第1章 矢量分析

一、矢量和标量的定义

二、矢量的运算法则

三、矢量微分元：线元，面元，体元

四、标量场的梯度

五、矢量场的散度

六、矢量场的旋度

七、重要的场论公式

一、矢量和标量的定义

1.**标量：** 只有大小，没有方向的物理量。

如：温度 T、长度 L 等

2.**矢量：** 不仅有大小，而且有方向的物理量。

如:力 $\vec{F}$ 、速度 $\vec{v}$ 、电场 $\vec{E}$ 等

矢量表示为： $\vec{A}=|\vec{A}|\hat{a}$

其中：$|\vec{A}|$ 为矢量的模，表示该矢量的大小。

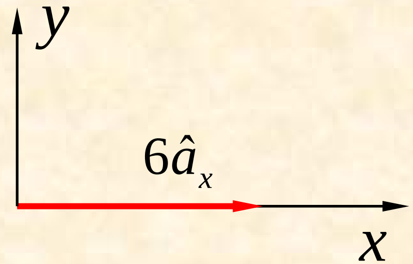
$\hat{a}$ 为单位矢量，表示矢量的方向，其大小为1。

所以：一个矢量就表示成矢量的模与单位矢量的乘积。

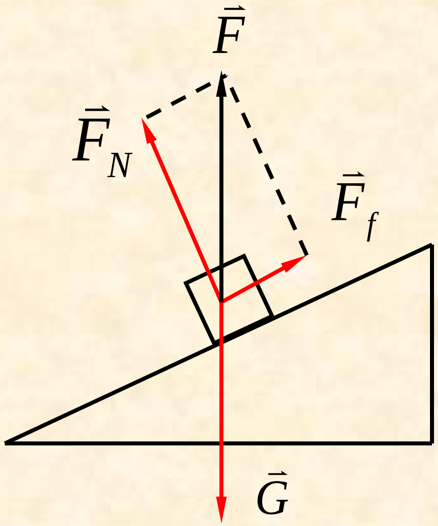
例1：在直角坐标系中，x 方向的大小为 6 的矢量如何表示?

$$6\hat{a}_x$$

图示法：



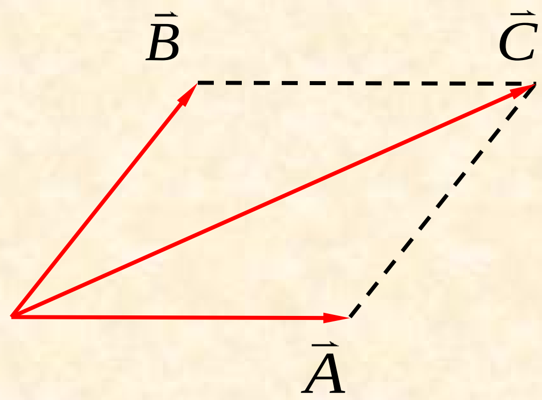
力的图示法：



$$\vec{F} = \vec{F}_N + \vec{F}_f$$

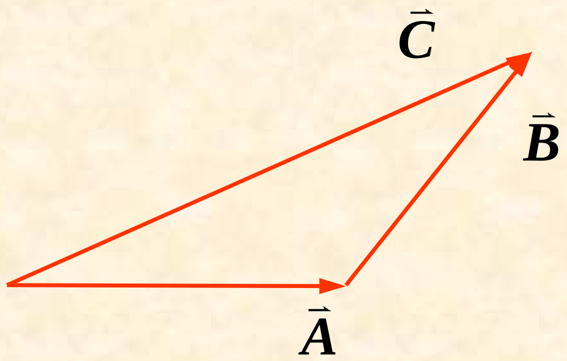
二、矢量的运算法则

1.**加法:** 矢量加法是矢量的几何和,服从平行四边形规则。



$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$$

$$\Rightarrow$$

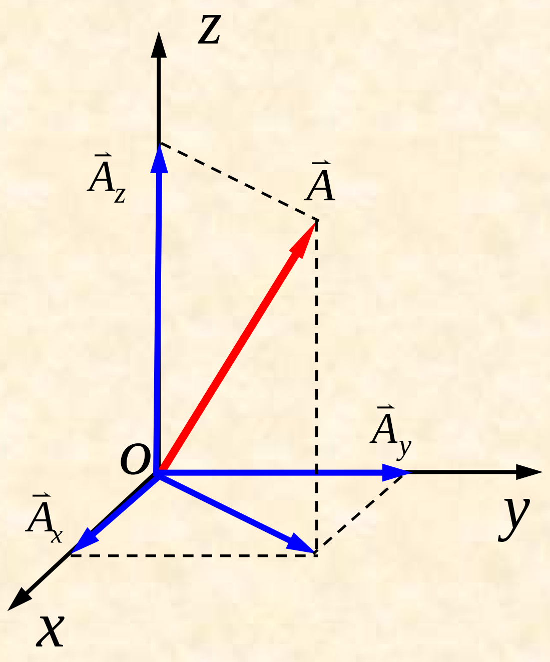


a.满足交换律: $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

b.满足结合律: $(\vec{A}+\vec{B})+(\vec{C}+\vec{D})=(\vec{A}+\vec{C})+(\vec{B}+\vec{D})$

在直角坐标系下的矢量表示:

三个方向的单位矢量用 $\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z$ 表示。



根据矢量加法运算:

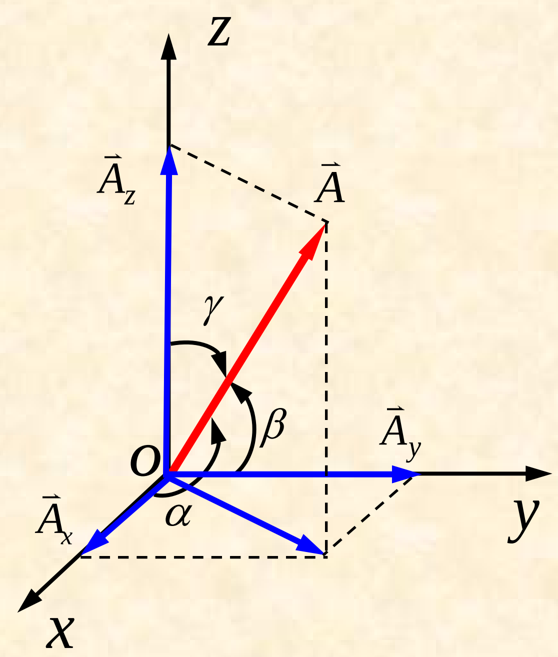
$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

其中:

$$\vec{A}_x = A_x \hat{a}_x, \quad \vec{A}_y = A_y \hat{a}_y, \quad \vec{A}_z = A_z \hat{a}_z$$

所以: $\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$

矢量： $\vec{A}=A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z$



✧模的计算： $|\vec{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$

✧单位矢量：

$$\hat{a}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{A_x}{|\vec{A}|}\hat{a}_x+\frac{A_y}{|\vec{A}|}\hat{a}_y+\frac{A_z}{|\vec{A}|}\hat{a}_z$$

$$=\cos\alpha\,\hat{a}_x+\cos\beta\,\hat{a}_y+\cos\gamma\,\hat{a}_z$$

✧方向角与方向余弦： $\alpha,\ \beta,\ \gamma$

$$\cos\alpha=\frac{A_x}{|\vec{A}|},\quad \cos\beta=\frac{A_y}{|\vec{A}|},\quad \cos\gamma=\frac{A_z}{|\vec{A}|}$$

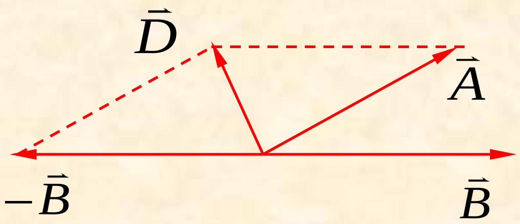
在直角坐标系中三个矢量加法运算：

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(A_x+B_x+C_x)\hat{a}_x+(A_y+B_y+C_y)\hat{a}_y+(A_z+B_z+C_z)\hat{a}_z$$

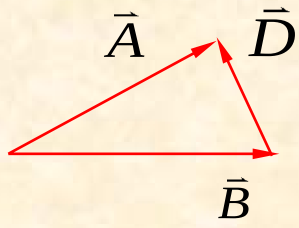
2.减法：换成加法运算

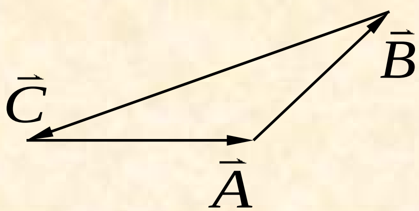
$$\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

逆矢量：$\vec{B}$ 和 $(-\vec{B})$ 的模相等，方向相反，互为逆矢量。

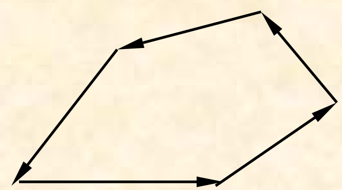


$\Rightarrow$





$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$$



推论：

任意多个矢量首尾相连组成闭合多边形，其矢量和必为零。

在直角坐标系中两矢量的减法运算：

$$\vec{A}-\vec{B}=(A_x-B_x)\hat{a}_x+(A_y-B_y)\hat{a}_y+(A_z-B_z)\hat{a}_z$$

3.乘法:

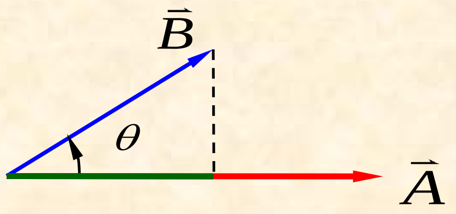
（1）标量与矢量的乘积:

$$k\vec{A} = k\,|\vec{A}|\,\hat{a} \quad \begin{cases} k>0 & \text{方向不变，大小为}|k|\text{倍} \\ k=0 & \\ k<0 & \text{方向相反，大小为}|k|\text{倍} \end{cases}$$

（2）矢量与矢量乘积分两种定义

a. 标量积（点积）:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cos\theta$$



✧两矢量的点积含义:

一矢量在另一矢量方向上的投影与另一矢量模的乘积，其结果是一标量。

推论1：满足交换律 $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

推论2：满足分配律 $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

推论3：当两个非零矢量点积为零,则这两个矢量必正交。

- 在直角坐标系中，已知三个坐标轴是相互正交的，即

$$\hat{a}_x\cdot\hat{a}_y=0,\quad \hat{a}_x\cdot\hat{a}_z=0,\quad \hat{a}_y\cdot\hat{a}_z=0$$

$$\hat{a}_x\cdot\hat{a}_x=1,\quad \hat{a}_y\cdot\hat{a}_y=1,\quad \hat{a}_z\cdot\hat{a}_z=1$$

有两矢量点积：

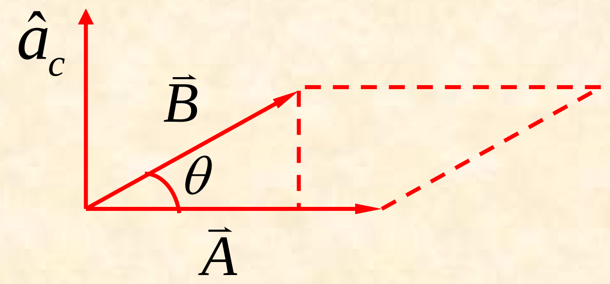
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z)\cdot(B_x\hat{a}_x+B_y\hat{a}_y+B_z\hat{a}_z)$$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

- 结论: 两矢量点积等于对应分量的乘积之和。

b.矢量积（叉积）：

$$\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\sin\theta\,\hat{a}_c$$



•含义:

两矢量叉积，结果得一新矢量，其大小为这两个矢量组成的平行四边形的面积，方向为该面的法线方向，且三者符合右手螺旋法则。

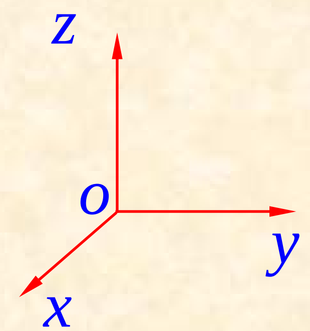
推论1：不服从交换律：$\vec{A}\times\vec{B}\neq\vec{B}\times\vec{A},\qquad \vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

推论2：服从分配律：$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

推论3：不服从结合律：$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\neq(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$

推论4：当两个非零矢量叉积为零，则这两个矢量必平行。

在直角坐标系中，两矢量的叉积运算如下：



$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z)\times(B_x\hat{a}_x+B_y\hat{a}_y+B_z\hat{a}_z)$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{a}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{a}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{a}_z$$

两矢量的叉积又可表示为：

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

（3）三重积：

三个矢量相乘有以下几种形式：

$(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$　矢量，标量与矢量相乘。

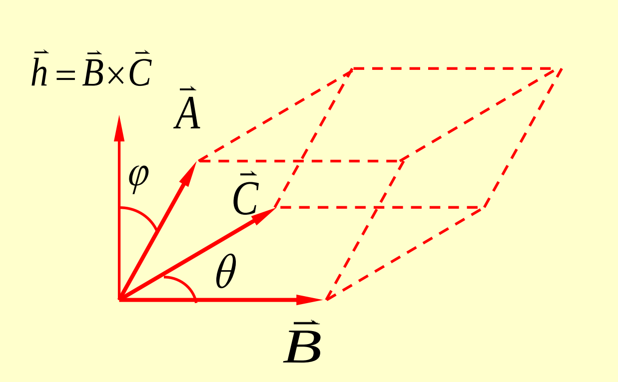
$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$　标量，标量三重积。

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$　矢量，矢量三重积。

a. 标量三重积

法则：在矢量运算中,先算叉积,后算点积。

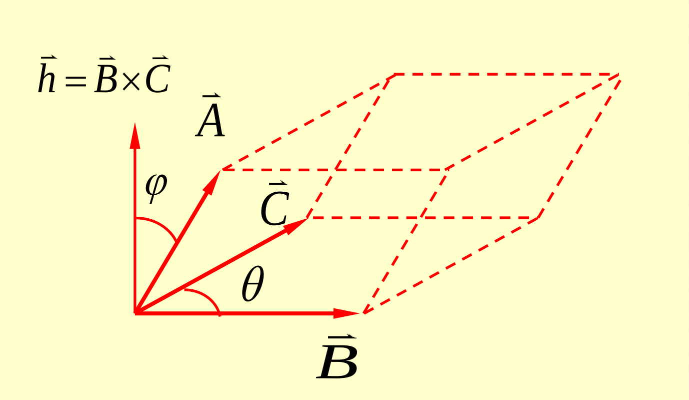
定义：$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=|\vec{A}||\vec{B}||\vec{C}|\sin\theta\cos\varphi$



含义：

　　标量三重积结果为三矢量构成的平行六面体的体积 。

$$V=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$



注意：先后轮换次序。

推论：三个非零矢量共面的条件。

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=0$$

在直角坐标系中：

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=(A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z)\cdot\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

b.矢量三重积：

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

例2：设 $\vec{r}_1 = 2\hat{a}_x - \hat{a}_y + \hat{a}_z, \quad \vec{r}_2 = \hat{a}_x + 3\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$

$\vec{r}_3 = -2\hat{a}_x + \hat{a}_y - 3\hat{a}_z, \quad \vec{r}_4 = 3\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 5\hat{a}_z$

求： $\vec{r}_4 = a\vec{r}_1 + b\vec{r}_2 + c\vec{r}_3$ 中的标量 a、b、c。

解： $3\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 5\hat{a}_z$

$$= a(2\hat{a}_x - \hat{a}_y + \hat{a}_z) + b(\hat{a}_x + 3\hat{a}_y - 2\hat{a}_z) + c(-2\hat{a}_x + \hat{a}_y - 3\hat{a}_z)$$

$$= (2a + b - 2c)\hat{a}_x + (-a + 3b + c)\hat{a}_y + (a - 2b - 3c)\hat{a}_z$$

则：
$$\begin{cases} 2a + b - 2c = 3 \\ -a + 3b + c = 2 \\ a - 2b - 3c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a &= -2 \\ b &= 1 \\ c &= -3 \end{aligned}$$

例3：已知 $\vec{A}=2\hat{a}_x-6\hat{a}_y-3\hat{a}_z$　$\vec{B}=4\hat{a}_x+3\hat{a}_y-\hat{a}_z$

求：确定垂直于 $\vec{A}$、$\vec{B}$所在平面的单位矢量。

解：已知 $\vec{A}\times\vec{B}$ 所得矢量垂直于 $\vec{A}$ 、$\vec{B}$ 所在平面。

$$\hat{a}_n=\pm\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ 2 & -6 & -3\\ 4 & 3 & -1\end{vmatrix}=15\hat{a}_x-10\hat{a}_y+30\hat{a}_z$$

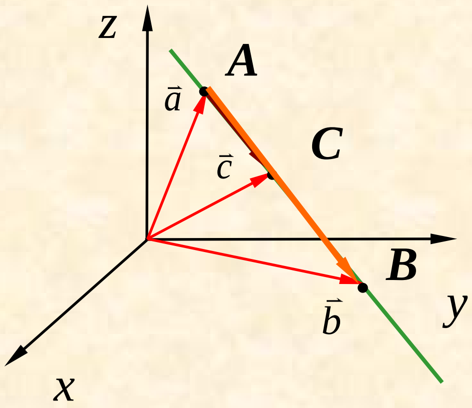
$$|\vec{A}\times\vec{B}|=\sqrt{15^2+(-10)^2+30^2}=35$$

$$\hat{a}_n=\pm\frac{1}{7}(3\hat{a}_x-2\hat{a}_y+6\hat{a}_z)$$

例4： 已知A点和B点对于原点的位置矢量为 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，

求：通过A点和B点的直线方程。

解：在通过A点和B点的直线方程上，任取一点C，对于原点的位置矢量为 $\vec{c}$，则



$$\vec{c}-\vec{a}=k(\vec{b}-\vec{a})$$

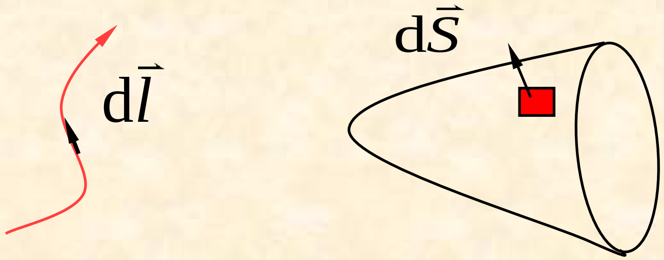
$$\vec{c}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$$

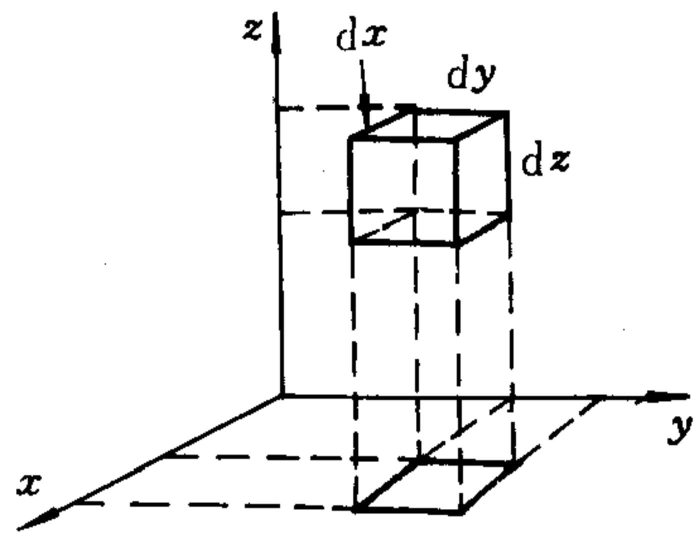
其中：k 为任意实数。

三、矢量微分元：线元、面元、体元

例： $\int \vec{F}\cdot d\vec{l}$, $\int \vec{B}\cdot d\vec{S}$, $\int \rho dV$

其中：$d\vec{l}, d\vec{S}$ 和 dV 称为微分元。





1. 直角坐标系

在直角坐标系中，坐标变量为(x,y,z)，如图，做一微分体元。

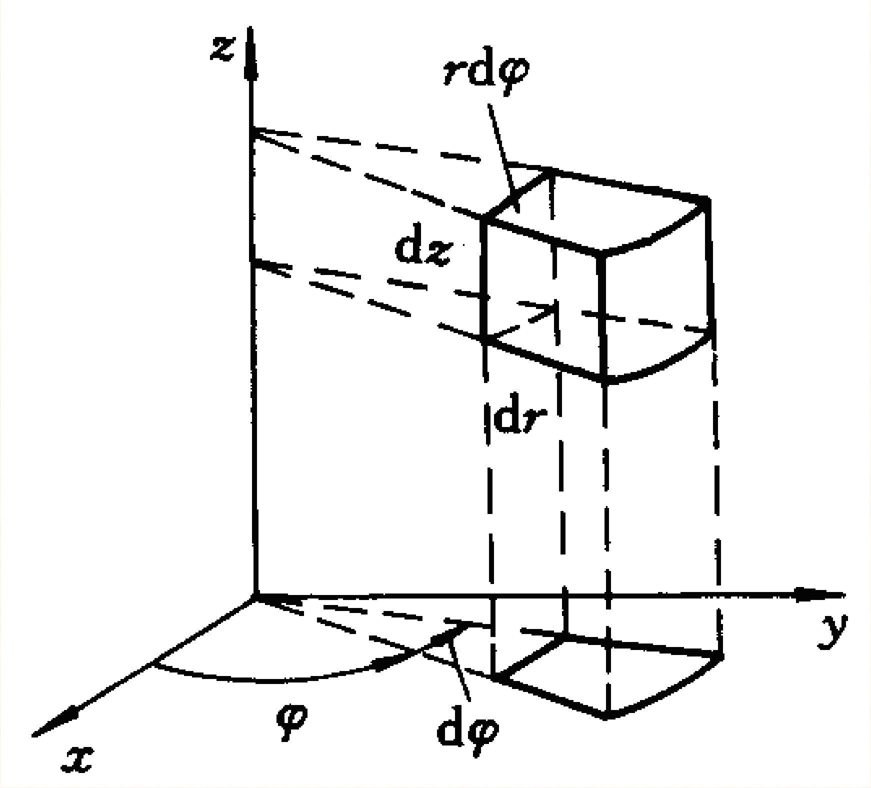
线元：
$$d\vec{l}_x = dx\hat{a}_x$$
$$d\vec{l}_y = dy\hat{a}_y$$
$$d\vec{l}_z = dz\hat{a}_z$$
$$d\vec{l} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z$$

面元：
$$d\vec{S}_x = dydz\hat{a}_x$$
$$d\vec{S}_y = dxdz\hat{a}_y$$
$$d\vec{S}_z = dxdy\hat{a}_z$$

体元：
$$dV = dxdydz$$

2. 圆柱坐标系

在圆柱坐标系中，坐标变量为(r,φ,z)，如图，做一微分体元。



线元：

$$\mathrm{d}\vec{l}=\mathrm{d}r\vec{a}_r+r\mathrm{d}\varphi\vec{a}_\varphi+\mathrm{d}z\vec{a}_z$$

面元：

$$\mathrm{d}\vec{S}_r=r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\vec{a}_r$$

$$\mathrm{d}\vec{S}_\varphi=\mathrm{d}r\mathrm{d}z\vec{a}_\varphi$$

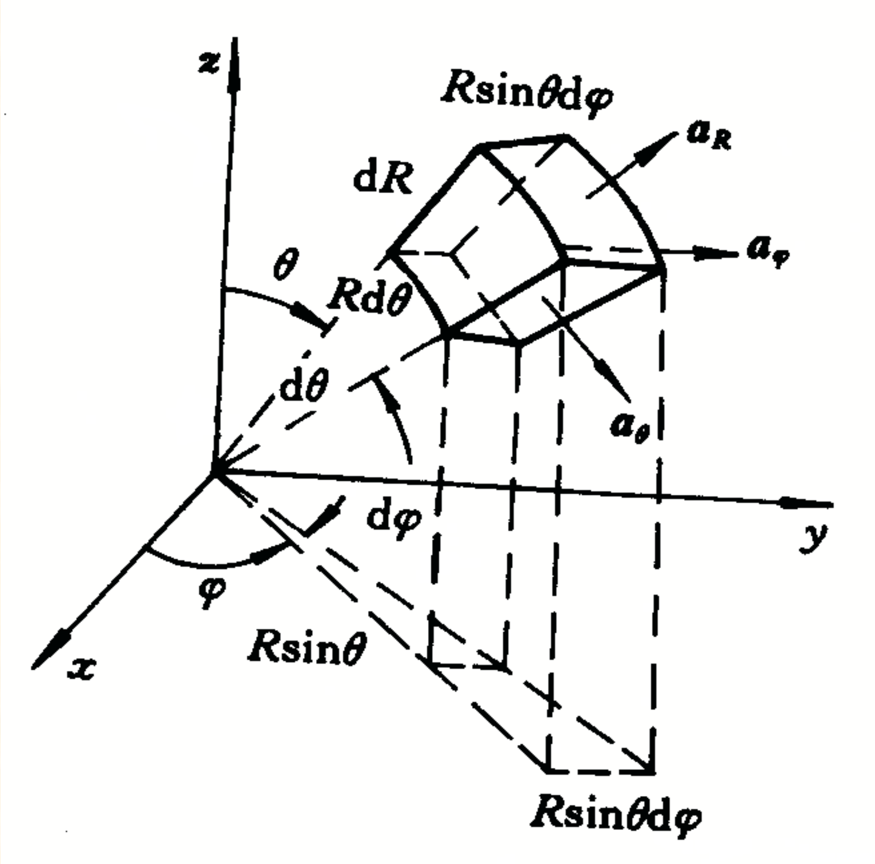
$$\mathrm{d}\vec{S}_z=r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\vec{a}_z$$

体元：

$$\mathrm{d}V=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

3. 球坐标系

在球坐标系中，坐标变量为 (R,θ,φ)，如图，做一微分体元。



线元：

$$d\vec{l} = dR\vec{a}_R + Rd\theta\vec{a}_\theta + R\sin\theta d\varphi\vec{a}_\varphi$$

面元：

$$d\vec{S}_R = R^2\sin\theta d\theta d\varphi\vec{a}_R$$

$$d\vec{S}_\theta = R\sin\theta dRd\varphi\vec{a}_\theta$$

$$d\vec{S}_\varphi = RdRd\theta\vec{a}_\varphi$$

体元：

$$dV = R^2\sin\theta dRd\theta d\varphi$$

注意:

a. 在直角坐标系中，x,y,z 均为长度量，其拉梅系数均为1，即：

$$\boxed{h_1 = h_2 = h_3 = 1}$$

b. 在柱坐标系中，坐标变量为(r,φ,z), 其中φ 为角度，其对应的线元 $r\mathrm{d}\varphi\vec{a}_\varphi$ ，可见拉梅系数为：

$$\boxed{h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1}$$

c. 在球坐标系中，坐标变量为(R,θ,φ) ，其中θ,φ均为角度，其拉梅系数为：

$$\boxed{h_1 = 1, \quad h_2 = R, \quad h_3 = R\sin\theta}$$

正交曲线坐标系：

在正交曲线坐标系中，其坐标变量 (u_1, u_2, u_3)不一定都是长度，其线元必然有一个修正系数，这些修正系数称为拉梅系数，若已知其拉梅系数 h_1, h_2, h_3，就可正确写出其线元、面元和体元。

- 线元： $d\vec{l} = h_1 du_1 \hat{a}_{u_1} + h_2 du_2 \hat{a}_{u_2} + h_3 du_3 \hat{a}_{u_3}$
- 面元： $d\vec{S}_1 = h_2 h_3 du_2 du_3 \hat{a}_{u_1}$

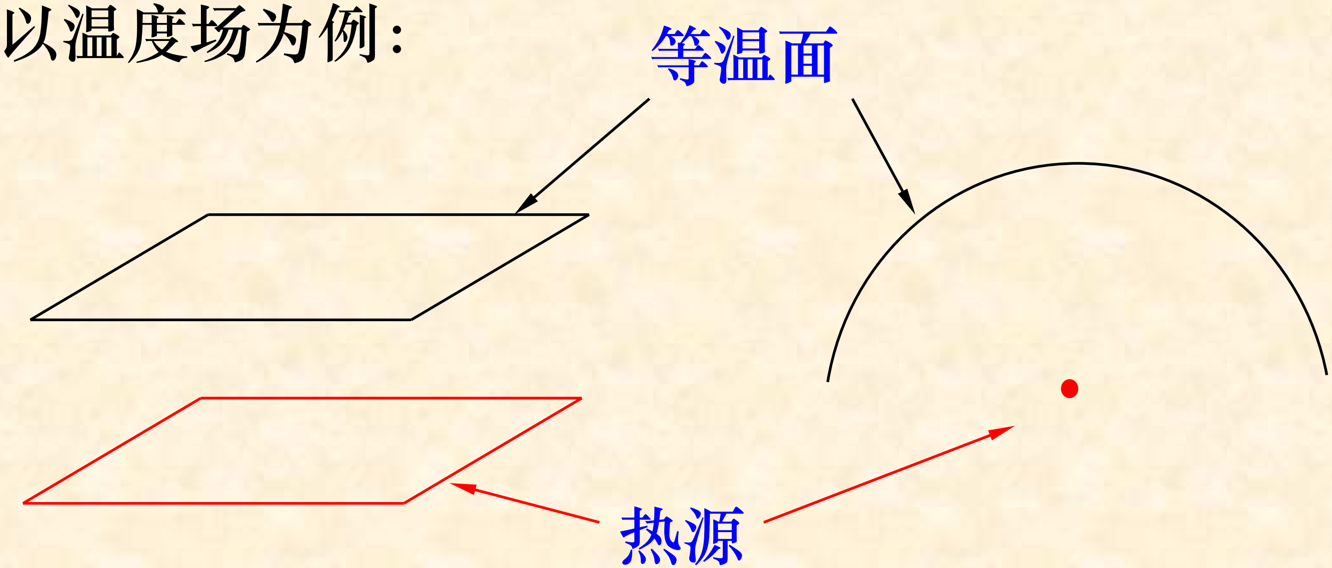
  $d\vec{S}_2 = h_1 h_3 du_1 du_3 \hat{a}_{u_2}$

  $d\vec{S}_3 = h_1 h_2 du_1 du_2 \hat{a}_{u_3}$
- 体元： $dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$

四、标量场的梯度

1. 标量场的等值面

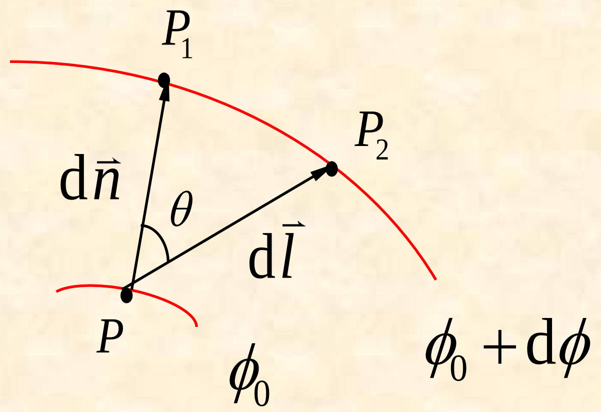
以温度场为例：



可以看出：标量场的函数是单值函数，各等值面是互不相交的。

2. 标量场的梯度

标量场的场函数为 $\phi(x,y,z,t)$



a.方向导数:

$\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}l}$ 空间变化率，称为方向导数。

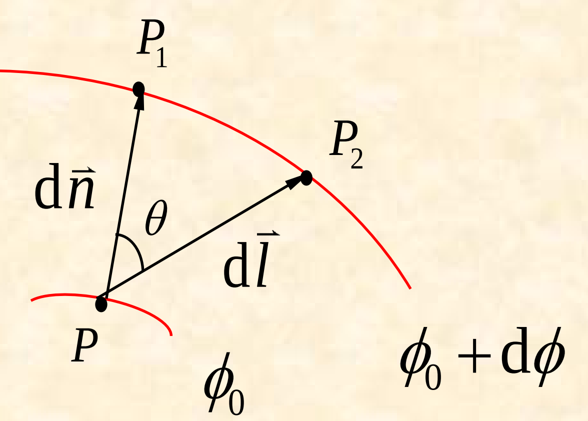
$\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}n}$ 为最大的方向导数。

b.梯度

定义：标量场中某点梯度的大小为该点最大的方向导数，其方向为该点所在等值面的法线方向。

数学表达式： $\mathrm{grad}\,\phi = \dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}n}\hat{a}_n$

计算：$\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}l}=\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}n}\cdot\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}l}=\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}n}\cos\theta=\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}n}\hat{a}_n\cdot\hat{a}_l$



$$\mathrm{d}\phi=\mathrm{grad}\phi\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

在直角坐标系中：

$$\mathrm{d}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\vec{l}=\mathrm{d}x\hat{a}_x+\mathrm{d}y\hat{a}_y+\mathrm{d}z\hat{a}_z$$

所以：$\mathrm{grad}\phi=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\hat{a}_x+\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\hat{a}_y+\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\hat{a}_z$

梯度也可表示：$\mathrm{grad}\phi=\nabla\phi$

在不同的坐标系中，梯度的计算公式:

在直角坐标系中:

$$\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{a}_x+\frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{a}_y+\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{a}_z$$

在柱坐标系中:

$$\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{a}_r+\frac{\partial\phi}{r\partial\varphi}\hat{a}_\varphi+\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{a}_z$$

在球坐标系中:

$$\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial R}\hat{a}_R+\frac{\partial\phi}{R\partial\theta}\hat{a}_\theta+\frac{\partial\phi}{R\sin\theta\partial\varphi}\hat{a}_\varphi$$

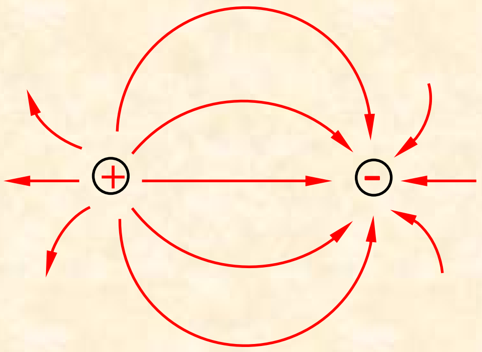
在任意正交曲线坐标系中:

$$\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{h_1\partial u_1}\hat{a}_{u1}+\frac{\partial\phi}{h_2\partial u_2}\hat{a}_{u2}+\frac{\partial\phi}{h_3\partial u_3}\hat{a}_{u3}$$

五、矢量场的散度

1. 矢线（场线）：

在矢量场中，若一条曲线上每一点的切线方向与场矢量在该点的方向重合，则该曲线称为矢线。

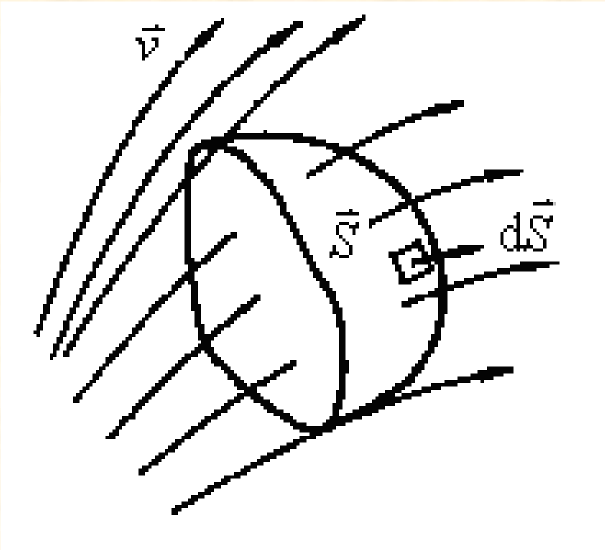


2. 通量:

定义：如果在该矢量场中取一曲面S，通过该曲面的矢线量称为通量。

表达式： $\psi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$

若曲面为闭合曲面： $\psi = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$



讨论：

a. 如果闭合曲面上的总通量 $\psi > 0$

说明穿出闭合面的通量大于穿入曲面的通量，意味着闭合面内存在正的通量源。

b. 如果闭合曲面上的总通量 $\psi < 0$

说明穿入的通量大于穿出的通量，那么必然有一些矢线在曲面内终止了，意味着闭合面内存在负源或称沟。

c. 如果闭合曲面上的总通量 $\psi = 0$

说明穿入的通量等于穿出的通量。

3. 散度:

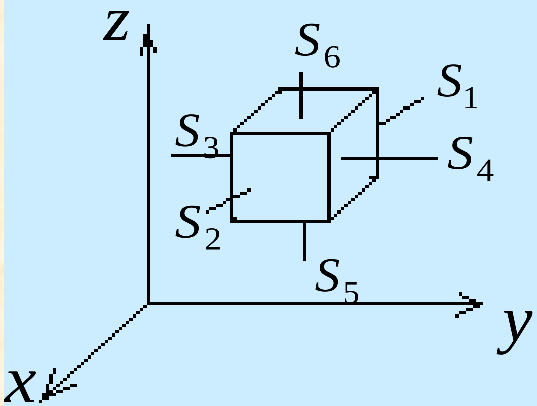
a.定义：矢量场中某点的通量密度称为该点的散度。

b.表达式:

$$\mathrm{div}\vec{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V}$$

c.散度的计算:

在直角坐标系中，如图做一封闭曲面，该封闭曲面由六个平面组成。



矢量场 $\vec{F}$ 表示为:

$$\vec{F}=F_x\hat{a}_x+F_y\hat{a}_y+F_z\hat{a}_z$$

$$\oint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_{S_1}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_1+\int_{S_2}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_2+\int_{S_3}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_3+\int_{S_4}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_4+\int_{S_5}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_5+\int_{S_6}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_6$$

在 x方向上：计算穿过 S_1和 S_2面的通量为

$$\int_{S_1} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 = F_x(x_1)\hat{a}_x \cdot \Delta y\Delta z(-\hat{a}_x) = -F_x(x_1)\Delta y\Delta z$$

$$\int_{S_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 = F_x(x_2)\hat{a}_x \cdot \Delta y\Delta z\hat{a}_x = F_x(x_1+\Delta x)\Delta y\Delta z$$

因为： $$F_x(x_1+\Delta x) \approx F_x(x_1) + \frac{\partial F_x(x)}{\partial x}\Delta x$$

则： $$\int_{S_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 = F_x(x_1)\Delta y\Delta z + \frac{\partial F_x(x)}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

在 x 方向上的总通量： $$\int_{S_1} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 = \frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

同理：在 y方向上,穿过 S_3和 S_4面的总通量：

$$\int_{S_3} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_3 + \int_{S_4} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_4 = \frac{\partial F_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$$

在 z 方向上,穿过 S_5和 S_6面的总通量：

$$\int_{S_5} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_5 + \int_{S_6} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_6 = \frac{\partial F_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$$

整个封闭曲面的总通量：

$$\oint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right]\Delta x\Delta y\Delta z$$

该闭合曲面所包围的体积： $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$

$$\mathrm{div}\vec{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

通常散度表示为： $\mathrm{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$

4.散度定理：

$$\oint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F}\, \mathrm{d}V$$

物理含义：穿过一封闭曲面的总通量等于矢量散度的体积分。

常用坐标系中，散度的计算公式

直角坐标系中： $$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

柱坐标系中： $$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{r}\frac{\partial(F_r r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

球坐标系中：

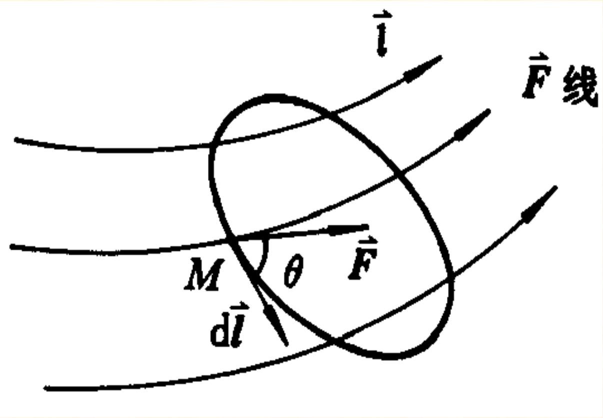
$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{R^2}\frac{\partial(R^2F_R)}{\partial R}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial(F_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}$$

正交曲线坐标系中：

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial\left(F_{u_1}h_2h_3\right)}{\partial u_1}+\frac{\partial(F_{u_2}h_1h_3)}{\partial u_2}+\frac{\partial(F_{u_3}h_1h_2)}{\partial u_3}\right]$$

六、矢量场的旋度

1. 环量:



在矢量场中，任意取一闭合曲线，将矢量沿该曲线积分称之为环量。

$$C = \oint_l \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

可见：环量的大小与环面的方向有关。

2. 旋度:

定义：一矢量其大小等于某点最大环量密度，方向为该环的法线方向，那么该矢量称为该点矢量场的旋度。

表达式：

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} [\hat{a}_n \oint_l \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\,]_{\max}$$

旋度计算：

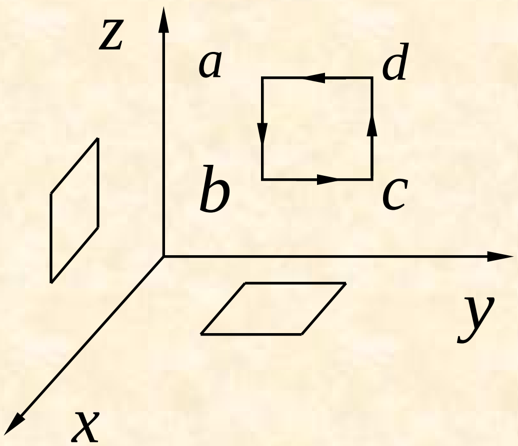
旋度可用符号表示： $\mathrm{rot}\vec{F} = \nabla\times\vec{F}$

以直角坐标系为例，一旋度矢量可表示为：

$$\nabla\times\vec{F} = (\nabla\times\vec{F})_x\hat{a}_x + (\nabla\times\vec{F})_y\hat{a}_y + (\nabla\times\vec{F})_z\hat{a}_z$$

其中：$(\nabla\times\vec{F})_x$ 为 x 方向的环量密度。

$$\boxed{(\nabla\times\vec{F})_x = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{l_1}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}}{\Delta S_x}}$$

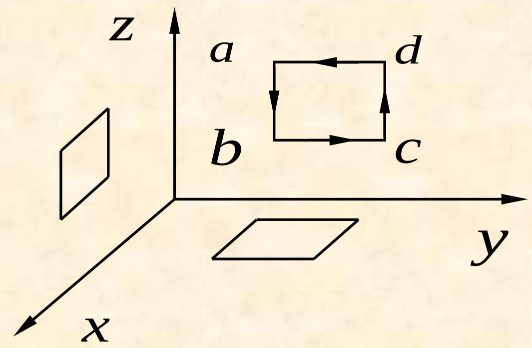


场矢量： $\vec{F} = F_x\hat{a}_x + F_y\hat{a}_y + F_z\hat{a}_z$

$$\oint_{l_1}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_{l_{ab}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_{ab} + \int_{l_{bc}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_{bc} + \int_{l_{cd}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_{cd} + \int_{l_{da}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_{da}$$

其中：$\mathrm{d}\vec{l}_{ab}=\mathrm{d}z(-\hat{a}_z)$ $\mathrm{d}\vec{l}_{bc}=\mathrm{d}y\hat{a}_y$

$\mathrm{d}\vec{l}_{cd}=\mathrm{d}z\hat{a}_z$ $\mathrm{d}\vec{l}_{da}=\mathrm{d}y(-\hat{a}_y)$



所以：$\oint_{l_1}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-F_z\Delta z+F_y\Delta y$

$$+(F_z+\frac{\partial F_z}{\partial y}\Delta y)\Delta z-(F_y+\frac{\partial F_y}{\partial z}\Delta z)\Delta y=(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z})\Delta S_x$$

$$\boxed{(\nabla\times\vec{F})_x=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{l_1}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}}{\Delta S_x}}$$

可得：$(\nabla\times\vec{F})_x=\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}$

同理：$(\nabla\times\vec{F})_y=\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}$ $(\nabla\times\vec{F})_z=\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}$

旋度公式：
$$\nabla\times\vec{F}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{a}_x+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{a}_y+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{a}_z$$

为了便于记忆，将旋度的计算公式写成下列形式：

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

类似地，可以推导出在广义正交坐标系中旋度的计算公式：

$$\boxed{\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{a}_{u_1} & h_2 \hat{a}_{u_2} & h_3 \hat{a}_{u_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_{u_1} & h_2 F_{u_2} & h_3 F_{u_3} \end{vmatrix}}$$

对于柱坐标、球坐标，已知其拉梅系数，代入公式即可写出旋度的计算公式。

3. 斯托克斯定理：

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_l \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

物理含义：

一个矢量场旋度的面积分等于该矢量沿此曲面周界的曲线积分。

七、重要的场论公式

1. 两个零恒等式

$$(1)\ \nabla\times(\nabla\phi)\equiv 0$$

任何标量场梯度的旋度恒为零。

$$(2)\ \nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})\equiv 0$$

任何矢量场的旋度的散度恒为零。

2. 拉普拉斯算子 $\nabla^2\phi=\nabla\cdot(\nabla\phi)$

在直角坐标系中：$\nabla^2\phi=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

在圆柱坐标系中：$\nabla^2\phi=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial\phi}{\partial r})+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

在球坐标系中：

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2\frac{\partial\phi}{\partial R})+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta})+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

在广义正交曲线坐标系中：

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1})+\frac{\partial}{\partial u_2}(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2})+\frac{\partial}{\partial u_3}(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3})\right]$$

3. 常用的矢量恒等式

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$

$$\nabla\cdot(\phi\vec{A}) = \vec{A}\cdot\nabla\phi + \phi\nabla\cdot\vec{A}$$

$$\nabla\times(\phi\vec{A}) = \nabla\phi\times\vec{A} + \phi\nabla\times\vec{A}$$

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\nabla\cdot\vec{B} - \vec{B}\nabla\cdot\vec{A} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$