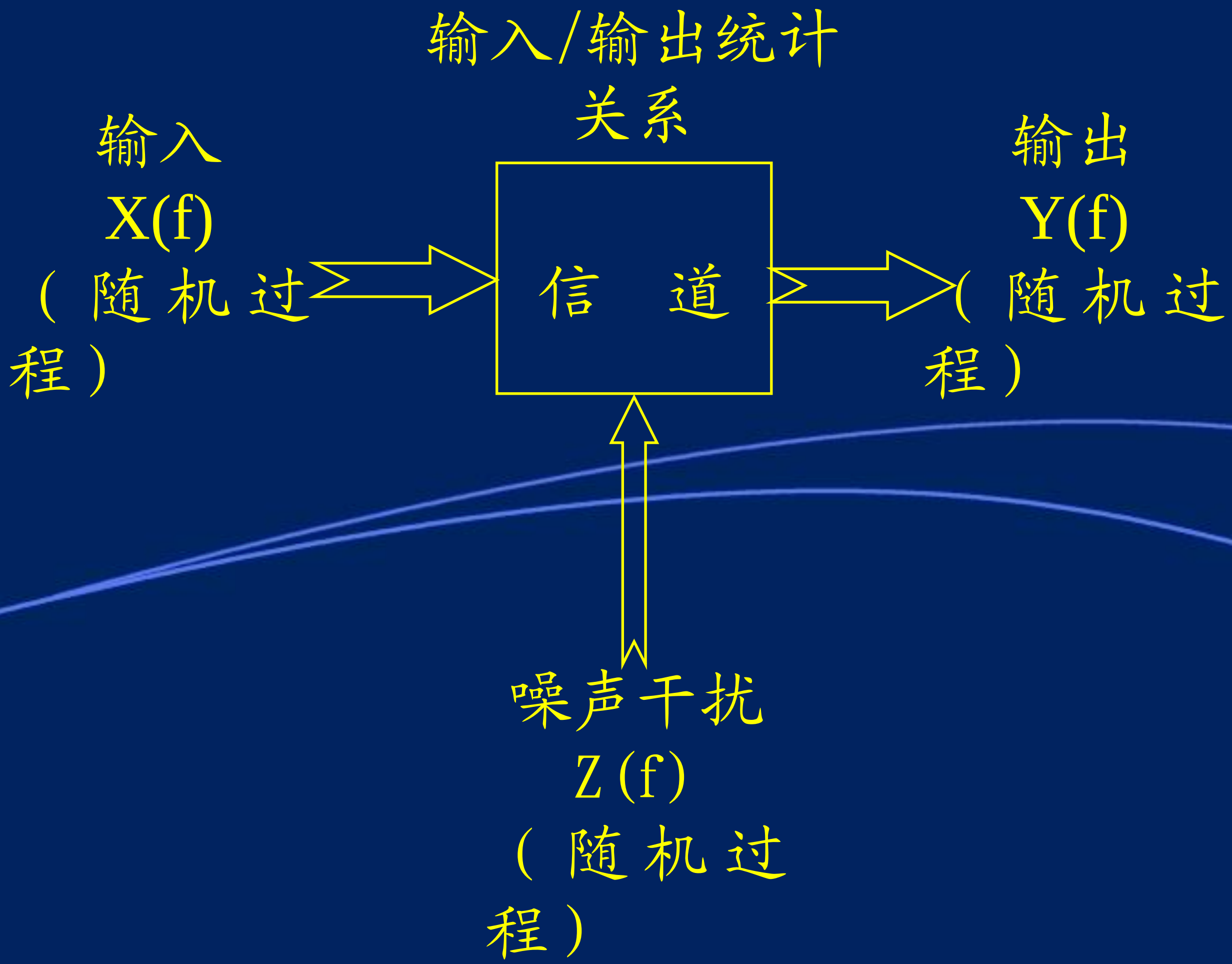
第3章　信道模型和信道容量

主要内容

1、信道模型与信道分类
2、离散无记忆信道
3、概率关系
4、信道的疑义度、散布度和平均互信息
5、平均互信息的性质
6、信道容量C
7、扩展信道及其信道容量
8 信道的组合
9、信道剩余度
10、连续信道的信道容量
11、波形信道及其信道容量

1、信道模型与信道分类



常见的分类方法有以下几种：

（1）根据信号在时间和幅值上的离散或连续来划分

<table>
<tr><td rowspan="4">信道</td><td rowspan="2">时间离散信道</td><td>时间离散、幅值离散信道
简称离散信道（discrete channel）</td></tr>
<tr><td>时间离散、幅值连续信道
简称连续信道（continuous channel）</td></tr>
<tr><td rowspan="2">时间连续信道</td><td>时间连续、幅值离散信道</td></tr>
<tr><td>时间连续、幅值连续信道
简称波形信道（waveform channel）</td></tr>
</table>

（2）根据信道的记忆特性划分

无记忆信道 信道当前的输出只与当前的输入有关。

有记忆信道 信道当前的输出不但与当前的输入有关，还与当前时刻以前的输入有关。

（3）根据信道的输入/输出的关系划分

无噪声信道 信道的输入/输出关系是确定关系。

有噪声信道 信道的输入/输出关系是统计依存关系。

（4）根据信道物理组成划分

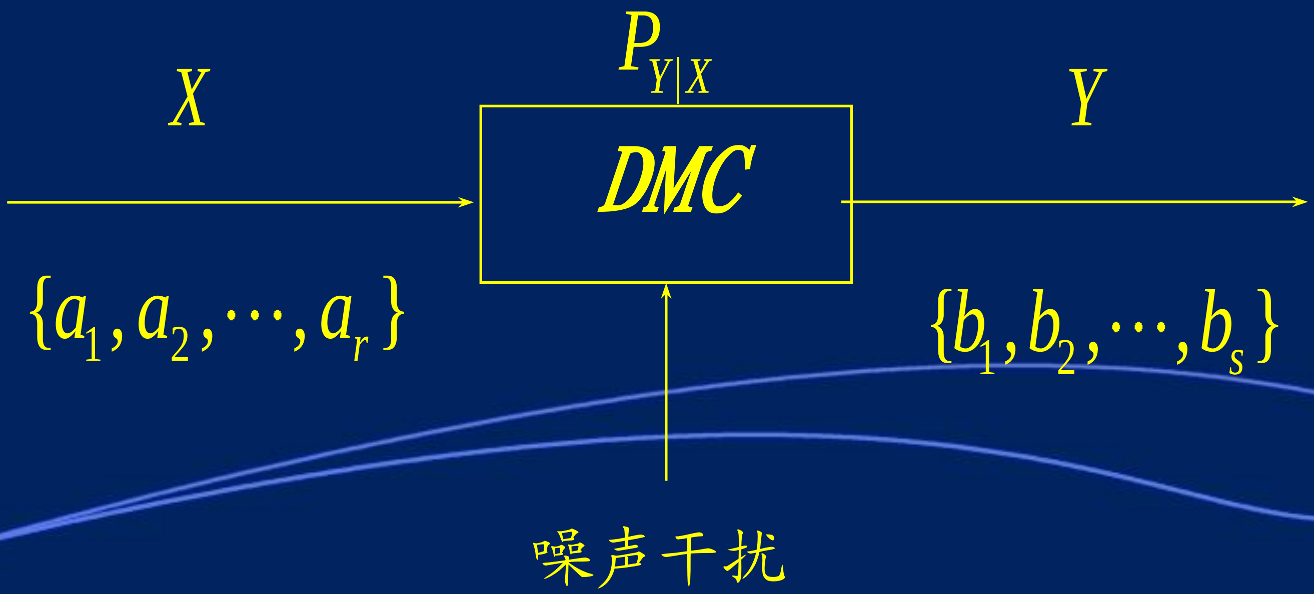
可分为很多类，较常见的有：有线信道、无线信道、光纤信道等

（5）根据信道的用户类型划分

两端（单用户）信道　只有一个输入端和一个输出端的单向信道。

多端（多用户）信道　有多个输入端和多个输出端的单向或双向信道。

2、离散无记忆信道（*DMC*, discrete memoryless channel）



*DMC*的数学模型记为

$$\{X, P_{Y|X}, Y\}$$

转移（概率）矩阵

$$[P_{Y|X}]=\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_s \\ \left[\begin{matrix} P(b_1|a_1) & P(b_2|a_1) & \cdots & P(b_s|a_1) \\ P(b_1|a_2) & P(b_2|a_2) & \cdots & P(b_s|a_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P(b_1|a_r) & P(b_2|a_r) & \cdots & P(b_s|a_r) \end{matrix}\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{array}$$

信道加一个输入，必然会产生一个输出，因此，转移矩阵中各行s个转移概率自身是完备的，即各行s个转移概率之和为1。

$$\sum_{j=1}^{s}P(b_j|a_i)=1\ ,\ \ i=1,2,\cdots,r$$

3、概率关系

输入概率: $P(a_i)\ ; i=1,2,\cdots,r$

输出概率: $P(b_j)\ ;\ j=1,2,\cdots,s$

联合概率: $P(a_i,b_j)\ ; i=1,2,\cdots,r\ ; j=1,2,\cdots,s$

转移概率: $P(b_j\mid a_i)\ ; i=1,2,\cdots,r\ ; j=1,2,\cdots,s$

后验概率: $P(a_i\mid b_j)\ ; i=1,2,\cdots,r\ ; j=1,2,\cdots,s$

根据**概率的乘法公式**:

$$P(a_i,b_j)=P(a_i)P(b_j\mid a_i)=P(b_j)P(a_i\mid b_j)$$

得到联合概率矩阵：

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array} \\
[P_{XY}] = & \begin{bmatrix} P(a_1,b_1) & P(a_1,b_2) & \cdots & P(a_1,b_s) \\ P(a_2,b_1) & P(a_2,b_2) & \cdots & P(a_2,b_s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P(a_r,b_1) & P(a_r,b_2) & \cdots & P(a_r,b_s) \end{bmatrix} \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{array}
\end{array}
$$

$[P_{XY}]$的第i行元素相加得输入概率 $P(a_i)$

的第j列元素相加得输出概率 $P(b_j)$

将$[P_{XY}]$的第j列除以 $P(b_j)$，得到后验概率矩阵：

$$[P_{X|Y}] = \begin{array}{c} \begin{matrix} \quad b_1 \quad & \quad b_2 \quad & \cdots & \quad b_s \quad \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} P(a_1|b_1) & P(a_1|b_2) & \cdots & P(a_1|b_s) \\ P(a_2|b_1) & P(a_2|b_2) & \cdots & P(a_2|b_s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P(a_r|b_1) & P(a_r|b_2) & \cdots & P(a_r|b_s) \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{matrix}$$

$$[P_Y] = [P_X][P_{Y|X}]$$

4、信道的疑义度、散布度和平均互信息

$$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)$$

X的实用信息　损失的部分

$H(X|Y)$既代表收到输出Y后对输入X还存有的疑义，又代表信道在传输过程中的信息损失，因此，通常把$H(X|Y)$称为信道的疑义度或损失熵。

$$H(X|Y)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}P(a_i,b_j)I(a_i|b_j)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}P(a_i,b_j)\log\frac{1}{P(a_i|b_j)}$$

$$=\sum_{j=1}^{s}P(b_j)\sum_{i=1}^{r}P(a_i|b_j)\log\frac{1}{P(a_i|b_j)}=\sum_{j=1}^{s}P(b_j)H(X|Y=b_j)$$

无损信道：损失熵为零的信道。

根据平均互信息的另一表达式

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y|X)$$

化为

$$H(Y)=I(X;Y)+H(Y|X)$$

$H(Y)$：输出Y中含有的全部信息

$I(X;Y)$：关于X的信息也包含由噪声引入的无用信息。

$H(Y|X)$：信道的散布度或噪声熵，表明信道因噪声干扰所呈现的无序性程度。

$H(Y|X)$是条件自信息量$I(b_j|a_i)$的统计平均:

$$H(Y|X)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}P(a_i,b_j)I(b_j|a_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}P(a_i,b_j)\log\frac{1}{P(b_j|a_i)}$$

$$=\sum_{i=1}^{r}P(a_i)\sum_{j=1}^{s}P(b_j|a_i)\log\frac{1}{P(b_j|a_i)}$$

$$=\sum_{i=1}^{r}P(a_i)H(Y|X=a_i)$$

噪声熵为零的信道称为**确定信道**。

5、平均互信息的性质

非负性： $I(X;Y) \geq 0$

极值性：
$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \leq H(X)$$
$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) \leq H(Y)$$

凸状性： 由
$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} P(a_i)P(b_j|a_i)\log\frac{P(b_j|a_i)}{P(b_j)}$$
$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} P(a_i)P(b_j|a_i)\log\frac{P(b_j|a_i)}{\sum_{i=1}^{r} P(a_i)P(b_j|a_i)}$$

$I(X;Y)$可看成信道输入X的概率矢量$P_X = \{P(a_i)\}_i$和信道转移概率矢量$P_{Y|X} = \{P(b_j|a_i)\}_{i,j}$的函数，可以记为 $I(P_X, P_{Y|X})$

定理 如果信道给定（即给定 $P_{Y|X}$），那么 $I(P_X, P_{Y|X})$ 是输入概率 P_X 的上凸函数。

定理 如果信源给定（即给定 P_X），那么 $I(P_X, P_{Y|X})$ 是转移概率 $P_{Y|X}$ 的下凸函数。

6、信道容量C

（1）信道容量的定义

信道的信息率R，就是信道的平均互信息量：

$$R = I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

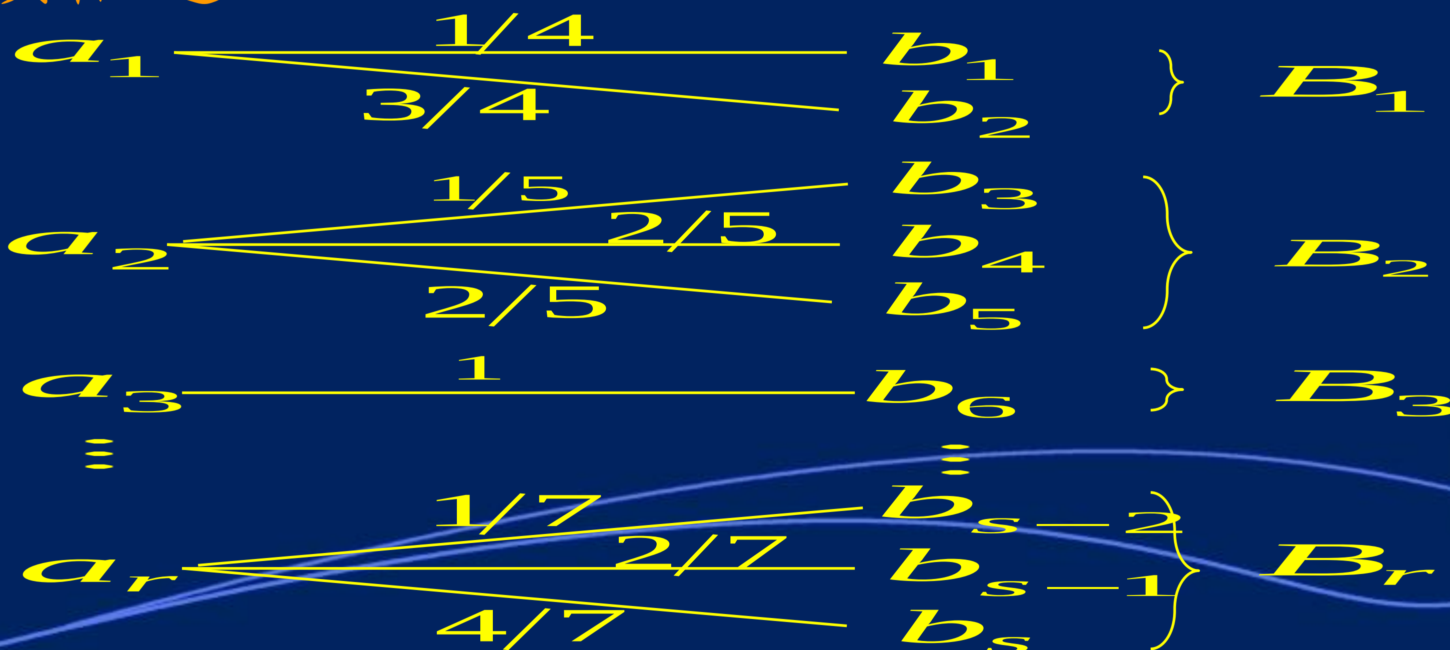
对于给定的信道，总存在一种信源分布（其概率分布为 P_X^*），使信道的信息率R达到最大。这个最大的信息率定义为该信道的信道容量，记为C，即：

$$C = \max_{P_X} R = \max_{P_X} I(X;Y) \quad \text{bit/符号}$$

使得给定信道的达到信道容量的输入分布，称为最佳输入（概率）分布，记为 P_X^*

2）几种特殊离散信道的信道容量

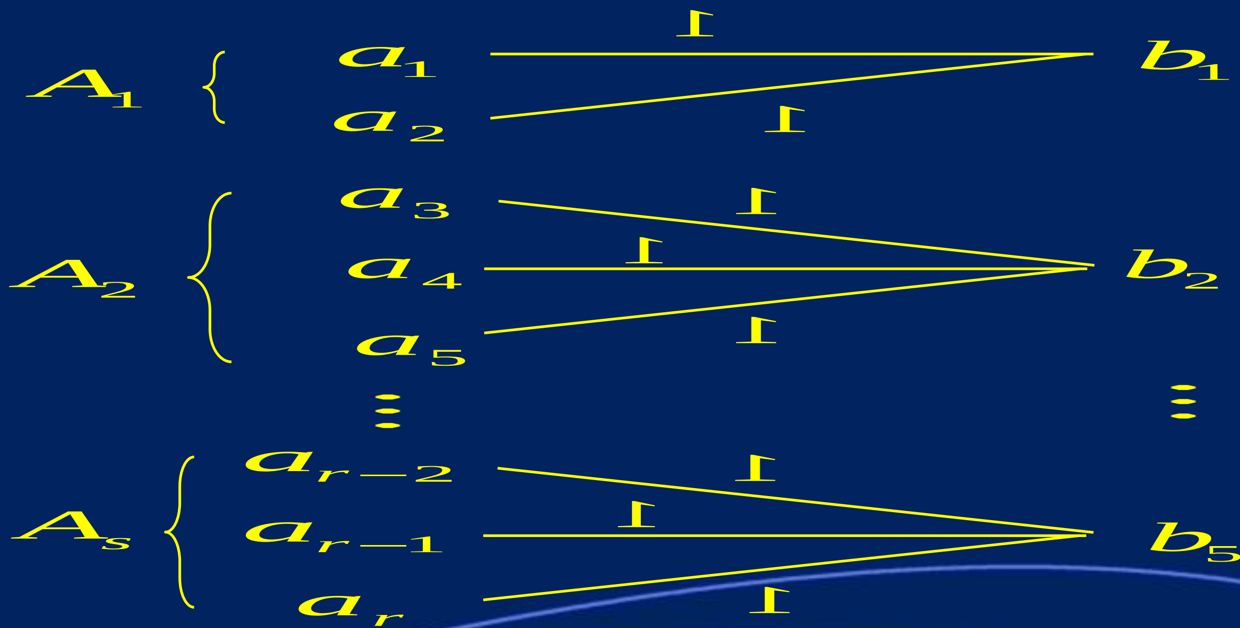
无损信道



信道容量为:

$$C = \max_{P_X} I(X;Y) = \max_{P_X} H(X) = H(X)\big|_{P(a_i)=1/r} = \log r$$

无噪信道



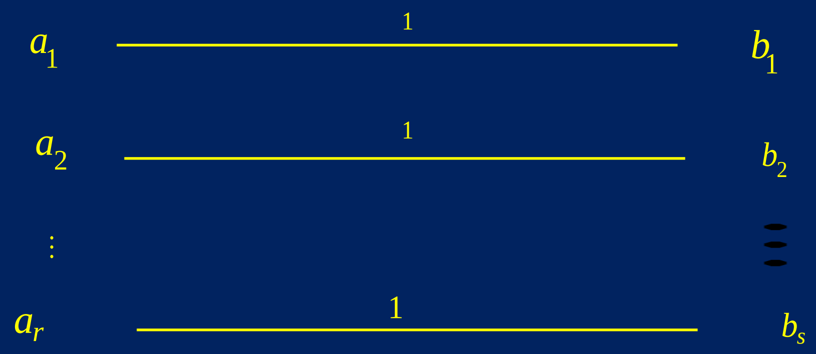
$H(Y|X)=0$，平均互信息量与输出熵相等：

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y|X)=H(Y)$$

当输出Y等概率分布，信道容量为：

$$C=\max_{P_X} I(X;Y)=\max_{P_X} H(Y)=H(Y)\big|_{P(b_j)=1/s}=\log s$$

无损确定信道



噪声熵和损失熵均为0:

$$H(Y \mid X) = 0$$

$$H(X \mid Y) = 0$$

$$I(X;Y) = H(X) = H(Y)$$

显然，当输入等概率分布时，信道达到信道容量:

$$C = \max_{P_X} I(X;Y) = \max_{P_X} H(X) = H(X)\Big|_{P(a_i)=1/r} = \log r$$

（3）离散对称信道的信道容量

离散输入对称信道

各行所对应的条件熵都相等，噪声熵也与输入概率无关:

则信道容量为:

$$
\begin{aligned}
C &= \max_{P_X} I(X;Y) \\
&= \max_{P_X}\{H(Y) - H(Y \mid X)\} \\
&= \max_{P_X}\{H(Y)\} - H(p_1', p_2', \cdots, p_s')
\end{aligned}
$$

离散对称信道

$$[P_{Y|X}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

当输入等概率分布，即输出

$$P(b_j) = \sum_{i=1}^{r} P(a_i, b_j) = \sum_{i=1}^{r} P(a_i)P(b_j \mid a_i) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} P(b_j \mid a_i) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} q_i^{'}$$

$=$常数

所以，输出等概。信道容量

$$C = \log s - H(p_1', p_2', \cdots, p_s')$$

强对称信道

$$[P_{Y|X}]=\begin{bmatrix} \bar{p} & \frac{p}{r-1} & \frac{p}{r-1} & \cdots & \frac{p}{r-1} \\ \frac{p}{r-1} & \bar{p} & \frac{p}{r-1} & \cdots & \frac{p}{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{p}{r-1} & \frac{p}{r-1} & \frac{p}{r-1} & \cdots & \bar{p} \end{bmatrix}$$

最佳输入分布为等概率分布，信道容量为:

$$C=\log s-H(p_1',p_2',\cdots,p_s')$$

$$=\log r-H(\bar{p},\frac{p}{r-1},\cdots,\frac{p}{r-1})$$

$$=\log r+p\log\frac{p}{r-1}+(1-p)\log(1-p)$$

离散准对称信道

定理 对于准对称*DMC*，当输入等概时达到信道容量。

$$C=-\sum_{k=1}^{n}s_k\left(\frac{M_k}{r}\right)\log\left(\frac{M_k}{r}\right)-H\left(p_1^{'},p_{2}^{'},\dots p_{s}^{'}\right)$$

（4） 一般DMC达到信道容量的充要条件

定理（Kuhn-Tucker） 设f (x) 是定义在所有分量均非负的半n维空间上的上凸函数，其中$\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，假定f (x) 的一阶偏导数均存在，且在定义空间上连续，则f (x) 在定义空间上点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*$处取最大值的充要条件是

$$\left.\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*}=0 \quad , \qquad \text{当 } x_i^*>0 \text{ 时}$$

$$\left.\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*}\le 0 \quad , \qquad \text{当 } x_i^*=0 \text{ 时}$$

偏互信息（partial mutual information）

$$I(a_i;Y)=\sum_{j=1}^{s}P(b_j\mid a_i)\log\frac{P(b_j\mid a_i)}{P(b_j)}$$

代表从输出中得到的关于输入的信息

$$I(X;Y)=\sum_{i=1}^{r}P(a_i)\sum_{j=1}^{s}P(b_j\mid a_i)\log\frac{P(b_j\mid a_i)}{P(b_j)}$$

$$=\sum_{i=1}^{r}P(x_i)I(a_i;Y)$$

定理 一般$DMC\ \{X,Y,P_{Y|X}\}$，其平均互信息量$I(X;Y)$在输入分布为

$$P_X^* = \{P^*(a_1), P^*(a_2), \cdots, P^*(a_r)\}$$

时取最大值的充要条件是

$$I(a_i;Y)\big|_{P_X=P_X^*} = C \quad ，\quad 当\quad P^*(a_i) > 0 \ 时$$

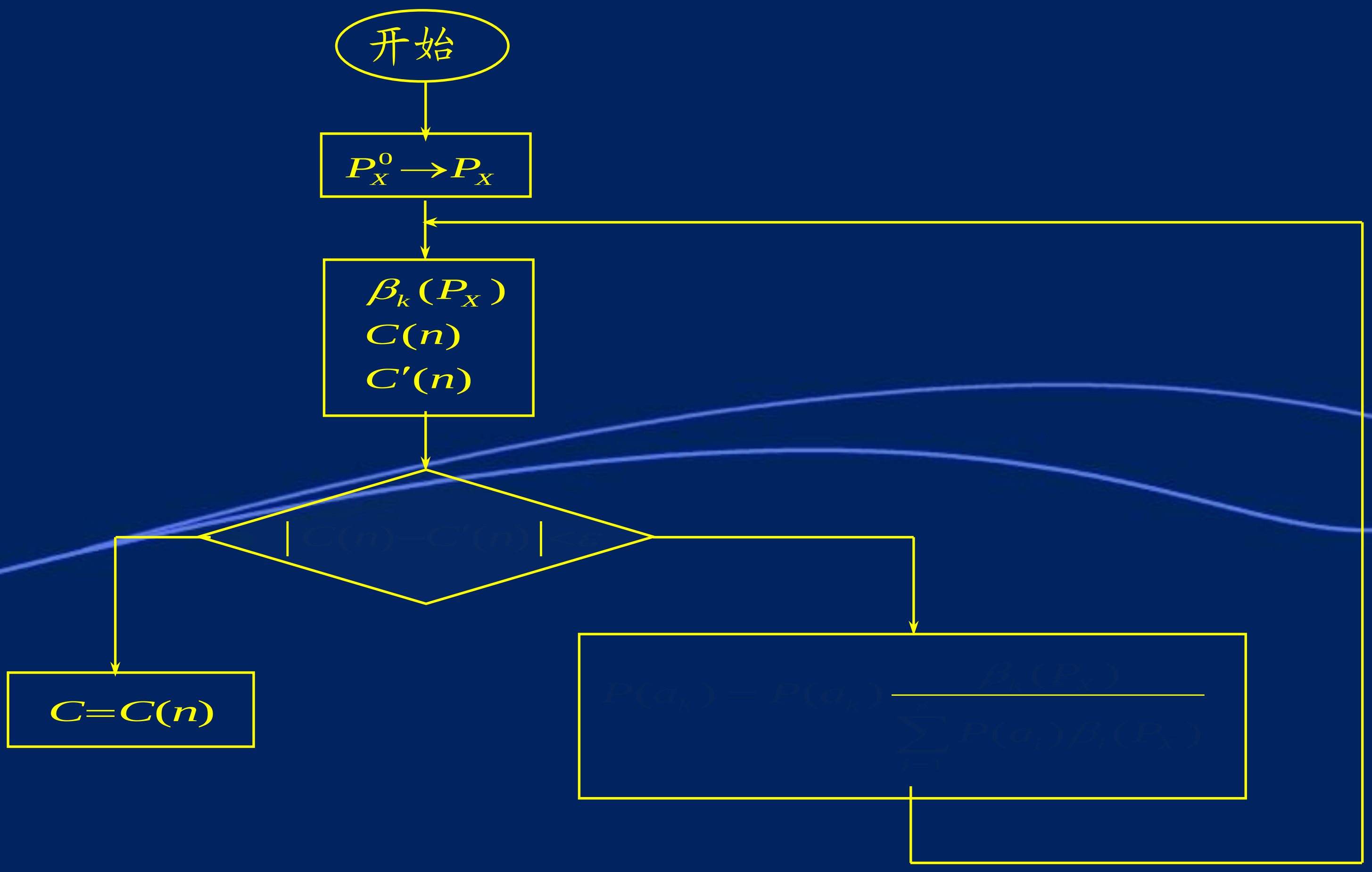
$$I(a_i;Y)\big|_{P_X=P_X^*} \le C \quad ，\quad 当\quad P^*(a_i) = 0 \ 时$$

其中，C是信道容量。

定理说明，当信道平均互信息量达到最大，所有概率非零的输入符号都传送相同的平均互信息量。

（5）信道容量的迭代算法

迭代算法流程图



7、扩展信道及其信道容量

N次扩展信道的数学模型可记为 $\{\bar{X}, P_{\bar{Y}|\bar{X}}, \bar{Y}\}$

$P(\beta_l \mid \alpha_h)$

$\bar{X} = X_1 X_2 \cdots X_N$ → 离散信道 → $\bar{Y} = Y_1 Y_2 \cdots Y_N$

噪声干扰

$X_k : [a_1, a_2, \cdots, a_r]$

$\bar{X} : [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r^N}]$

$Y_k : [b_1, b_2, \cdots, b_s]$

$\bar{Y} : [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{s^N}]$

对于DMC信道

$$P(\beta_l \mid \alpha_h) = P(b_{l_1} b_{l_2} \cdots b_{l_N} \mid a_{h_1} a_{h_2} \cdots a_{h_N}) = \prod_{k=1}^{N} P(b_{l_k} \mid a_{h_k})$$

定理 信源发出的N元随机变量序列 $\bar{X}=X_1X_2\cdots X_N$，通过信道传送，输出N元随机变量序列$\bar{Y}=Y_1Y_2\cdots Y_N$。若信道无记忆，则有

$$I(\bar{X};\bar{Y})\le\sum_{k=1}^{N}I(X_k;Y_k)$$

定理 信源发出的N元随机变量序列 $\bar{X}=X_1X_2\cdots X_N$，通过信道传送，输出N元随机变量序列$\bar{Y}=Y_1Y_2\cdots Y_N$。若信源无记忆，则有

$$I(\bar{X};\bar{Y})\ge\sum_{k=1}^{N}I(X_k;Y_k)$$

推论 信源发出的N元随机变量序列 $\bar{X}=X_1X_2\cdots X_N$，通过信道传送，输出N元随机变量序列 $\bar{Y}=Y_1Y_2\cdots Y_N$ 。若信道和信源均无记忆，则有

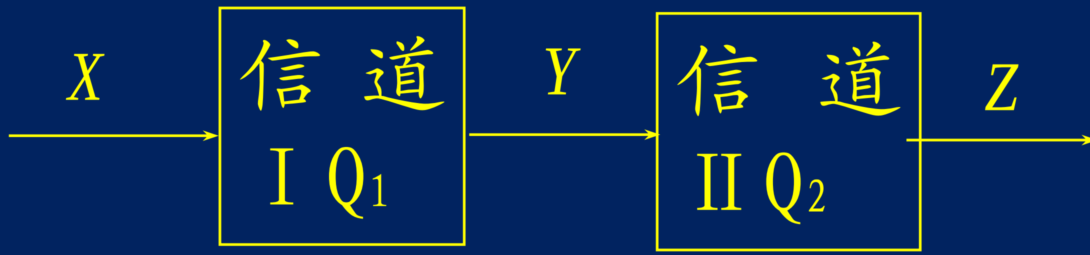
$$I(\bar{X};\bar{Y})=\sum_{k=1}^{N}I(X_k;Y_k)$$

对于离散无记忆信道，次扩展信道的信道容量为

$$C^N=\max_{P_{\bar{X}}}I(\bar{X};\bar{Y})=\max_{P_{\bar{X}}}\sum_{k=1}^{N}I(X_k;Y_k)=\sum_{k=1}^{N}\max_{P_X}I(X_k;Y_k)=\sum_{k=1}^{N}C_k=NC$$

8 信道的组合

（1）串联信道



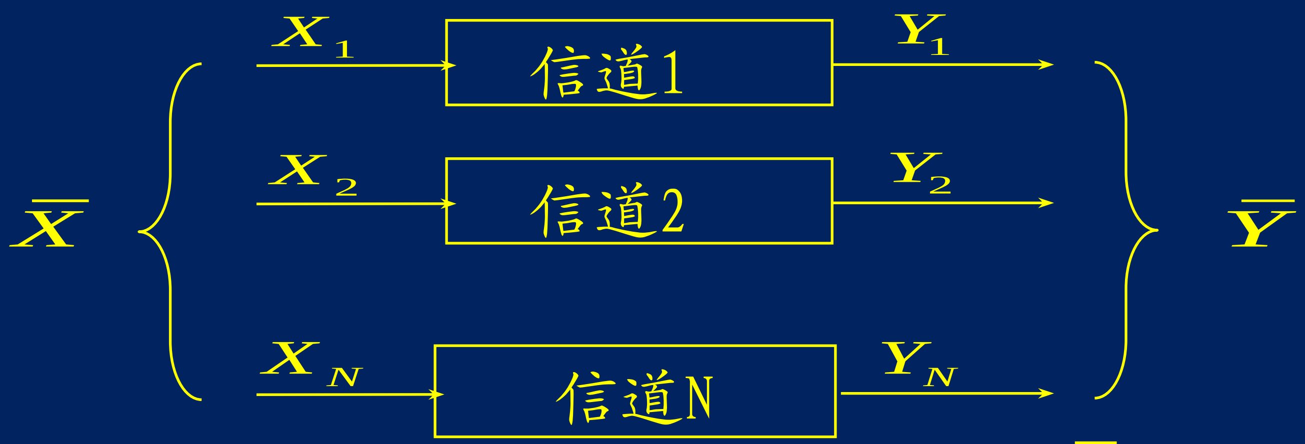
定理　若随机变量XYZ组成马尔可夫链，则有

$$I(X;Z)\le I(X;Y)$$

$$I(X;Z)\le I(Y;Z)$$

信息不增性原理：通过信道的信息不会增加

（2）独立并联信道



等效成一个N次扩展信道$\{\bar{X}, P_{\bar{X}|\bar{Y}}, \bar{Y}\}$，等效信道是无记忆的，平均互信息量满足

$$I(\bar{X};\bar{Y}) \le \sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k)$$

独立并联信道的信道容量为

$$C = \max_{P_{\bar{X}}} I(\bar{X};\bar{Y}) = \max \sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k) = \sum_{k=1}^{N} C_k$$

9、信道剩余度

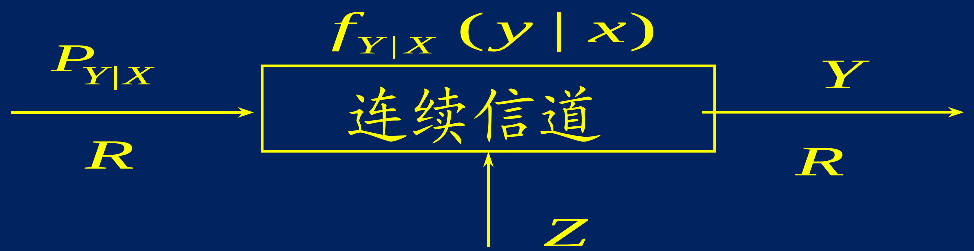
$$C - I(X;Y)$$

信道相对剩余度

$$\frac{C - I(X;Y)}{C} \times 100\%$$

10、连续信道的信道容量

连续信道是时间离散、幅值连续的信道。



连续信道的数学模型 $\{X, f_{Y|X}(y|x), Y\}$

统计特性由转移概率密度函数

$f_{Y|X}(y|x)$描述，满足如下约束条件：

$$\int_R f_{Y|X}(y|x)dy = 1$$

多维连续信道的数学模型记为 $\{\bar{X}, f_{\bar{Y}|\bar{X}}(\bar{y}|\bar{x}), \bar{Y}\}$

加性噪声信道的信道容量表达式

对于加性高斯噪声信道$Y=X+Z$

根据概率论知识，可推导出联合概率密度函数为 $f_{XY}(x,y)=f_{XZ}(x,z)=f_X(x)f_Z(z)$

因此信道的转移概率密度函数：

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f_X(x)f_Z(z)}{f_X(x)}=f_Z(z)=f_Z(y-x)$$

加性高斯噪声信道的信道容量为

$$C(P_S)=\frac{1}{2}\log\left[2\pi e\left(P_S+P_N\right)\right]-\frac{1}{2}\log\left(2\pi eP_N\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_S}{P_N}\right)$$

11、波形信道及其信道容量

波形信道（waveform channel）：输入/输出随时间连续取值、且取值集合是连续区间的信道。

波形信道→采样（在持续时间内采N个样点）→连续信道→N趋近于∞。

波形信道的平均互信息量

$$I\big(X(t);Y(t)\big)=\lim_{N\to\infty} I(\bar{X};\bar{Y})=\lim_{N\to\infty} I(X_1X_2\cdots X_N;Y_1Y_2\cdots Y_N)$$

持续时间为T的波形信道的信道容量为

$$C_T(P_S)=\lim_{N\to\infty}\max_{f_{\bar{X}}(\bar{x})}\{I(\bar{X};\bar{Y});E(\bar{X}^2)\le P_S\}$$

带限、加性高斯白噪声信道（无记忆）

$$I\big(X(t);Y(t)\big)=I(\bar{X};\bar{Y})\le\sum_{k=1}^{2BT}I(X_k;Y_k)\le\sum C_k=\frac{1}{2}\sum\log(1+\frac{P_{S_k}}{N_0/2})$$

当所有输入分量的平均功率 P_{S_k} 都相等时，出现最大值。

信道容量为 $C_T(P_S)=BT\log\left(1+\frac{P_S}{N_0B}\right)$ bit/Ts

单位化为“bit/s”，则为

$$C(P_S)=B\log\left(1+\frac{P_S}{N_0B}\right)\qquad bit/s$$

上式就是有名的香农信道容量公式。