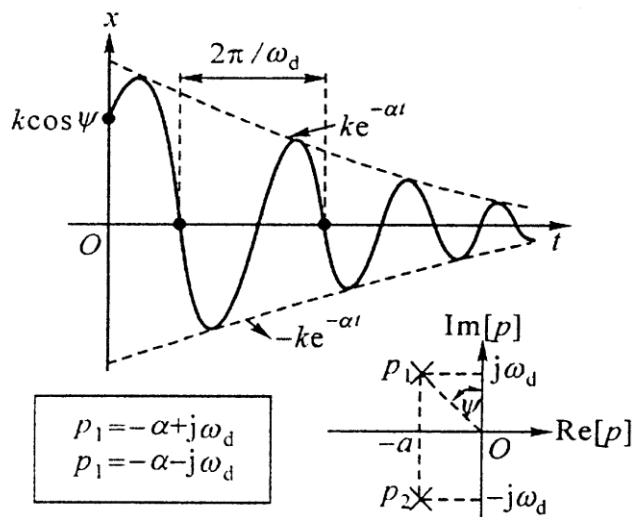
2. 临界阻尼 $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ ($\alpha = \omega_0 > 0$)

$$x(t) = (K_1 + K_2 t) e^{-\alpha t}$$



3. 欠阻尼 $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ ($0 < \alpha < \omega_0$)

$$x(t) = K e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \psi)$$



4. 无阻尼 $R = 0$ ($\alpha = 0, \omega_0 > 0$)

$$x(t) = K \cos(\omega_0 t + \psi)$$

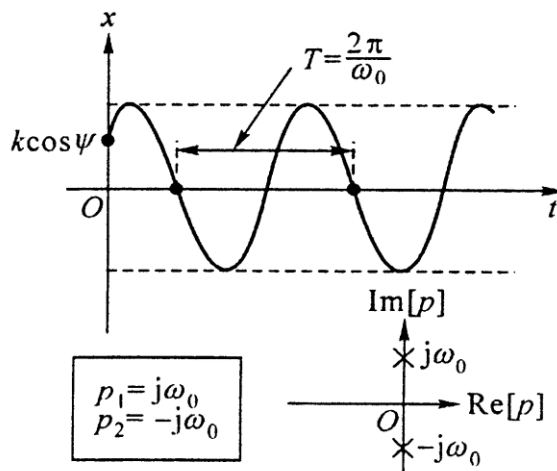


图9-6

由图9-6可见:

1. 在过阻尼情况, s_1 和 s_2 是不相等的负实数, 固有频率出现在 s 平面上负实轴上, 响应按指数规律衰减。

2. 在临界阻尼情况, $s_1=s_2$ 是相等的负实数, 固有频率出现在 s 平面上负实轴上, 响应按指数规律衰减。

3. 在欠阻尼情况, s_1 和 s_2 是共轭复数, 固有频率出现在 s 平面上的左半平面上, 响应是振幅随时间衰减的正弦振荡, 其振幅随时间按指数规律衰减, 衰减系数 α 越大, 衰减越快。衰减振荡的角频率 ω_d 越大, 振荡周期越小, 振荡越快。

图中按 $Ke^{-\alpha t}$ 画出的虚线称为包络线，它限定了振幅的变化范围。

4.在无阻尼情况， s_1 和 s_2 是共轭虚数，固有频率出现在 s 平面上的虚轴上，衰减系数为零，振幅不再衰减，形成角频率为 ω_0 的等幅振荡。

显然，当固有频率的实部为正时，响应的振幅将随时间增加，电路是不稳定的。由此可知，当一个电路的全部固有频率均处于 s 平面上的左半平面上时，电路是稳定的。