信号与系统

第五章 拉普拉斯变换

第五章 拉普拉斯变换

- §5.1 定义、存在性
- §5.2 性质
- §5.3 拉普拉斯逆变换
- §5.4 系统函数
- §5.5 线性定常系统频率响应
- §5.6 BIBO稳定性
- §5.7 全通系统/最小相移系统

§5.1 定义、存在性

- 信号$f(t)$的傅里叶变换存在要求：

  $f(t)\in \mathrm{L}^1[-\infty,+\infty]$，但$\operatorname{sgn}(t)\notin \mathrm{L}^1$，

  $$\mathcal{F}\left\{\operatorname{sgn}(t)\right\}=\lim_{\sigma\to 0}\mathcal{F}\left\{e^{-\sigma t}f(t)\right\},\sigma>0。$$

  考虑是否可以将$e^{-\sigma t}$纳入积分核？

- 对因果信号 $f(t)=f(t)u(t)$，

$$\mathcal{F}\left\{e^{-\sigma t}f(t)\right\}=\int_0^{+\infty}\left[f(t)e^{-\sigma t}\right]e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$$

§ 5.1 定义、存在性

- 定义信号$f(t)$的（单边）拉普拉斯变换为

$$F(s) \triangleq \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} \triangleq \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t, s=\sigma+\mathrm{j}\omega$$

$$f(t)e^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t\right]e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

令$s=\sigma+\mathrm{j}\omega, \sigma$为常数, $\mathrm{d}s=\mathrm{j}\mathrm{d}\omega$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)e^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}s$$

$$f(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} \triangleq \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s$$

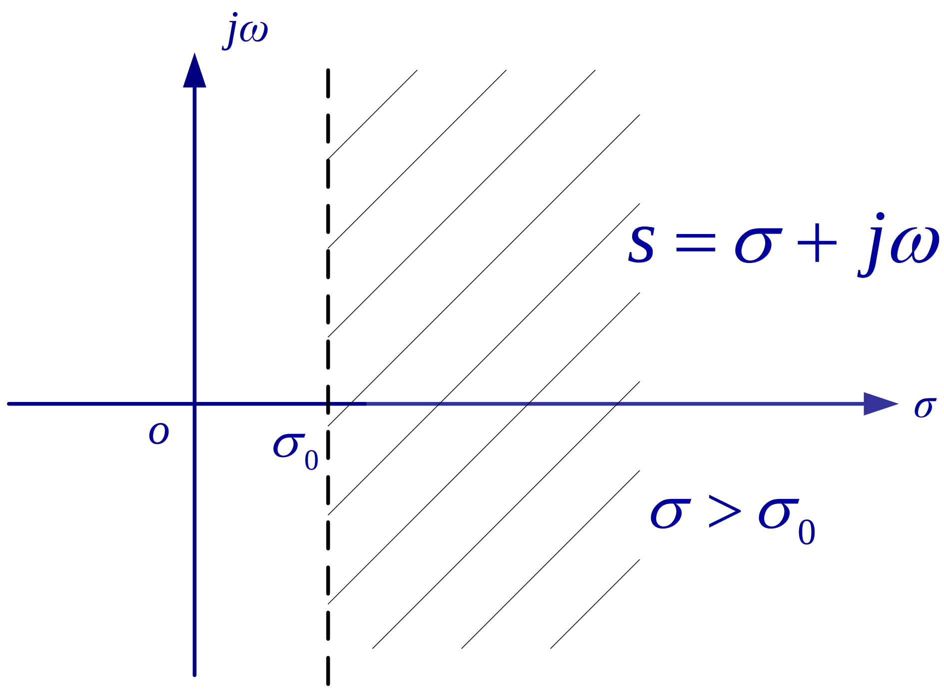
§5.1 定义、存在性

- 定义（指数阶函数）：指$f(t)$分段连续（存在有限个第一类间断点），且$\exists M>0, T>0,$ 使$\left|f(t)\right| \le Me^{\sigma_0 t}$,对$\forall t>T$。

  注：$f(t)=\mathrm{O}\left(e^{\sigma_0 t}\right)$
- $F(s)$存在：$\left|F(s)\right|<\infty$。
- 命题：指数阶信号的拉式变换存在。

§5.1 定义、存在性

- $e^{t^2}, e^{t^3}, \cdots, t \geq 0$为非指数阶信号。
- $p(t)e^{\alpha t}$为指数阶信号，其中$p(t)$为多项式。
- σ_0为收敛坐标，过σ_0垂直于σ轴的垂线为收敛轴，$\sigma > \sigma_0$收敛域（已知收敛域）。



§5.1 定义、存在性

- 例：$f(t)=u(t)$

$$u(t)\le 1\cdot e^{0t}, M=1, T=0, \sigma_0=0, \sigma>0\text{收敛}$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}\mathrm{d}t=\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^{+\infty}\overset{\sigma>0}{=}\frac{1}{s}$$

- 例：

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\}=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}e^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{e^{-(\alpha+s)t}}{\alpha+s}\Big|_0^{+\infty}\overset{\sigma>-\alpha}{=}\frac{1}{\alpha+s}$$

§ 5.1 定义、存在性

- 例： $\mathcal{L}\left\{t^n\right\}=\int_0^{+\infty} t^n e^{-st}\mathrm{d}t=\frac{n}{s}\mathcal{L}\left\{t^{n-1}\right\}$

$$\mathcal{L}\left\{u\left(t\right)\right\}=\frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\left\{tu\left(t\right)\right\}=\frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{t^n u\left(t\right)\right\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

§5.1 定义、存在性

- 积分下限：当 $f(t)$在$t=0$处第一类间断，

$$F(s)=\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0+}^{+\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0-}^{+\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

  - 注：$f'(t)|_{t=0}\sim\delta(t), f''(t)|_{t=0}\sim\delta'(t)$，解微分方程的初（边）值问题。

§ 5.2 性质

- 1. 代数性质
  - 线性：$\mathcal{L}\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(t)\right\}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \mathcal{L}\left\{f_i(t)\right\}$
  - 卷积：$\mathcal{L}\left\{f_1(t)*f_2(t)\right\}=F_1(s)F_2(s)$

$$f_1(t) \longrightarrow \boxed{h(t)=f_2(t)} \xrightarrow{\text{零状态响应}} f_1(t)*f_2(t)=y(t)$$

$$f_1(t) \Updownarrow F_1(S)$$

$$\Updownarrow$$

$$H(\omega)=\mathcal{L}\left\{h(t)\right\}=F_2(S)$$

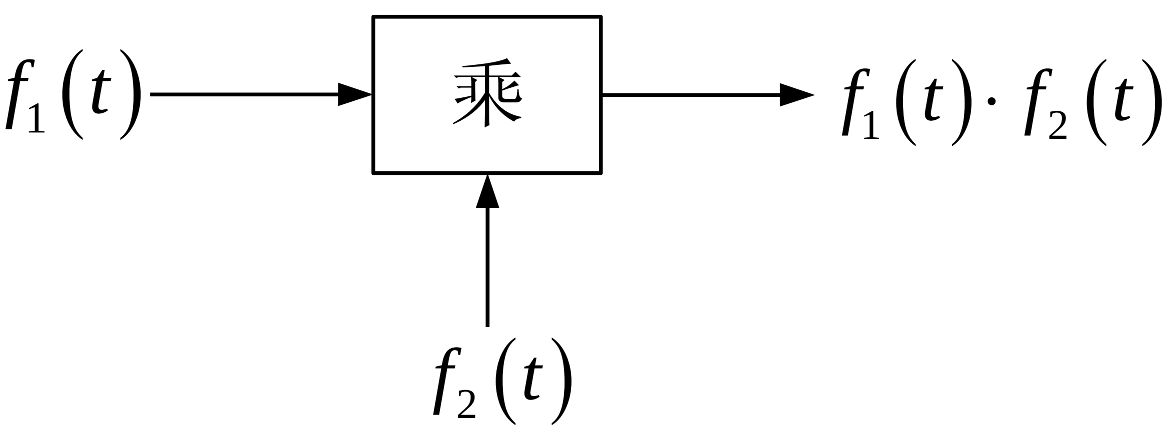
$$f_1(t)*f_2(t)=y(t) \Updownarrow F_1(S)\cdot F_2(S)$$

§ 5.2 性质

– 像卷积（s域卷积）：

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t)\,f_2(t)\right\}=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}F_1(s)*F_2(s)$$

$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F_1(z)F_2(s-z)\mathrm{d}z$$



§5.2 性质

- 拓扑性质（微/积分性质）：
  - 微分：

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right\}=s\,\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}-f(0_-)=sF(s)-f(0_-)$$

  - 1) 对因果信号 $f(0_-)=0,\ \mathcal{L}\left\{pf(t)\right\}=sF(s),\ p\triangleq\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

    $p\sim s\sim \mathrm{j}\omega \qquad pf(t)\Leftrightarrow sF(s)$

  - 2) $\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right\}=sF(s)-f(0_+)$

  - 3) $\mathcal{L}\left\{p^2 f(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{pf'(t)\right\}=s\left[sF(s)-f(0_-)\right]-f'(0_-)$

$$=s^2F(s)-sf(0_-)-f'(0_-)$$

特别：$f(0_-)=0,\ f'(0_-)=0,\cdots,\ f^{(n-1)}(0_-)=0,\ p^n f(t)\Leftrightarrow s^nF(s)$

§ 5.2 性质

– 积分：

$$\mathrm{L}\ \left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} = \mathrm{L}\ \left\{\frac{1}{p} f(t)\right\} = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0)$$

$$f^{(-1)}(0) = \int_{-\infty}^{0} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

– 像微分（s域微分）：

$$\mathrm{L}\ \left\{-tf(t)\right\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s) \square\ pF(s), p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$$

– 像积分：

$$\mathrm{L}\ \left\{\frac{1}{t} f(t)\right\} = \int_{s}^{\infty} F(z)\mathrm{d}z$$

§5.2 性质

- 其他性质：
  - 平移（延时）：$\mathcal{L}\left\{f(t-t_0)u(t-t_0)\right\}=e^{-st_0}\,\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$

$$f(t)u(t) \longrightarrow \boxed{\text{延时}\,t_0} \longrightarrow f(t-t_0)\cdot u(t-t_0)$$

  - 像平移（调制）：$\mathcal{L}\left\{f(t)e^{\alpha t}\right\}=F(s-\alpha)$

例：

$$\mathcal{L}\left\{u(t)\right\}=\frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\left\{u(t)\cos\omega_0 t\right\}=\mathcal{L}\left\{u(t)\left[\frac{1}{2}e^{\mathrm{j}\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega_0}+\frac{1}{s+\mathrm{j}\omega_0}\right]=\frac{s}{s^2+\omega_0{}^2}$$

§5.2 性质

- 相似（尺度变换）： $\mathcal{L}\left\{f(at)\right\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), a>0$
- 初值定理： $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=F(s)$, $\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}$存在，则

$$\lim_{t\to 0_+} f(t)=f(0_+)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

- 注： $R=\infty$处的所有点$\Leftrightarrow N$

$$s\to\infty \Leftrightarrow s=\sigma+\mathrm{j}\omega\to\infty$$

$$\sigma\to\infty$$

$$\omega\to\infty$$

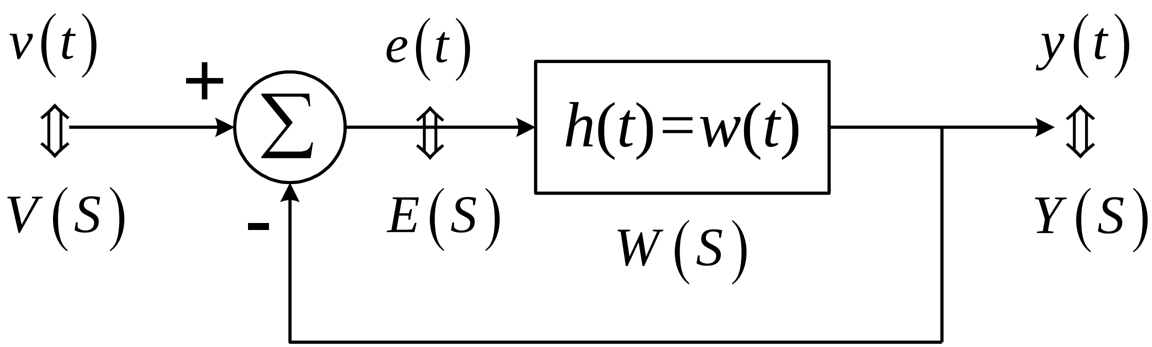
$$e^{-st}\to 0, s\to\infty$$

§5.2 性质

– 终值定理：

$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=F(s)$，$\mathcal{L}\left\{pf(t)\right\}$存在，$sF(s)$在除原点外的$\pi_r^+$（右半闭平面）解析，则$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$

– 注：(1)应用：



– 希望输出能够再现输入，即$\lim\limits_{t\to\infty}\left[y(t)-v(t)\right]=0 \Leftrightarrow e(\infty)=0$

$e(\infty)=\lim\limits_{s\to 0} sE(s)=\lim\limits_{s\to 0} s\dfrac{1}{1+W(s)}$为稳态误差/系统误差

§5.2 性质

– (2) $s \to 0, s = \sigma + \mathrm{j}\omega, \delta \to 0, \omega \to 0$(慢变信号)

– (3)定理条件：

$sF(s)$在除原点外的π_r^+解析

$\dfrac{s}{s^2 + {\omega_0}^2} \Leftrightarrow u(t)\cos\omega_0 t$，不满足定理条件

§5.3拉普拉斯逆变换

- 极点、零点：

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

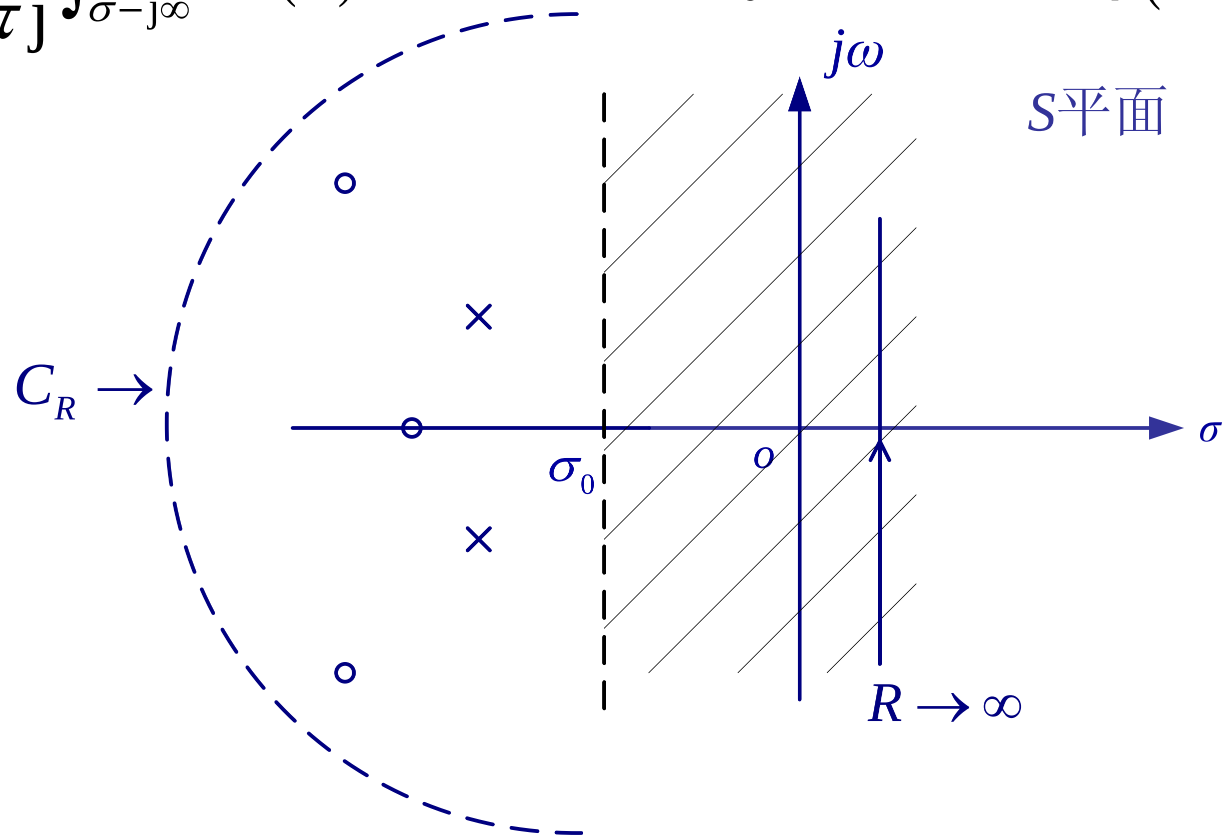
  - $F(s)$的极点$p_i \Leftrightarrow F(p_i)=\infty$，当N与D互素时，$p_i$即$D(s)$的零点。
  - $F(s)$的零点$z_i \Leftrightarrow F(z_i)=0$，当N与D互素时，$z_i$即$N(s)$的零点。

§ 5.3拉普拉斯逆变换

- 已知$F(s)$，求 $f(t)$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s,\quad \sigma > \sigma_0 = \max \mathrm{Re}\, p_i \text{（最右边极点）}$$



§ 5.3拉普拉斯逆变换

- $$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\left\{\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}s+\int_{CR}F(s)e^{st}\mathrm{d}s-\int_{CR}F(s)e^{st}\mathrm{d}s\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\left\{\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}s+\int_{CR}F(s)e^{st}\mathrm{d}s\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\left\{\oint_{C}F(s)e^{st}\mathrm{d}s\right\}$$

$$=\sum_{i}\mathrm{Res}\left\{F(s)e^{st}\right\}_{s=p_i}u(t)$$

§ 5.3拉普拉斯逆变换

– 注：

(1) $CR, R=\infty$，左半平面

(2)充要条件： $$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{CR} F(s)e^{st}\mathrm{d}s=0 \qquad (*)$$

(3) $F(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$，若$\deg N<\deg D$，则$(*)$式成立

(4) e^{st}全纯(解析)函数

(5)当$F(s)$不是有理函数时,需考察

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{CR} F(s)e^{st}\mathrm{d}s\overset{?}{=}0$$

§ 5.3拉普拉斯逆变换

(6) 当p_i为$F(s)$的一阶极点,$F(s)=\dfrac{N(s)}{(s-p_i)D_0(s)}$

$$\mathrm{Res}\left\{F(p_i)e^{p_i t}\right\}=\left[(s-p_i)F(s)e^{st}\right]_{s=p_i}u(t)$$

(7) 当p_i为$F(s)$的r阶极点,$F(s)=\dfrac{N(s)}{(s-p_i)^r D_0(s)}$

$$\mathrm{Res}\left\{F(p_i)e^{p_i t}\right\}=\frac{1}{(r-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{r-1}}{\mathrm{d}s^{r-1}}(s-p_i)^r F(s)e^{st}\right]_{s=p_i}u(t)$$

§ 5.3拉普拉斯逆变换

- (8) $F(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}, \deg N=\deg D+q$

$$F(s)=C(s)+\frac{N_0(s)}{D_0(s)}, D_0(s)=D(s)$$

$$=\sum_{i=0}^{q} C_i s^i+\frac{N_0(s)}{D_0(s)}$$

$$f(t)=\sum_{i=0}^{q} C_i \delta^{(i)}(t)+\sum_i \operatorname{Res}\left\{\frac{N_0(s)}{D_0(s)} e^{st}\right\}_{s=p_i} u(t)$$

§ 5.3拉普拉斯逆变换

- 例： $F(s)=\dfrac{s-2}{s(s+1)^3}$，求$f(t)$.

解: $f(t)=\mathrm{Res}\left\{F(s)e^{st}\right\}_{s=0}+\mathrm{Res}\left\{F(s)e^{st}\right\}_{s=-1}$

$$=\left[\frac{s-2}{s(s+1)^3}e^{st}\right]_{s=0}+\frac{1}{2!}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[\frac{s-2}{s}e^{st}\right]\right\}_{s=-1}$$

$$=\left[-2+\frac{3}{2}t^2e^{-t}+2te^{-t}+e^{-t}\right]u(t)$$

§ 5.3拉普拉斯逆变换

- 部分分式展开：

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)},\deg N<\deg D$$

$$F(s)=\frac{N(s)}{(s-p_1)^r(s-p_{r+1})\cdots(s-p_n)}$$

$$p_1-r\text{阶},\ p_{r+1}\neq\cdots\neq p_n-\text{阶}$$

§ 5.3拉普拉斯逆变换

$$F(s)=\sum_{i=1}^{r}\frac{C_{1i}}{(s-p_1)^i}+\sum_{i=r+1}^{n}\frac{C_i}{s-p_i}$$

$$C_i=\operatorname{Res}\{F(s)\}_{s=p_i},i\in\{r+1,\cdots,n\}$$

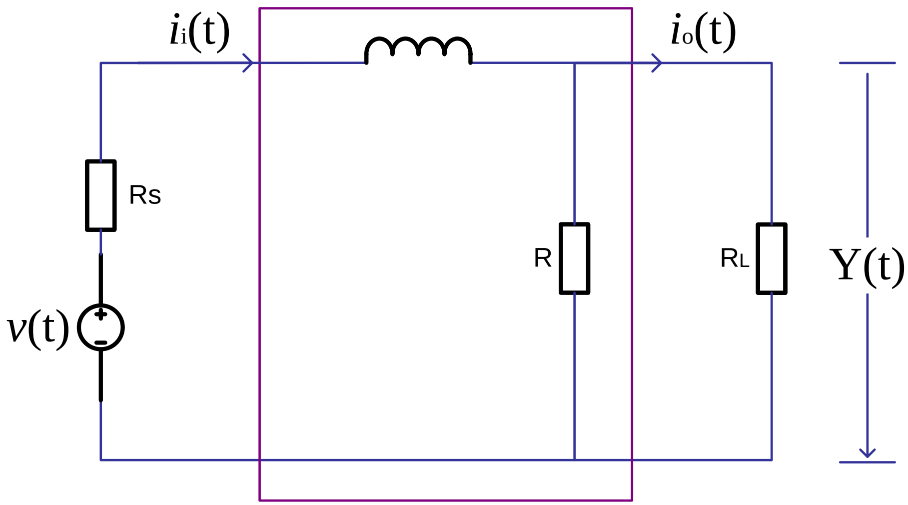
$$C_{11}=\operatorname{Res}\{F(s)\}_{s=p_1}=\frac{1}{(r-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{r-1}}{\mathrm{d}s^{r-1}}(s-p_1)^r F(s)\right]_{s=p_1}$$

$$C_{1i}=\frac{1}{(r-i)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{r-i}}{\mathrm{d}s^{r-i}}(s-p_1)^r F(s)\right]_{s=p_1}$$

$$f(t)=\left[\sum_{i=1}^{r}C_{1i}t^{i-1}e^{p_1 t}\right]u(t)+\left[\sum_{i=r+1}^{n}C_i e^{p_i t}\right]u(t)$$

§ 5.4 系统函数

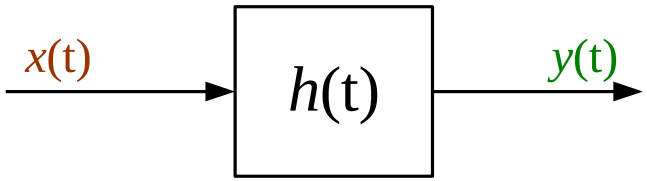
- 1.问题的提法：



$$输入v(t),求i_i(t),i_o(t),y(t)$$

$$输入i_i(t),求v(t),i_o(t),y(t)$$

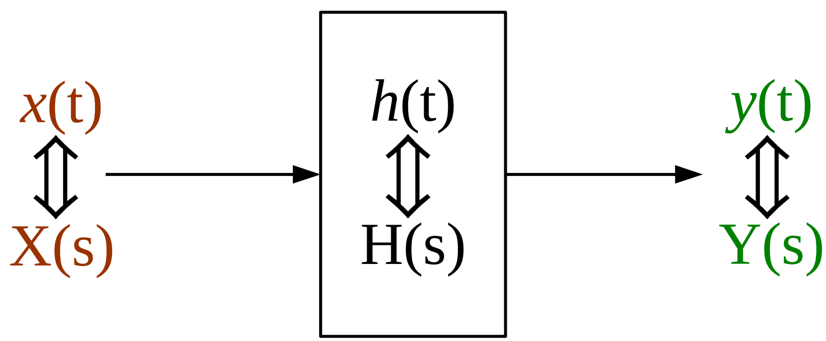
§ 5.4 系统函数



输入/输出

$h(t)$为系统的冲击响应

系统函数：$H(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}$



$$Y(s)=H(s)X(s)$$

$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)X(s)\}$零状态响应

§ 5.4 系统函数

- 2. $x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$

$$y(t)=H(p)x(t)$$

$$H(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}$$

$$Y(s)=H(s)X(s)$$

$$H(s)\overset{\text{形式}}{=}H(p)|_{s=p},\ p=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t},\ s\in\text{收敛域}$$

注:若写为$y(t)=H(s)x(t)$,则s表示微分算子

但不能写作$Y(s)=H(s)x(t)$

§ 5.4 系统函数

- 系统的多种输入输出描述：

冲击响应~系统算子~系统函数~微分方程描述

$$\underbrace{h(t) \qquad H(p) \qquad H(s)}_{\text{零状态响应}}$$

微分方程描述 ↓ 零状态响应 非零状态响应

§ 5.4 系统函数

$H(s)$的零极点与$h(t)$的特征波形函数

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)},N\text{与}D\text{互素},\deg N<\deg D$$

$$H(s)=\frac{N(s)}{(s-p_1)^r(s-p_{r+1})\cdots(s-p_n)}$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\frac{C_{1i}}{(s-p_1)^i}+\sum_{i=r+1}^{n}\frac{C_i}{s-p_i}$$

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=\left\{\sum_{i=1}^{r}C_{1i}t^{i-1}e^{p_1t}+\sum_{i=r+1}^{n}C_ie^{p_it}\right\}u(t)$$

§ 5.4 系统函数

- 注：
  - (1) $e^{p_1 t}, te^{p_1 t}, \cdots, t^{r-1}e^{p_1 t}, e^{p_{r+1} t}, \cdots, e^{p_n t}$线性无关,与极点有关, 称为模态.
  - (2) $C_{11}, \cdots, C_{1r}, C_{1r+1}, \cdots, C_n$决定于$H(s)$的零极点分布
  - (3) $H(s)$是s的实系数有理函数, p_i中可能存在共轭对.

    若$p_1 = a + \mathrm{j}\omega_0, p_2 = p_1^* = a - \mathrm{j}\omega_0$

    $$p_1 \cup p_2 \square e^{at} \sin \omega_0 t u(t)$$

§ 5.4 系统函数

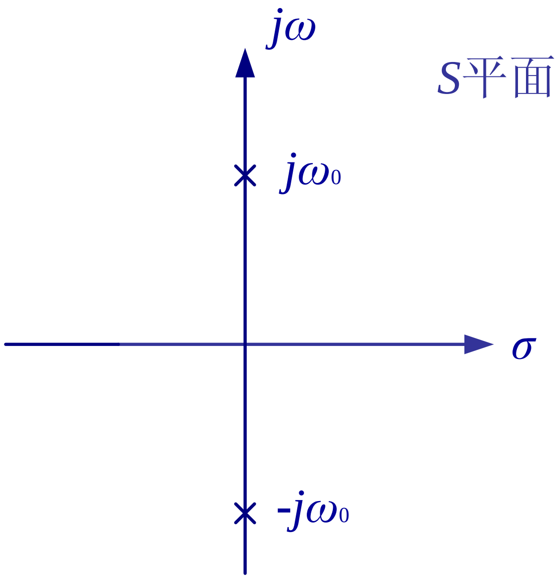
– (4) 对$H\left(s\right)$,若$\forall \operatorname{Re} p_i < 0, e^{p_i t} \xrightarrow{t\to\infty} 0$

$--p_i$是一阶极点

$--p_1$是重极点,模态$t^m e^{p_1 t}$,当$t > T$时,单调渐近于0

§ 5.4 系统函数

- (5)若$\operatorname{Re} p_i = 0$,即极点在虚轴上



$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^{\ 2}}\right\} = \sin\omega_0 t u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = u(t)$$

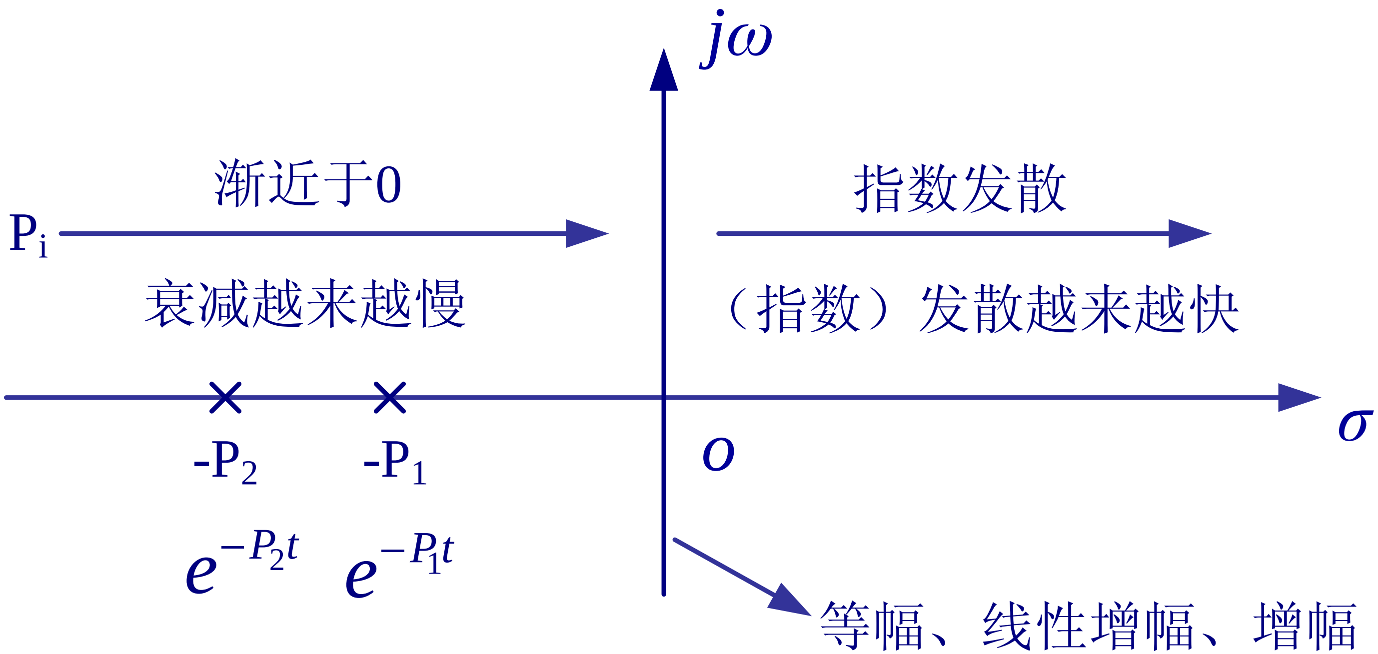
$p_i \in \pi_l^-$,模态渐近于0;

一阶$p_i \in \mathrm{j}\omega$,模态等幅;

二阶$p_i \in \mathrm{j}\omega$,$t\sin\omega_0 t u(t)$模态线性增幅

§ 5.4 系统函数

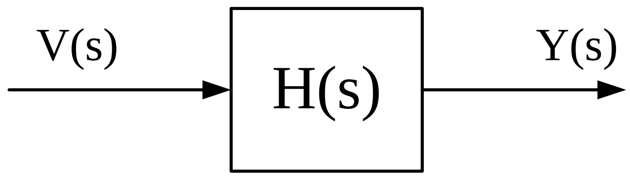
– (6) 若 $\mathrm{Re}\, p_i > 0, p_i \in \pi_r^-$,模态发散



虚轴附近的极点所决定的模态是慢变的

§ 5.4 系统函数

- 4. $Y(s)=H(s)V(s)$零极分布与响应



$$y_{zs}(t)=\underbrace{\sum_i \mathrm{Res}\left\{Y(s)e^{st}\right\}_{H(s)\text{极点}p_i}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{\sum_j \mathrm{Res}\left\{Y(s)e^{st}\right\}_{V(s)\text{极点}p_j}}_{\text{强迫响应}}$$

§ 5.4 系统函数

- 零输入响应$\Rightarrow$自由响应,与$H(s)$极点有关,

  与$H(s)$零点无关

  瞬态响应$\Leftrightarrow Y(s)$在π_l^-上极点贡献$\Leftrightarrow$渐近于0, $t\to\infty$

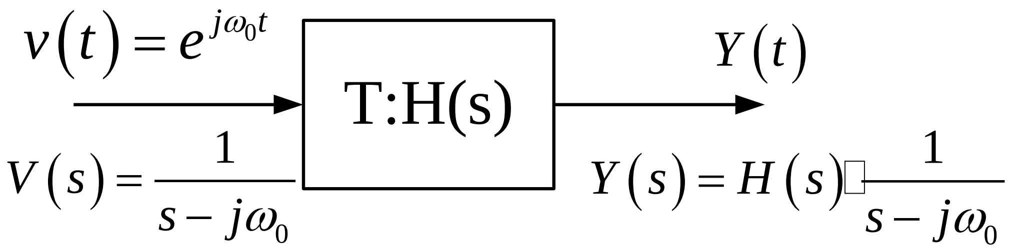
  稳态响应$\Leftrightarrow Y(s)$在π_r^+上极点贡献

  快变响应$\Leftrightarrow$远离虚轴极点贡献

  慢变响应$\Leftrightarrow$虚轴附近极点贡献

§5.5 线性定常系统频率响应

- 1.正弦稳态响应、特征函数：



$$y_{zs}(t)=\sum_i \mathrm{Res}\left\{Y(s)e^{st}\right\}_{p=\mathrm{j}\omega_0}+\underbrace{\sum_i \mathrm{Res}\left\{Y(s)e^{st}\right\}_{H(s)\text{极点}p_i}}_{H(s)\sim \mathrm{BIBO}\text{稳定}\to 0}$$

$$y_s(t)=H(\mathrm{j}\omega_0)e^{\mathrm{j}\omega_0 t}$$

$$H(\mathrm{j}\omega_0)=H(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega_0}=\left|H(\mathrm{j}\omega_0)\right|e^{\mathrm{j}\phi(\omega_0)}$$

$$y_s(t)=\left|H(\mathrm{j}\omega_0)\right|e^{\mathrm{j}\left[\omega_0 t+\phi(\omega_0)\right]}$$

$$y_s(t)=Te^{\mathrm{j}\omega_0 t}=H(\mathrm{j}\omega_0)e^{\mathrm{j}\omega_0 t}$$

§ 5.5 线性定常系统频率响应

- 注：(1)对矩阵A, $A\xi=\lambda\xi, 0\neq\xi\in R^n, \lambda$为特征根,

  ξ为特征向量

  对应上式有:

  $e^{\mathrm{j}\omega_0 t}$为特征函数, $H(\mathrm{j}\omega_0)$为谱 $\leftrightarrow$ 特征根

  (2) $v(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta_0)$

  $$y_s(t)=\left|H(\mathrm{j}\omega_0)\right|A\cos\left(\omega_0 t+\theta_0+\phi(\omega_0)\right)$$

  $$v(t)=A\sin(\omega_0 t+\theta_0)$$

  $$y_s(t)=\left|H(\mathrm{j}\omega_0)\right|A\sin\left(\omega_0 t+\theta_0+\phi(\omega_0)\right)$$

§5.5 线性定常系统频率响应

- 2.频率响应：

  当ω_0跑遍$(-\infty,+\infty)$时,$H(\mathrm{j}\omega)$即系统的频率响应(谱)

  – $H(\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|e^{\mathrm{j}\phi(\omega)}$

  其中,$|H(\mathrm{j}\omega)|$为系统的幅频特性(响应),幅度谱;

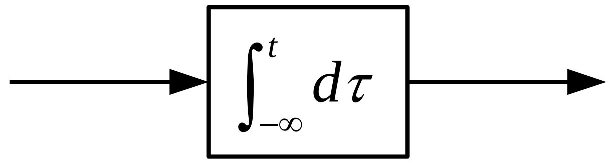
  $\phi(\omega)$为系统的相频特性(响应),相位谱;

  系统BIBO稳定,$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|\mathrm{d}t \Leftrightarrow H(s)$极点$\in \pi_l^-$

  此时,$H(\mathrm{j}\omega)=\mathcal{F}\{h(t)\}$

§ 5.5 线性定常系统频率响应

$$H(s)=\frac{1}{s}\Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \quad h(t)=u(t)$$

$$H(\mathrm{j}\omega)=H(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

而$H(\mathrm{j}\omega)=\mathcal{F}\left\{h(t)\right\}=\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}$

两者不相等

§5.5 线性定常系统频率响应

- 3.确定频率特性的几何方法：

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{K\prod_{j=1}^{m}\left(s-z_j\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(s-p_i\right)}$$

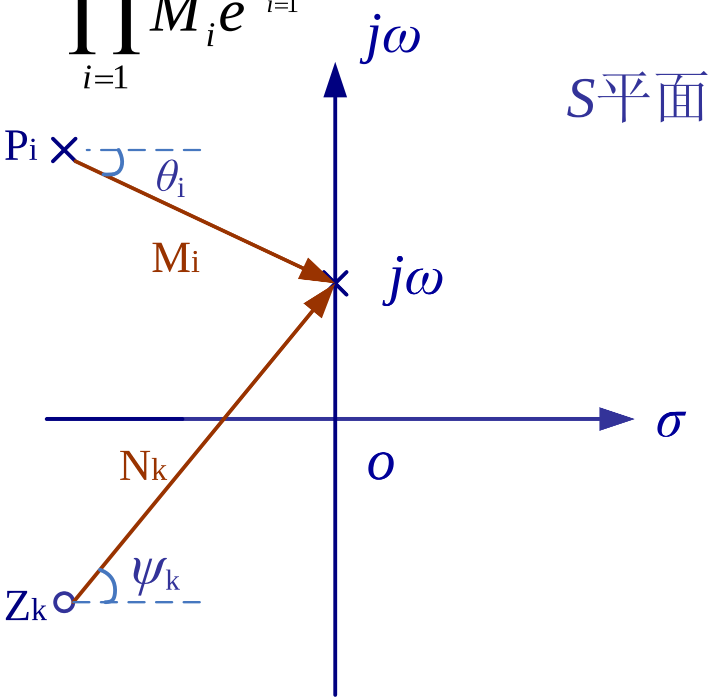
BIBO稳定，在s平面，s沿轴从$-\mathrm{j}\infty\rightarrow+\mathrm{j}\infty\Rightarrow H(\mathrm{j}\omega)$

§ 5.5 线性定常系统频率响应

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{K\prod_{j=1}^{m}(\mathrm{j}\omega-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{j}\omega-p_i)}=\frac{K\prod_{j=1}^{m}\left[N_k e^{\mathrm{j}\psi_k}\right]}{\prod_{i=1}^{n}\left[M_i e^{\mathrm{j}\theta_i}\right]}=\frac{K\prod_{j=1}^{m}N_k e^{\mathrm{j}\sum_{k=1}^{m}\psi_k}}{\prod_{i=1}^{n}M_i e^{\mathrm{j}\sum_{i=1}^{n}\theta_i}}=\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|e^{\mathrm{j}\phi(\omega)}$$

$$\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|=\frac{K\prod_{j=1}^{m}N_k}{\prod_{i=1}^{n}M_i}$$

$$\phi(\omega)=\sum_{k=1}^{m}\psi_k-\sum_{i=1}^{n}\theta_i$$



注：与正实轴的夹角：逆时针为正，顺时针为负。

§5.5 线性定常系统频率响应

- 例：考虑如下的 $H(S)$

$$H(\mathrm{j}\omega)=K\frac{N_k e^{\mathrm{j}\psi_k}}{M_i e^{\mathrm{j}\theta_\mathrm{i}}}$$

$$\left|H(\text{-j}\infty)\right|=\left|H(+\mathrm{j}\infty)\right|=K$$

$$\phi(\text{-j}\infty)=-\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\phi(\mathrm{j}\infty)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$$

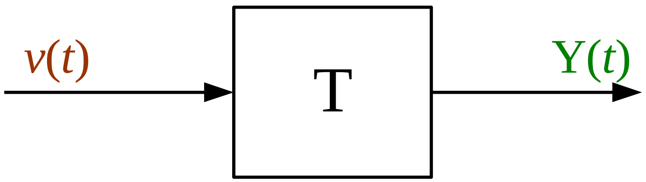
§5.6 BIBO稳定性

- 1.系统稳定性：
  - 零状态稳定性：
    输入~输出 ,外部稳定性
    BIBO稳定；
  - 零输入稳定性：内部稳定性
    李亚谱诺夫稳定性。

§5.6 BIBO稳定性

- 2. BIBO稳定性：

定义：零状态系统T是BIBO稳定的：对任一有界输入，其输出均有界。



即对$\forall v(t)\in \mathrm{L}^{\infty}(a,b)$，恒有$y(t)=\mathrm{T}v(t)\in \mathrm{L}^{\infty}(a,b)$

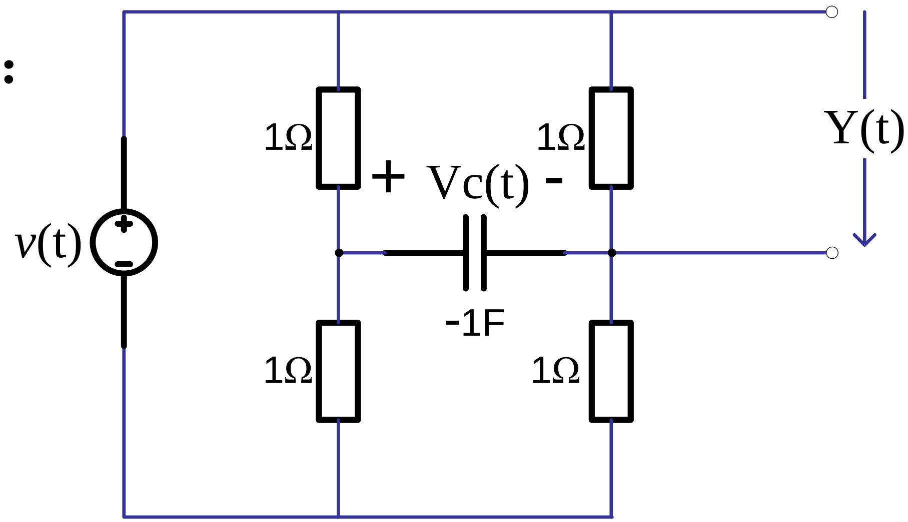
即：$\|v(t)\|_{\infty}=\sup\limits_{\forall t}|v(t)|<\infty,\ \|y(t)\|_{\infty}=\sup\limits_{\forall t}|y(t)|<\infty$

注：1）此定义是普适的（不要求系统是线性的）

2）系统在零状态BIBO稳定；系统在非零状态未必BIBO稳定。

§5.6 BIBO稳定性

- 例：



零状态BIBO稳定

$$C = -1F$$

负电容指数增长放电（数学上）

非零状态非BIBO稳定。

§5.6 BIBO稳定性

- 定理：零状态线性系统BIBO稳定

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left| h(t,\tau) \right| \mathrm{d}\tau < \infty, \forall t$$

- 定理：线性定常BIBO稳定

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left| h(t) \right| \mathrm{d}t < \infty$$

$$\Leftrightarrow H(s) = \mathcal{L}\left\{h(t)\right\} \text{的} \forall p_i \text{极点} \in \pi_l^-$$

$$\text{且} H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \deg N \le \deg D$$

注：1)若 $\deg N > \deg D$，则必非 $BIBO$ 稳定，微分算子；

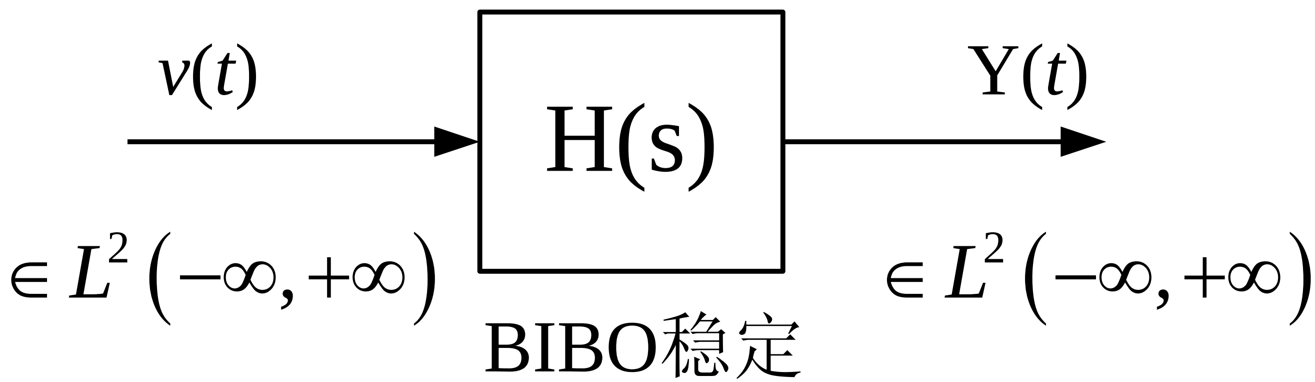
2)稳定信号 $f(t) \Leftrightarrow f(t) \in \mathrm{L}^1(-\infty, +\infty)$

3)临界稳定不是BIBO稳定

§5.6 BIBO稳定性

- 定理：若$\forall h(t)\in \mathrm{L}^1(-\infty,+\infty), \forall v(t)\in \mathrm{L}^2(-\infty,+\infty)$

  则$y(t)=h(t)*v(t)\in \mathrm{L}^2(-\infty,+\infty)$



§5.7 全通系统/最小相移系统

- 1.全通系统：

定义：$H(s)$为全通函数

$$\Leftrightarrow (1)\text{系统}BIBO\text{稳定}$$

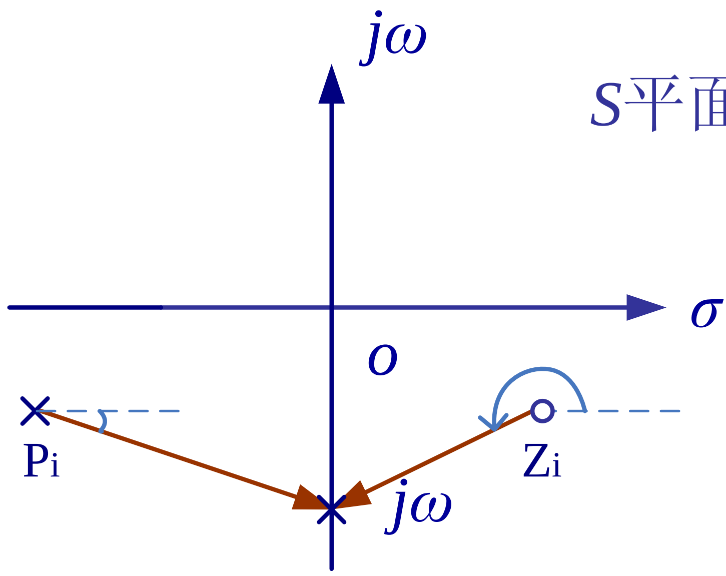
$$(2)\left|H(\mathrm{j}\omega)\right| = K < \infty$$

§5.7 全通系统/最小相移系统

– 注：(1) $\left|H(\mathrm{j}\omega)\right| = K < \infty \Leftrightarrow$

零点与极点(关于虚轴)镜像对称

极点$p_i \in \pi_l^-$，零点$z_i \in \pi_r^-$，$z_i = -p_i^*$



§5.7 全通系统/最小相移系统

– (2) 全通系统的$\phi(\omega)$是ω的单调减函数

	$\omega=-\infty$		$\omega=+\infty$
零点 z_i	$\frac{3\pi}{2}$	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
极点 p_i	$-\frac{\pi}{2}$	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
$\phi(\omega)$	2π	$\longrightarrow$	0
$H(S)$有n个零点/极点	$2n\pi$	$\longrightarrow$	0

§5.7 全通系统/最小相移系统

- 2.最小相移系统：

定义$:H\left(s\right)$为最小相移系统$\left(\text{函数}\right)$

$\Leftrightarrow 1)H\left(s\right)$的任意极点$p_i \in \pi_l^-$

$2)H\left(s\right)$的任意零点$z_i \in \pi_l^+$

若任意极点$z_i \in \pi_l^-$,则为严格最小相移系统

对幅度相同的系统, 最小相移系统相移最小

§5.7 全通系统/最小相移系统

- 定理：任意BIBO稳定的线性定常系统都可由一个全通系统与一个最小相移系统级联构成。
- 定理:在所有幅频特性相同的系统中最小相移系统

的群延迟$\tau_p \triangleq -\dfrac{\mathrm{d}\phi(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$最小

群延时:反映邻域附近整体的延迟变化$\tau_p \triangleq -\dfrac{\mathrm{d}\phi(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$

相位延时:$\phi(\omega)\big|_{\omega=\omega_1} = \omega_1 t_0, t_0 = \dfrac{\phi(\omega)\big|_{\omega=\omega_1}}{\omega_1}$,$t_0$为$\omega = \omega_1$

处的相位延迟