第5章　有噪信道编码

主要内容

1、译码规则对错误概率的影响

2、两种典型的译码规则

3、信道编码对平均差错率和信息率的影响

4、汉明距离

5、有噪信道编码定理（香农第二定理）

6、有噪信道编码逆定理

7、线性分组码

实际信道由于信道噪声的干扰，传输错误不可避免。为了降低平均差错率，可先对消息进行编码——**信道编码**，再送入信道传送。

1、译码规则对错误概率的影响

译码是一种映射:

$$F(b_j) = a_j^* \in A\ ,\quad j = 1, 2, \ldots s$$

信道正好输入的是 a_j^* =>正确译码

信道输入的不是 a_j^* =>错误译码

译码正确概率:

$$P(X = a_j^* \mid Y = b_j) = P\left[F(b_j) \mid b_j\right]$$

译码错误概率:

$$P(e \mid b_j) = P\left[X \neq F(b_j) \mid Y = b_j\right] = 1 - P\left[F(b_j) \mid b_j\right]$$

平均差错率:

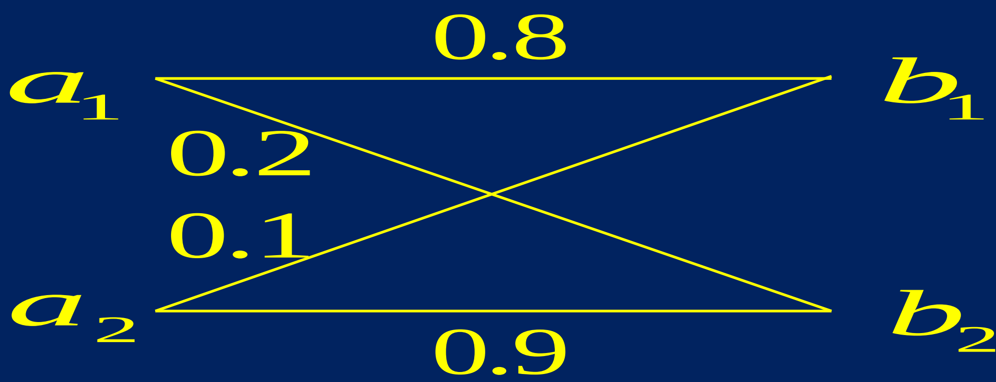
$$
\begin{aligned}
P_e &= \sum_{j=1}^{s} P(b_j)P(e \mid b_j) \\
&= \sum_{j=1}^{s} P(b_j)\{1 - P[F(b_j) \mid b_j]\} \\
&= 1 - \sum_{j=1}^{s} P[F(b_j), b_j] \\
&= 1 - \sum_{j=1}^{s} P[F(b_j)]P[b_j \mid F(b_j)]
\end{aligned}
$$

或

$$
P_e = \sum_{Y, X-a^*} P(a_i, b_j) = \sum_{Y, X-a^*} P(a_i)P(b_j \mid a_i)
$$

好的译码规则应使平均差错率小。

例：信道如下，已知 $P(a_i)=0.4$



四种译码规则如下

$$F_1:\begin{cases}F_1(b_1)=a_1\\F_1(b_2)=a_1\end{cases}\qquad F_2:\begin{cases}F_2(b_1)=a_2\\F_2(b_2)=a_2\end{cases}$$

$$F_3:\begin{cases}F_3(b_1)=a_1\\F_3(b_2)=a_2\end{cases}\qquad F_4:\begin{cases}F_4(b_1)=a_2\\F_4(b_2)=a_1\end{cases}$$

信道输入概率矩阵 $[P_X] = [0.4 \quad 0.6]$

转移概率矩阵为 $[P_{Y|X}] = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$

将 $P(a_i)$ 乘以 $[P_{Y|X}]$ 的第 i 行得联合概率矩阵

$$[P_{XY}] = \begin{bmatrix} 0.32 & 0.08 \\ 0.06 & 0.54 \end{bmatrix}$$

译码规则F₁所对应的平均差错率为

$$P_e(F_1) = 1 - \sum_{j=1}^{s} P\left[F_1(b_j), b_j\right]$$

$$= 1 - [P(a_1, b_1) + P(a_1, b_2)]$$

$$= 1 - (0.32 + 0.08)$$

$$= 0.6$$

同理，其它几种译码规则对应的平均差错率分别为

$$P_e(F_2) = 0.4$$

$$P_e(F_3) = 0.14$$

$$P_e(F_4) = 0.86$$

4种规则相比，F_3最好，F_4最差。

2、两种典型的译码规则

（1）最佳译码规则

使P_e达到最小的译码规则

最佳译码规则的确定：

计算出所有以b_j为条件的输入符号的概率，即后验概率：

$$\{P(a_1|b_j),P(a_2|b_j),\cdots,P(a_r|b_j)\}$$

取最大后验概率所对应的输入符号为译码输出a_j^*，$F(b_j)=a_j^*$。

即 $F:\begin{cases} F(b_j)=a_j^*\in A, & b_j\in B \\ P(a_j^*|b_j)\ge P(a_i|b_j), & a_i\in A \end{cases}$

又称最大后验概率译码规则。

最大后验概率条件可等价成最大联合概率条件

$$P(a_j^* | b_j) \geq P(a_i | b_j)$$

$$P(b_j)P(a_j^* | b_j) \geq P(b_j)P(a_i | b_j)$$

$$P(a_j^*, b_j) \geq P(a_i, b_j)$$

最佳译码规则又可表示成:

$$F:\begin{cases} F(b_j) = a_j^* \in A, & b_j \in B \\ P(a_j^*, b_j) \geq P(a_i, b_j), & a_i \in A \end{cases}$$

因此，该规则又称为最大联合概率译码规则。

2）极大似然译码规则

按最大转移概率条件来确定的译码规则。

$$F:\begin{cases} F(b_j)=a_j^*\in A, & b_j\in B \\ P(b_j\mid a_j^*)\geq P(b_j\mid a_i), & a_i\in A \end{cases}$$

极大似然译码规则的平均差错率不是最小，因此不是最佳的，但最易找出，只须已知信道特性即可。

例 已知信道转移矩阵如下，试确定译码规则。

$$[P_{Y|X}] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

解 只知转移概率，无法找出最佳译码规则，只能采用极大似然译码规则。

将转移概率矩阵各列最大的值标出，重写转移矩阵如下：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ [P_{Y|X}] = & \begin{bmatrix} \underline{0.5} & \underline{0.3} & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & \underline{0.5} \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \end{array}$$

按转移概率最大原则确定极大似然译码规则如下：

$$F:\begin{cases}F(b_1)=a_1\\F(b_2)=a_1 \quad (\text{or } a_2, a_3)\\F(b_3)=a_2\end{cases}$$

尽管一般情况下并不知道这样译码的差错率。但可以证明，当信道输入等概时，极大似然译码规则也是最佳的。

极大似然译码规则$F(b_j)=a_j^*(j=1,2,\cdots,s)$是按最大转移概率条件确定的，即$P(b_j|a_j^*)\ge P(b_j|a_i)$
如果输入等概，则 $P(a_j^*)=P(a_i)$ ，所以

$$P(a_j^*)P(b_j|a_j^*)\ge P(a_i)P(b_j|a_i)$$

$$P(a_j^*,b_j)\ge P(a_i,b_j)$$

得到了最大联合概率条件，由此说明，输入等概时，极大似然译码规则与最大联合概率译码规则等价，因此是最佳的。

3、信道编码对平均差错率和信息率的影响

仅仅依靠选择合适的译码规则，往往还不能满足通信质量的需要。为了进一步降低，还必须进行信道编码。一般有以下两种编码:

1）“简单重复”编码

2）对信源符号串编码

4、汉明距离

汉明距离（Hamming）用于定量描述符号序列之间的相似程度。

定义 两个等长符号序列 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 之间的汉明距离，是 $\bar{x}$ 与 $\bar{y}$ 之间对应位置上不同符号的个数，记为 $D(\bar{x},\bar{y})$。

例如

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=101111\\ \bar{y}&=111100\end{aligned}\right\} D(\bar{x},\bar{y})=3 \quad , \quad \left.\begin{aligned}\alpha&=1320120\\ \beta&=1220320\end{aligned}\right\} D(\alpha,\beta)=2$$

$D(\bar{x},\bar{y})$ 小意味着 $\bar{x}$ 与 $\bar{y}$ 的相似程度高，否则 $\bar{x}$ 与 $\bar{y}$ 的相似程度低。

汉明距离$D(\overline{x},\overline{y})$满足如下性质（公理）：

（1）非负性:

$$D(\overline{x},\overline{y}) \geq 0$$

当且仅当$\overline{x}=\overline{y}$时等号成立;

（2）对称性:

$$D(\overline{x},\overline{y}) = D(\overline{y},\overline{x})$$

（3）三角不等式：。

$$D(\overline{x},\overline{z}) + D(\overline{z},\overline{y}) \geq D(\overline{x},\overline{y})$$

对于二元对称信道，可以根据汉明距离来决定译码规则。

最小汉明距离译码规则：

$$F:\begin{cases} F(\beta_j)=c_j^{*}\in C, & \beta_j\in B^N \\ D(c_j^{*},\beta_j)=\min\left[D(c_i,\beta_j)\right], & c_i\in C\subset A^N \end{cases}$$

其含义是：将接收序列β_j译为与之最相似的输入码字c_j^{*}。

$$P_e=1-\frac{1}{M}\sum_j P\left[\beta_j\mid c_j^{*}\right]=1-\frac{1}{M}\sum_j p^{D(c_j^{*},\beta_j)}\,\bar{p}^{[N-D(c_j^{*},\beta_j)]}$$

5、有噪信道编码定理（香农第二定理）

定理（香农第二定理） 离散、无记忆、平稳信道，信道容量为C，只要待传送的信息率R<C，就一定能找到一种信道编码方法，使得码长N足够大时，平均差错率P_e任意接近于零。

香农第二定理是存在性定理，它指出在R<C时，肯定存在一种好的信道编码方法，使P_e逼近零。但香农并没有给出编码的具体方法。

6、有噪信道编码逆定理

定理 离散、无记忆、平稳信道，信道容量为C，如果信息率R>C，则肯定找不到一种信道编码方法，使得码长N足够大时，平均差错率任意接近于零。

7、线性分组码

信道编码的目的是为了降低平均差错率。

线性分组码是一种很具实用价值的纠错码。

(1) 分组码

(2) 线性码

(3) 循环码