

## 第十章 正弦稳态分析

从本章开始，我们研究线性动态电路在正弦电源激励下的响应。线性时不变动态电路在角频率为 $\omega$ 的正弦电压源和电流源激励下，随着时间的增长，当暂态响应消失，只剩下正弦稳态响应，电路中全部电压电流都是角频率为 $\omega$ 的正弦波时，称电路处于正弦稳态。满足这类条件的动态电路通常称为正弦电流电路或正弦稳态电路。

正弦稳态分析的重要性在于：

1. 很多实际电路都工作于正弦稳态。例如电力系统的大多数电路。
2. 用相量法分析正弦稳态十分有效。
3. 已知线性动态电路的正弦稳态响应，可以得到任意波形信号激励下的响应。

## § 10-1 正弦电压和电流

### 一、正弦电压电流

按照正弦规律随时间变化的电压(或电流)称为正弦电压(或电流)，它是使用最广泛的一种交流电压(电流)，常称为交流电，用AC或ac表示。常用函数式和波形图表示正弦电压和电流，例如振幅为 $I_m$ ，角频率为 $\omega$ ，初相位为 $\psi_i$ 的正弦电流的函数表达式如式(10-1)所示，其波形图如图所示。

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i) \quad (10-1)$$

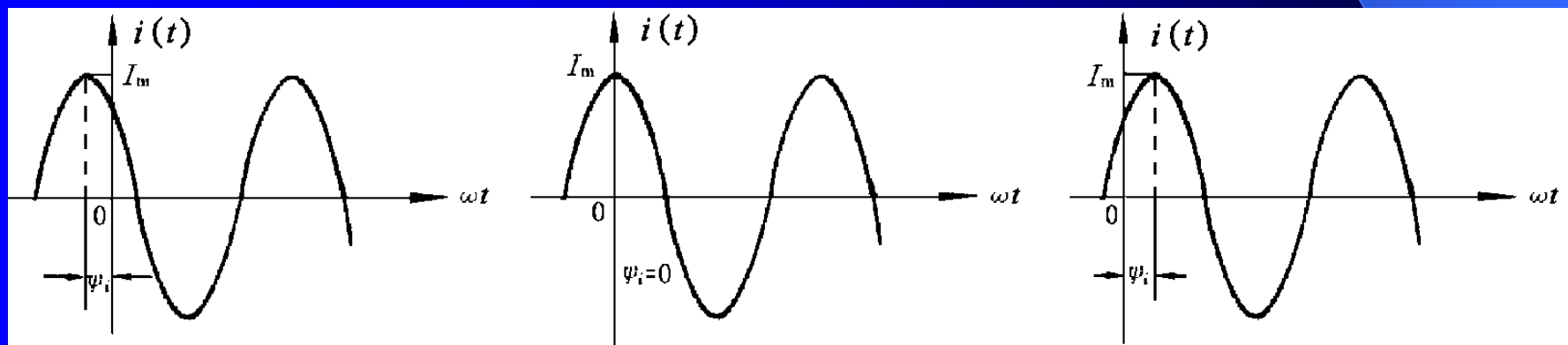


图10-1

(a) 初相  $\psi > 0$  的情况

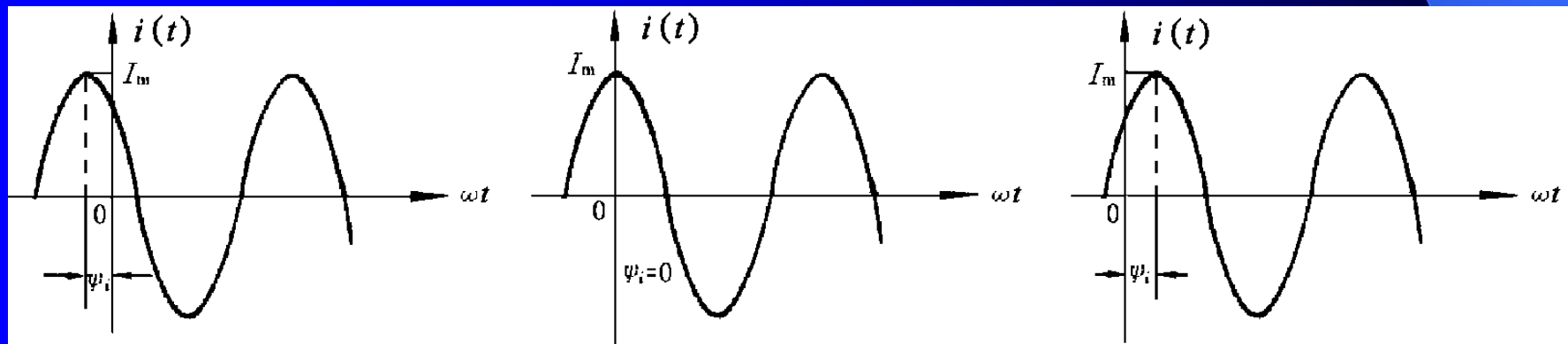
(b) 初相  $\psi = 0$  的情况

(c) 初相  $\psi < 0$  的情况

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i) \quad (10-1)$$

上式中的 $I_m$ 是正弦电流的最大值，称为正弦电流的振幅(取正值)。上式中的 $\omega$ 表示每单位时间变化的弧度数，称为正弦电流的角频率，其单位为弧度/秒(rad/s)。由于正弦量的一个周期对应 $2\pi$ 弧度，角频率与周期 $T$ 和频率 $f$ 的关系为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$



(a) 初相  $\psi > 0$  的情况

(b) 初相  $\psi = 0$  的情况

(c) 初相  $\psi < 0$  的情况

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i) \quad (10-1)$$

我国供电系统使用的正弦交流电，其频率 $f=50\text{Hz}$ (赫兹)，周期 $T=1/f=20\text{ms}$ 。式(10-1)中的 $(\omega t + \psi_i)$ 称为正弦电流的相位，其中 $\psi_i = (\omega t + \psi_i)|_{t=0}$ 是 $t=0$ 时刻的相位，称为初相。初相的取值范围通常在 $-\pi$ 到 $+\pi$ 之间，其数值决定正弦电流波形起点的位置。

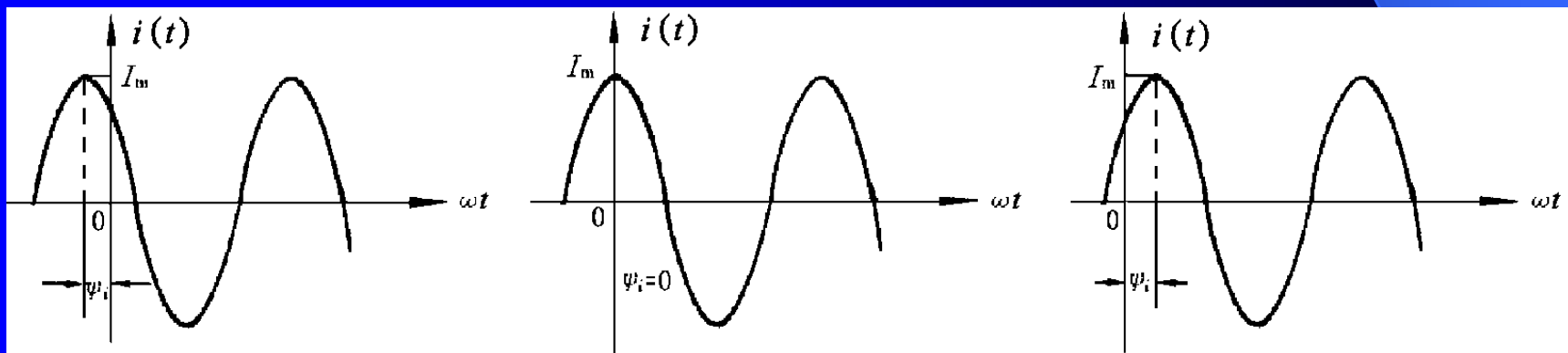


图10-1

(a) 初相  $\psi_i > 0$  的情况    (b) 初相  $\psi_i = 0$  的情况    (c) 初相  $\psi_i < 0$  的情况

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i) \quad (10-1)$$

由于已知**振幅** $I_m$ ，**角频率** $\omega$ 和**初相** $\psi_i$ ，就能够完全确定一个正弦电流，称它们为正弦电流的三要素。与正弦电流类似，正弦电压的三要素为**振幅** $U_m$ ，**角频率** $\omega$ 和**初相** $\psi_u$ ，其函数表达式为

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u) \quad (10-2)$$

由于正弦电压电流的数值随时间 $t$ 变化，它在任一时刻的数值称为**瞬时值**，因此式(10-1)和(10-2)又称为正弦电流和正弦电压的瞬时值表达式。

例10-1 已知正弦电压的振幅为10伏,周期为100ms,初相为 $\pi/6$ 。试写出正弦电压的函数表达式和画出波形图。

解: 先计算正弦电压的角频率

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2\pi}{T} \\ &= \frac{2\pi}{100 \times 10^{-3}} = 20\pi \approx 62.8 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

正弦电压的函数表达式为

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos(\omega t + \psi_u) \\ &= 10 \cos\left(20\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \text{V} = 10 \cos(62.8 t + 30^\circ) \text{V} \end{aligned}$$

正弦电压波形如图10-2所示。

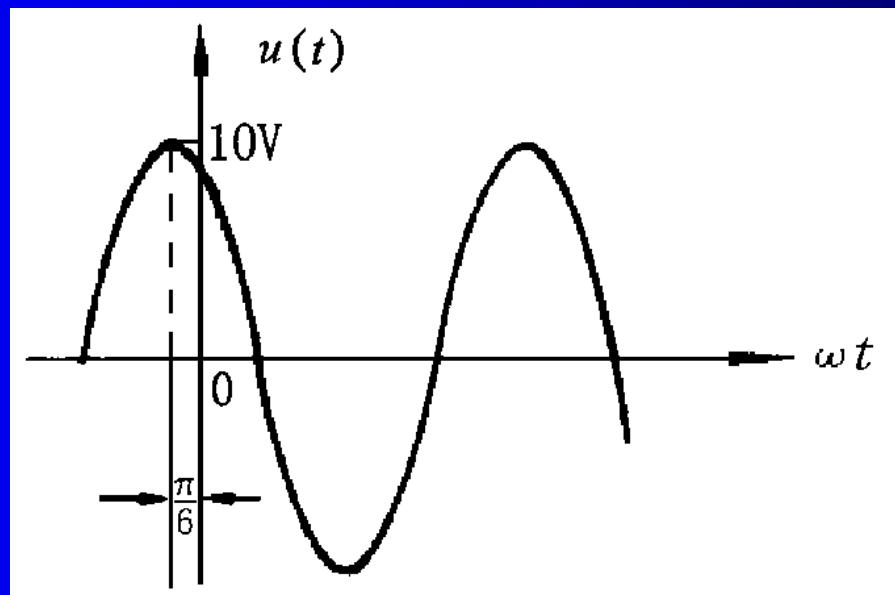


图10-2



## 二、同频率正弦电压电流的相位差

正弦电流电路中，各电压电流都是频率相同的正弦量，我们分析这些电路时，常常需要将这些正弦量的相位进行比较。两个正弦电压电流相位之差，称为相位差，用 $\varphi$ 表示。例如有两个同频率的正弦电流

$$i_1(t) = I_{1m} \cos(\omega t + \psi_1)$$

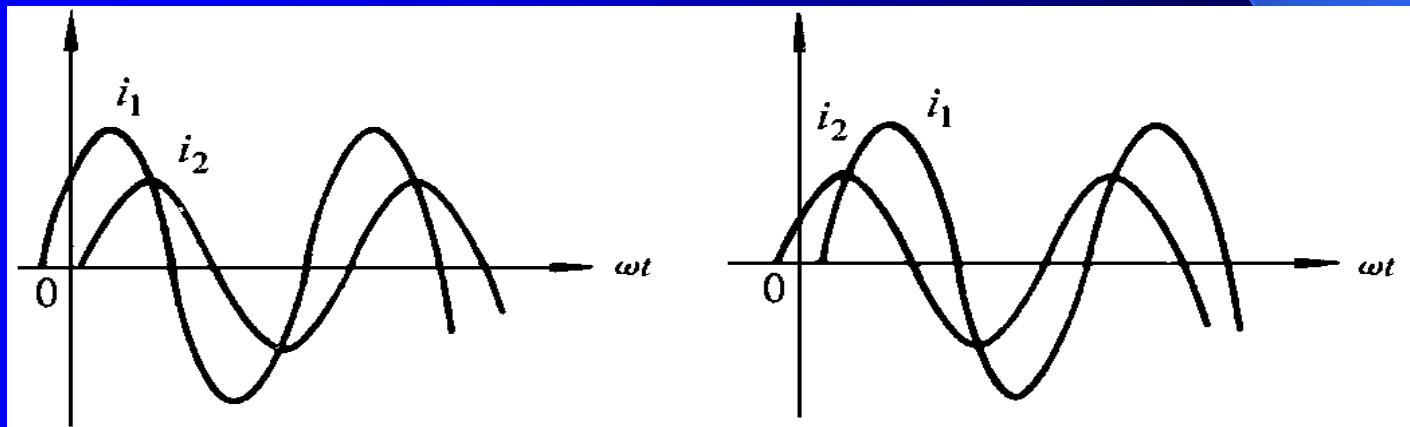
$$i_2(t) = I_{2m} \cos(\omega t + \psi_2)$$

电流 $i_1(t)$ 与电流 $i_2(t)$ 之间的相位差为

$$\varphi = (\omega t - \psi_1) - (\omega t - \psi_2) = \psi_1 - \psi_2 \quad (10-3)$$

$$\varphi = (\omega t - \psi_1) - (\omega t - \psi_2) = \psi_1 - \psi_2 \quad (10-3)$$

上式表明两个同频率正弦量在任意时刻的相位差均等于它们初相之差，与时间 $t$ 无关。相位差 $\varphi$ 的量值反映出电流 $i_1(t)$ 与电流 $i_2(t)$ 在时间上的超前和滞后关系。

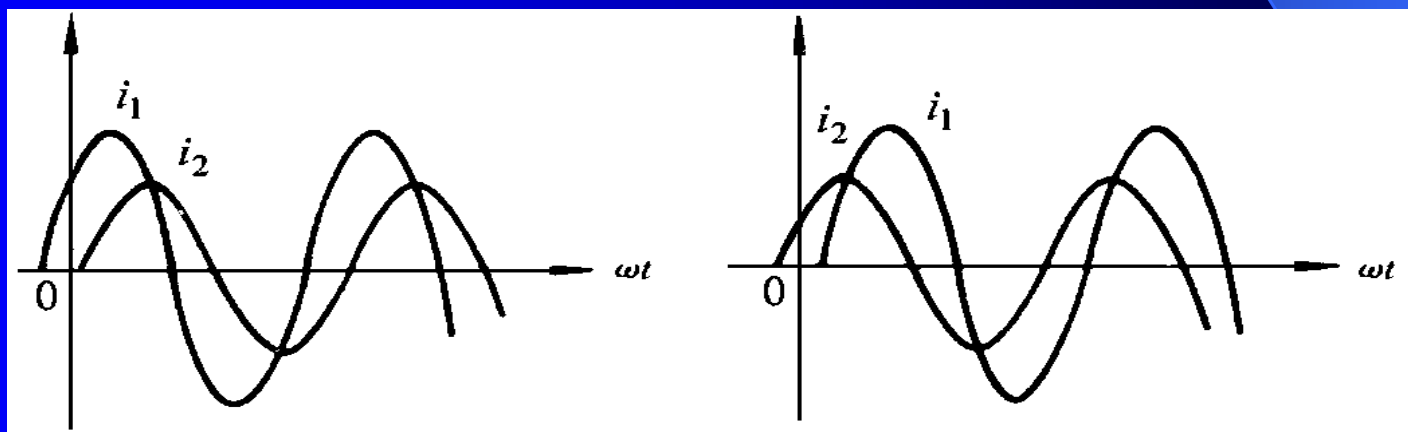


$\varphi > 0$

图10-3

$\varphi < 0$

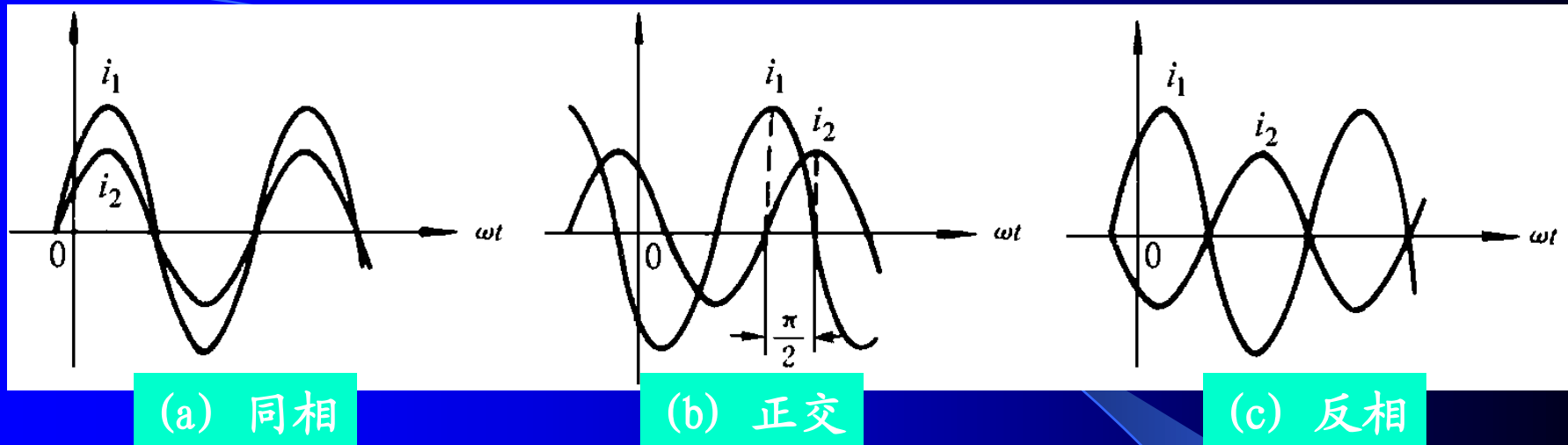
当  $\varphi = \psi_1 - \psi_2 > 0$  时，表明  $i_1(t)$  超前于电流  $i_2(t)$ ，超前的角度为  $\varphi$ ，超前的时间为  $\varphi/\omega$ 。当  $\varphi = \psi_1 - \psi_2 < 0$  时，表明  $i_1(t)$  滞后于电流  $i_2(t)$ ，滞后的角度为  $|\varphi|$ ，滞后的时间为  $|\varphi|/\omega$ 。图(a)表示电流  $i_1(t)$  超前于电流  $i_2(t)$  的情况，图(b)表示电流  $i_1(t)$  滞后于电流  $i_2(t)$  的情况。



电流  $i_1(t)$  超前于电流  $i_2(t)$

图 10-3

电流  $i_1(t)$  滞后于电流  $i_2(t)$



同频率正弦电压电流的相位差有几种特殊的情况。

1. **同相**:如果相位差 $\varphi = \psi_1 - \psi_2 = 0$ ,称电流 $i_1(t)$ 与电流 $i_2(t)$ 同相,如图(a)所示;

2. **正交**:如果相位差 $\varphi = \psi_1 - \psi_2 = \pm\pi/2$ ,称电流 $i_1(t)$ 与电流 $i_2(t)$ 正交,如图(b)所示,图中电流 $i_1(t)$ 超前电流 $i_2(t)$ 一个 $\pi/2$ 或 $90^\circ$ ;

3. **反相**:如果相位差 $\varphi = \psi_1 - \psi_2 = \pm\pi$ ,称电流 $i_1(t)$ 与电流 $i_2(t)$ 反相,如图(c)所示。

例10-2 已知正弦电压 $u(t)$ 和电流 $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ 的瞬时值表达式为

$$u(t) = 311 \cos(\omega t - 180^\circ) \text{ V}$$

$$i_1(t) = 5 \cos(\omega t - 45^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 10 \cos(\omega t + 60^\circ) \text{ A}$$

试求电压 $u(t)$ 与电流 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 的相位差。

$$u(t) = 311 \cos(\omega t - 180^\circ) \text{ V}$$

$$i_1(t) = 5 \cos(\omega t - 45^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 10 \cos(\omega t + 60^\circ) \text{ A}$$

解：电压  $u(t)$  与电流  $i_1(t)$  的相位差为

$$\varphi = (-180^\circ) - (-45^\circ) = -135^\circ$$

电压  $u(t)$  与电流  $i_2(t)$  的相位差为

$$\varphi = (-180^\circ) - 60^\circ = -240^\circ$$

习惯上将相位差的范围控制在  $-180^\circ$  到  $+180^\circ$  之间，我们不说电压  $u(t)$  与电流  $i_2(t)$  的相位差为  $-240^\circ$ ，而说电压  $u(t)$  与电流  $i_2(t)$  的相位差为  $(360^\circ - 240^\circ) = 120^\circ$ 。

### 三、正弦电压电流的相量表示

分析正弦稳态的有效方法是相量法，相量法的基础是用一个称为相量的向量或复数来表示正弦电压和电流。假设正弦电压为

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi)$$

利用它的振幅 $U_m$ 和初相 $\psi$ 来构成一个复数，复数的模表示电压的振幅，其幅角表示电压的初相，即

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi} = U_m \angle \psi$$

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi} = U_m \angle \psi$$

它在复数平面上可以用一个有向线段来表示，如图所示。这种用来表示正弦电压和电流的复数，称为相量。

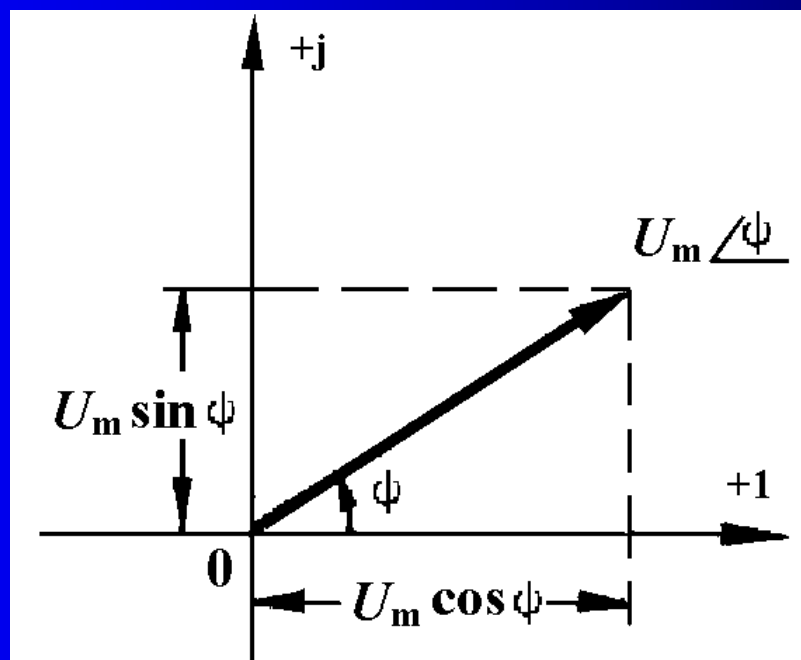


图10-5



设想电压相量以角速度 $\omega$ 沿反时针方向旋转，它在

实轴投影为

$U_m \cos(\omega t + \psi)$ ,

在虚轴上投影

为  $U_m \sin(\omega t + \psi)$ ,

它们都是时间

的正弦函数，

如图所示。

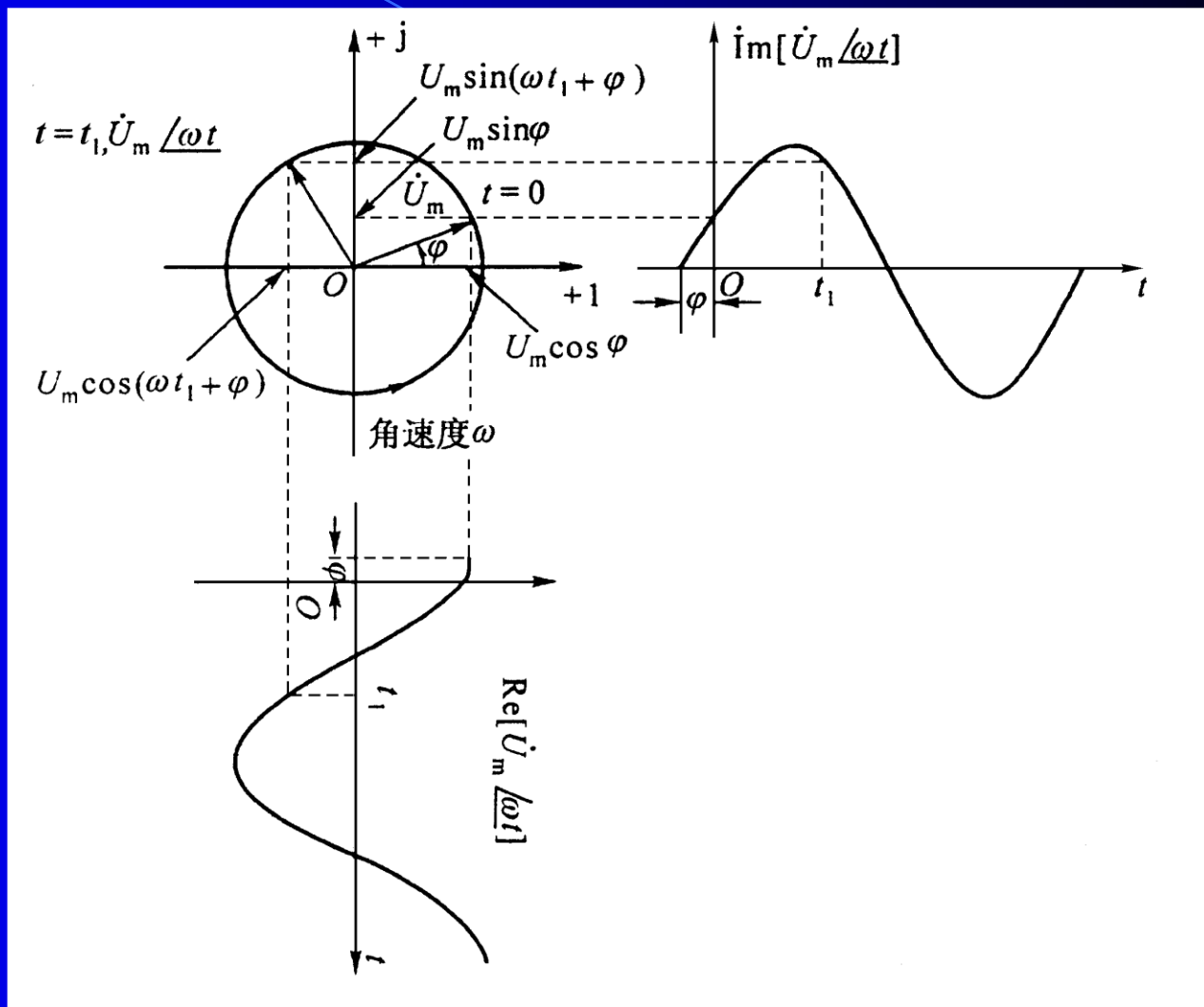


图10-6 旋转相量及其在实轴和虚轴上的投影

将电压相量

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\phi}$$

与旋转因子

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

相乘可以得到以下数学表达式

$$\begin{aligned} \dot{U}_m e^{j\omega t} &= U_m e^{j(\omega t + \psi)} \\ &= U_m \cos(\omega t + \psi) + j U_m \sin(\omega t + \psi) \end{aligned}$$

上式表明正弦电压与电压相量之间的关系为

$$\operatorname{Re}[\dot{U}_m e^{j\omega t}] = U_m \cos(\omega t + \psi)$$

$$\operatorname{Im}[\dot{U}_m e^{j\omega t}] = U_m \sin(\omega t + \psi)$$

由此可得

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos(\omega t + \psi) \\ &= \operatorname{Re}(\dot{U}_m e^{j\omega t}) \end{aligned}$$

由上述可见，一个随时间按正弦规律变化的电压和电流，可以用一个称为相量的复数来表示。已知正弦电压电流的瞬时值表达式，可以得到相应的电压电流相量。反过来，已知电压电流相量，也能够写出正弦电压电流的瞬时值表达式。即

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u) \xleftrightarrow{\omega} \dot{U}_m = U_m \angle \psi_u$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i) \xleftrightarrow{\omega} \dot{I}_m = I_m \angle \psi_i$$

例10-3 已知正弦电流 $i_1(t)=5\cos(314t+60^\circ)\text{A}$ ,

$$i_2(t)=-10\sin(314t+60^\circ)\text{A}。$$

写出这两个正弦电流的电流相量，画出相量图，并求出 $i(t)=i_1(t)+i_2(t)$ 。

解：根据以下关系

$$\begin{aligned}i_1(t) &= 5\cos(314t+60^\circ)\text{A} \\ &= \text{Re}[5e^{j60^\circ}e^{j314t}]\text{A} = \text{Re}[\dot{I}_{1m}e^{j314t}]\text{A}\end{aligned}$$

得到表示正弦电流 $i_1(t)=5\cos(314t+60^\circ)\text{A}$ 的相量为

$$\dot{I}_{1m} = 5e^{j60^\circ} \text{A} = 5\angle 60^\circ \text{A}$$

正弦电流与其电流相量的关系可以简单表示为

$$i_1(t) = 5\cos(314t + 60^\circ)\text{A} \longrightarrow \dot{I}_{1m} = 5e^{j60^\circ}\text{A} = 5\angle 60^\circ\text{A}$$

与此相似，对于正弦电流 $i_2(t) = -10\sin(314t + 60^\circ)\text{A}$ 可以得到以下结果

三角公式  $\sin x = \cos(x - 90^\circ)$

$$\begin{aligned} i_2(t) &= -10\sin(314t + 60^\circ)\text{A} \\ &= -10\cos(314t + 60^\circ - 90^\circ)\text{A} \\ &= 10\cos(314t - 30^\circ + 180^\circ)\text{A} \longrightarrow \dot{I}_{2m} = 10\angle 150^\circ\text{A} \end{aligned}$$

注意：今后在用相量法分析电路时，应该将各正弦电压电流的瞬时表达式全部用余弦函数(正弦函数)表示。

将各电流相量  $\dot{I}_{1m} = 5 \angle 60^\circ \text{ A}$  和  $\dot{I}_{2m} = 10 \angle 150^\circ \text{ A}$  画在一个复数平面上，就得到相量图，从相量图上容易看出各正弦电压电流的相位关系。

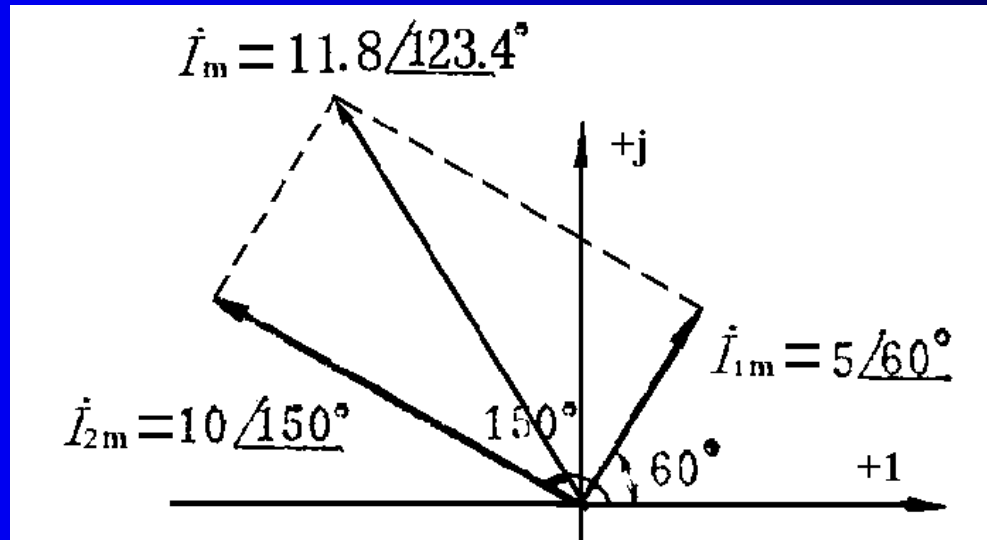


图 10-7

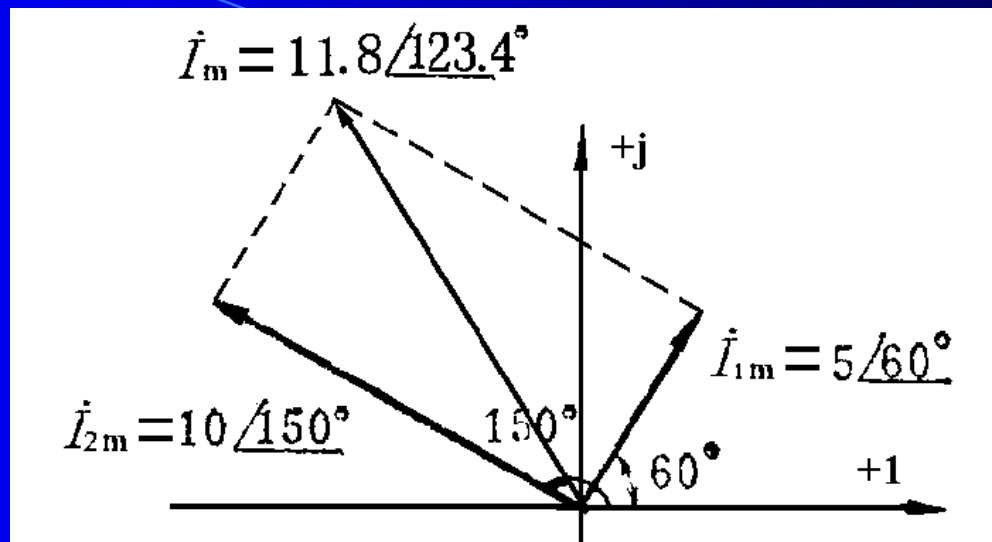


图 10-7

相量图的另外一个好处是可以利用向量和复数的运算法则求得几个同频率正弦电压或电流之和。

例如用向量运算的平行四边形作图法可以得到电流相量，从而知道电流  $i(t) = I_m \cos(314t + \psi)$  的振幅大约为 12A，初相大约为  $124^\circ$ 。作图法的优点是简单直观，但不精确。



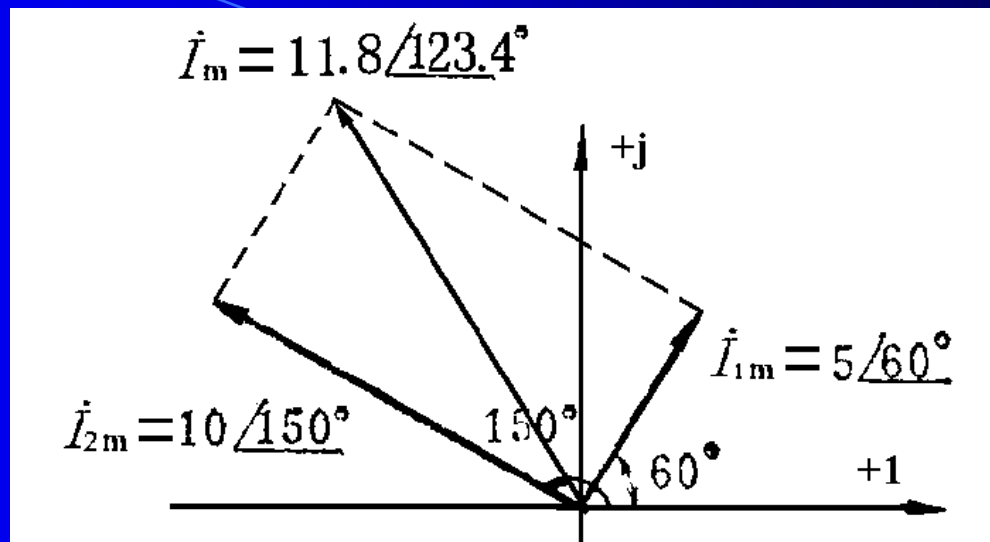


图 10-7

采用复数运算可以得到更精确的结果

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_m &= \dot{I}_{1m} + \dot{I}_{2m} = 5 \angle 60^\circ + 10 \angle 150^\circ \\
 &= (2.5 + j4.33) + (-8.66 + j5) \\
 &= (-6.16 + j9.33) \\
 &= 11.8 \angle 123.4^\circ \text{ A}
 \end{aligned}$$

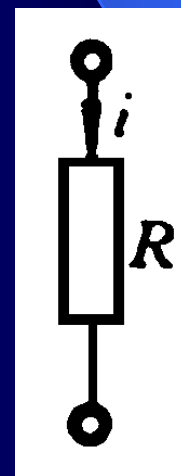
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = I_m \cos(314t + \psi) = 11.8 \cos(314t + 123.4^\circ) \text{ A}$$

## 四、正弦电压、电流的有效值

现在将直流电流 $I$ 和正弦电流 $i(t)$ 通过电阻 $R$ 时的能量作一比较，由此导出正弦电压电流的有效值，它是一个十分有用的量。

直流电流 $I$ 和正弦电流 $i(t)=I_m \cos(\omega t + \psi)$ 通过同一电阻 $R$ ，令它们在时间 $T$ 内获得的能量相等

$$W = I^2 RT = \int_0^T i^2(t) R dt$$



由此解得

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \quad (10-4)$$

用此式计算出正弦电流  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$  的方均根值，称为**正弦电流的有效值**。具体计算如下

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \psi) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega t + 2\psi)] dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 I_m \quad (10-5) \end{aligned}$$

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

计算结果表明，振幅为 $I_m$ 的正弦电流与数值为 $I=0.707I_m$ 的直流电流，在一个周期内，对电阻 $R$ 提供相同的能量。也就是说正弦电压电流的有效值为振幅值的0.707倍，或者说正弦电压电流的振幅是其有效值的 $\sqrt{2}$ 倍。

与此相似，正弦电压 $u(t)=U_m \cos(\omega t+\psi)$ 的有效值为

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \\ &= \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0.707U_m \end{aligned} \quad (10-6)$$

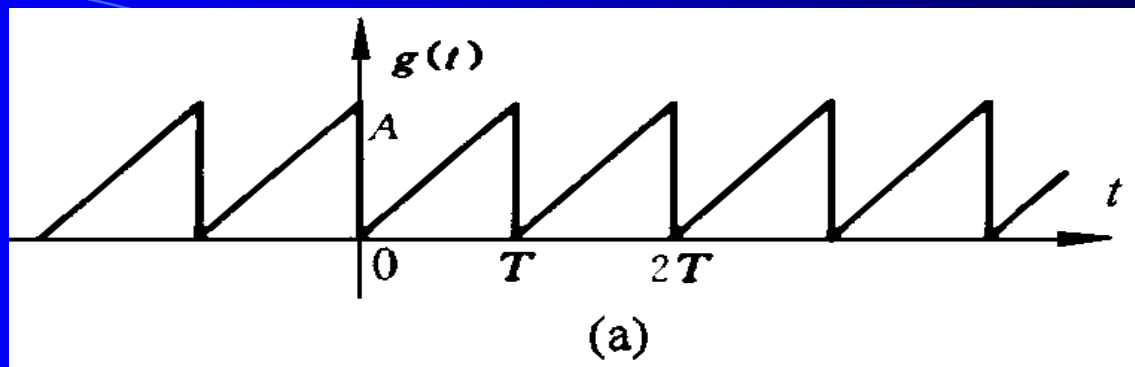
有效值的概念在电力工程上非常有用，常用的交流电压表和电流表都是用有效值来进行刻度的，当我们用交流电压表或普通万用表测量正弦电压的读数为220V时，是指该电压的有效值为220V，其振幅值为

$$\sqrt{2} \times 220\text{V} = 311\text{V}$$

由于正弦电压电流的振幅值与有效值间存在  $\sqrt{2}$  的关系，今后除了使用前面介绍的振幅相量  $\dot{U}_m = U_m \angle \phi_u$  和  $\dot{I}_m = I_m \angle \phi_i$  外，更多使用的是有效值相量  $\dot{U} = U \angle \psi_u$  和  $\dot{I} = I \angle \psi_i$ 。正弦时间函数与有效值相量之间的关系如下：

$$u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \psi_u) \longleftrightarrow \dot{U} = U \angle \psi_u$$

$$i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \psi_i) \longleftrightarrow \dot{I} = I \angle \psi_i$$



有效值的概念也适用于任何周期性电压和电流。例如对于图10-8(a)所示三角波形，将瞬时值表达式

$$g(t) = \frac{A}{T}t$$

代入式(10-4)中

$$G = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T g^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{A}{T}t\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{A^2}{T^2} \cdot \frac{1}{3} (t^3) \Big|_0^T} = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

计算结果表明该三角波形的有效值是振幅值的  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  倍，或者说其振幅值是有效值的  $\sqrt{3}$  倍。

$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

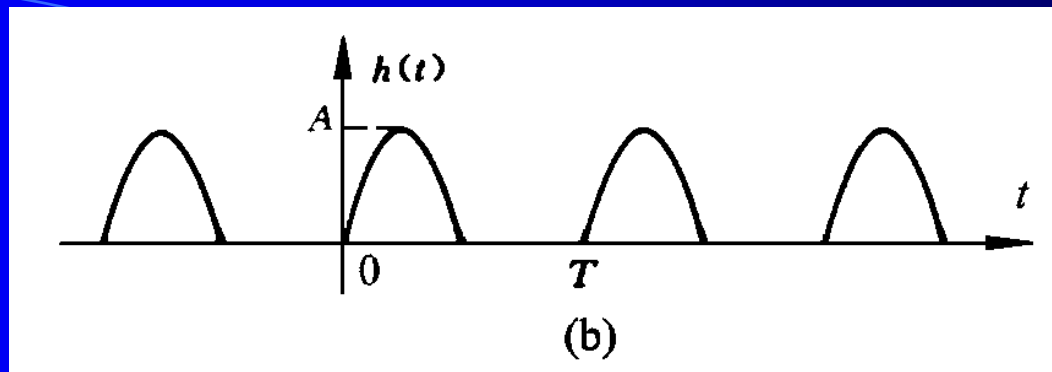


图 10-8

对于图(b)所示半波整流波形，将其瞬时值表达式

$$h(t) = A \sin \omega t \quad (0 < t < T/2)$$

代入式(10-4)中，可以得到半波整流波形的有效值是振幅值的0.5倍，或者说其振幅值是有效值的2倍的结论，具体计算过程如下：

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T h^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} A^2 \sin^2 \omega t dt} \\ &= \sqrt{\frac{A^2}{T} \int_0^{T/2} \frac{1}{2} [1 - \cos 2\omega t] dt} = \frac{A}{2} = 0.5A \end{aligned}$$

## § 10-2 正弦稳态响应

### 一、正弦电流激励的RC电路分析

我们现在讨论图10-9所示RC电路，电路原来已经达到稳定状态，在 $t=0$ 时刻断开开关，正弦电流 $i_S(t)=I_{Sm}\cos(\omega t+\psi_i)$ 作用于RC电路，求电容电压 $u_C(t)$ 的响应。

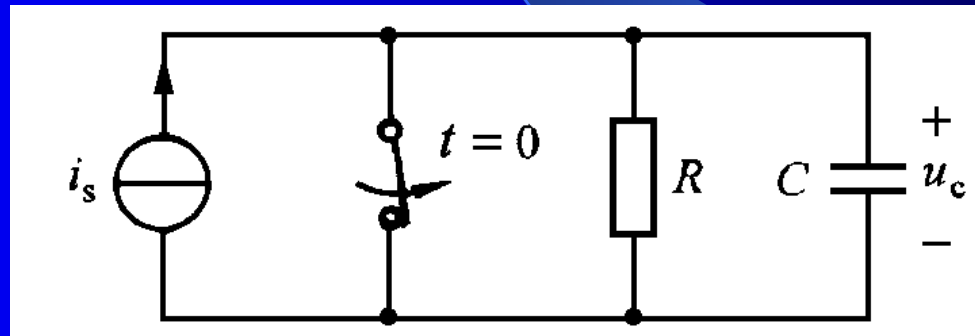
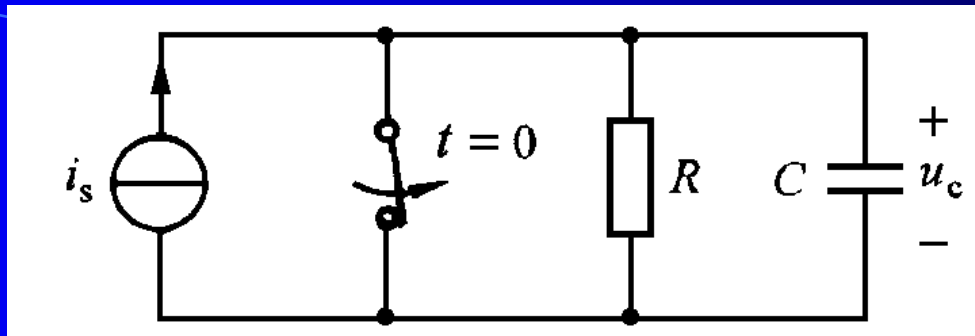


图 10-9





首先建立 $t > 0$ 电路的微分方程如下:

$$C \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{R} u_c = I_{Sm} \cos(\omega t + \psi_i) \quad t \geq 0 \quad (10-7)$$

对应齐次微分方程的通解 $u_{Ch}(t)$ 为

$$u_{Ch}(t) = Ke^{st} = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

微分方程特解 $u_{Cp}(t)$ 的形式与电流源相同, 为同一频率的正弦时间函数, 即

$$u_{Cp}(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \psi_u)$$

$$u_{Cp}(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \psi_u)$$

为了确定 $U_{Cm}$ 和 $\psi_u$ ，可以将上式代入微分方程中

$$C \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{R} u_c = I_{Sm} \cos(\omega t + \psi_i) \quad t \geq 0 \quad (10-7)$$

$$-\omega C U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_u) + \frac{1}{R} U_{Cm} \cos(\omega t + \psi_u) = I_{Sm} \cos(\omega t + \psi_i)$$

求解得到

$$U_{Cm} = \frac{I_{Sm}}{\sqrt{\omega^2 C^2 + (1/R)^2}} \quad (10-8)$$

$$\psi_u = \psi_i - \arctan(\omega CR) \quad (10-9)$$

微分方程的完全解为

$$u_C(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} + U_{Cm} \cos(\omega t + \psi_u) \quad (t \geq 0) \quad (10-10)$$

可以求得

$$K = u_C(0) - U_{Cm} \cos \psi_u$$

最后得到电容电压 $u_C(t)$ 的全响应为

$$u_C(t) = \underbrace{[u_C(0) - U_{Cm} \cos \psi_u] \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{暂态响应}} + \underbrace{U_{Cm} \cos(\omega t + \psi_u)}_{\text{正弦稳态响应}} \quad (t \geq 0) \quad (10-11)$$

本电路的初始条件为零，属于零状态响应，所画出的波形如图所示。曲线1表示通解，它是电路的自由响应，当 $RC > 0$ 的条件下，它将随着时间的增加而按指数规律衰减到零，称为暂态响应。曲线2表示特解，它按照正弦规律变化，其角频率与激励电源的角频率相同，当暂态响应衰减完后，它就是电路的全部响应，称为正弦稳态响应。

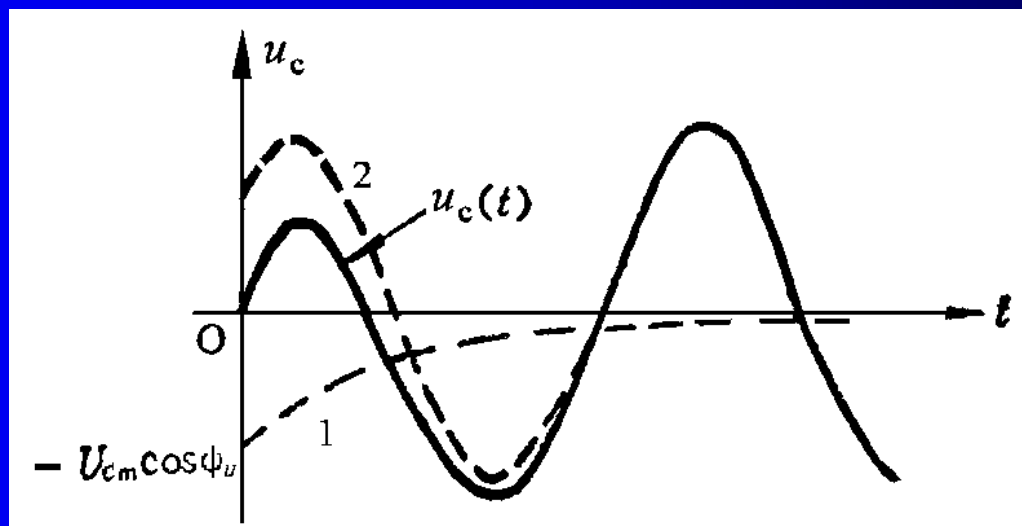


图 10-10

## 二、用相量法求微分方程的特解

求解正弦电流激励电路全响应的关键是求微分方程的特解。假如能用相量来表示正弦电压电流，就可以将常数微分方程转变为复系数的代数方程，便于使用各种计算工具。现将这种相量法介绍如下：

$$i_S(t) = I_{Sm} \cos(\omega t + \psi_i) = \operatorname{Re}(\dot{I}_{Sm} e^{j\omega t})$$

$$u_{Cp}(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \psi_u) = \operatorname{Re}(\dot{U}_{Cm} e^{j\omega t})$$

代入微分方程

$$C \frac{d}{dt} [\operatorname{Re}(\dot{U}_{Cm} e^{j\omega t})] + \frac{1}{R} \operatorname{Re}(\dot{U}_{Cm} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\dot{I}_{Sm} e^{j\omega t})$$

## 取实部与微分运算的次序交换

$$\operatorname{Re}[(j\omega C \dot{U}_{Cm} e^{j\omega t})] + \frac{1}{R} \operatorname{Re}(\dot{U}_{Cm} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\dot{I}_{Sm} e^{j\omega t})$$

$$\operatorname{Re}[(j\omega C + \frac{1}{R}) \dot{U}_{Cm} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}(\dot{I}_{Sm} e^{j\omega t})$$

由于方程在任何时刻相等，其方程的复数部分应该相等，由此得到一个复系数的代数方程

$$(j\omega C + \frac{1}{R}) \dot{U}_{Cm} = \dot{I}_{Sm} \quad (10-12)$$

求解此代数方程得到电容电压相量为

$$\dot{U}_{Cm} = \frac{\dot{I}_{Sm}}{j\omega C + 1/R} = U_{Cm} \angle \psi_u$$

电容电压的振幅和初相分别为

$$U_{Cm} = \frac{I_{Sm}}{\sqrt{\omega^2 C^2 + (1/R)^2}}$$

$$\psi_u = \psi_i - \arctan(\omega CR)$$

这与式(10-8)和(10-9)完全相同。计算出电容电压的振幅和初相，就能够写出稳态响应

$$u_{Cp}(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \psi_u)$$

从以上叙述可知，用相量表示正弦电压电流后，可将微分方程转换为复系数代数方程，求解此方程得到特解的相量后，易于写出正弦稳态响应的瞬时值表达式。

我们可以将以上求特解的方法推广到一般情况，对于由正弦信号激励的任意线性时不变动态电路，先写出 $n$ 阶常系数微分电路，再用相量表示同频率的各正弦电压电流，将微分方程转变为复系数代数方程，再求解代数方程得到电压电流相量，就能写出特解的瞬时值表达式。



例10-4 图10-9所示电路中，已知 $R=1\Omega$ ,  $C=2F$ ,  
 $i_s(t)=2\cos(3t+45^\circ)\text{A}$ , 试用相量法求解电容电压 $u_C(t)$   
的特解。

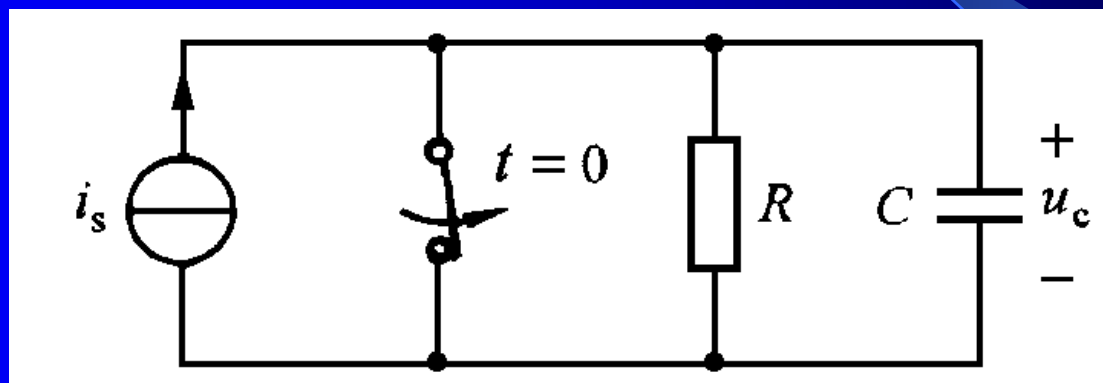


图 10-9

解：写出电路的微分方程

$$2\frac{du_C}{dt} + u_C = 2\cos(3t + 45^\circ)$$

$$2 \frac{du_C}{dt} + u_C = 2 \cos(3t + 45^\circ)$$

将正弦电流用相量表示

$$i_S(t) = 2 \cos(3t + 45^\circ) = \operatorname{Re}(2e^{j45^\circ} e^{j3t})$$

$$u_{Cp}(t) = U_{Cm} \cos(3t + \psi_u) = \operatorname{Re}(\dot{U}_{Cm} e^{j3t})$$

代入微分方程中

$$\operatorname{Re}[(j3 \times 2 + 1)\dot{U}_{Cm} e^{j3t}] = \operatorname{Re}(2e^{j45^\circ} e^{j3t})$$

可以得到复系数代数方程

$$(j6 + 1)\dot{U}_{Cm} = 2 \angle 45^\circ$$

$$(j6 + 1)\dot{U}_{Cm} = 2\angle 45^\circ$$

求解此代数方程得到电容电压相量

$$\dot{U}_{Cm} = \frac{2\angle 45^\circ}{(1 + j6)} = \frac{2\angle 45^\circ}{6.08\angle 80.54^\circ} = 0.329\angle -35.5^\circ \text{ V}$$

由此得到电容电压的瞬时值表达式

$$u_{Cp}(t) = 0.329\cos(3t - 35.5^\circ) \text{ V}$$

这是图10-9所示电路中电容电压 $u_C(t)$ 的特解，也是电容电压的正弦稳态响应。

例10-5 图10-11所示RLC串联电路中，已知

$$u_s(t) = 2\cos(2t + 30^\circ)\text{V}, R = 1\Omega, L = 1\text{H}, C = 0.5\text{F}.$$

试用相量法求电容电压 $u_C(t)$ 和电感电流 $i_L(t)$ 的特解。

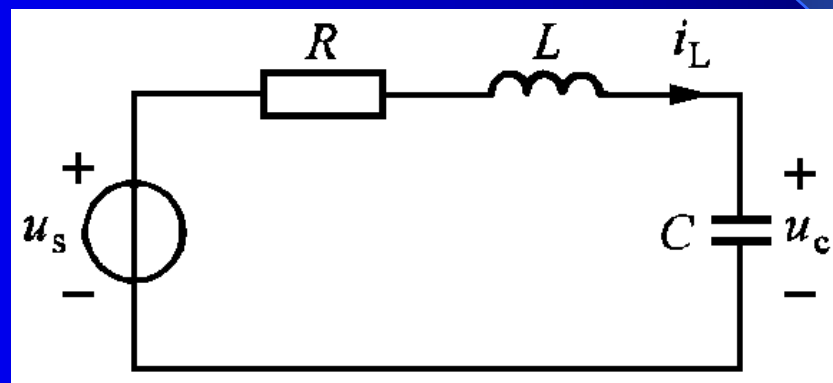


图 10-11

解：以电容电压为变量列出电路的微分方程

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u_s$$

将方程中的 $u_s(t)=2\cos(2t+30^\circ)\text{V}$ 和 $u_c(t)$ 用相量表示

$$LC \frac{d^2}{dt^2} [\text{Re}(\dot{U}_{Cm} e^{j\omega t})] + RC \frac{d}{dt} [\text{Re}(\dot{U}_{Cm} e^{j\omega t})] + \text{Re}(\dot{U}_{Cm} e^{j\omega t}) \\ = \text{Re}(\dot{U}_{Sm} e^{j\omega t})$$

对方程先求导，再取实部

$$LC \text{Re}[(j\omega)^2 \dot{U}_{Cm} e^{j\omega t}] + RC \text{Re}[(j\omega) \dot{U}_{Cm} e^{j\omega t}] + \text{Re}(\dot{U}_{Cm} e^{j\omega t}) \\ = \text{Re}(\dot{U}_{Sm} e^{j\omega t})$$

得到复系数代数方程为

$$LC(j\omega)^2 \dot{U}_{Cm} + RC(j\omega) \dot{U}_{Cm} + \dot{U}_{Cm} = \dot{U}_{Sm}$$

代入 $R=1\Omega$ ,  $L=1\text{H}$ ,  $C=0.5\text{F}$ 得到

$$[0.5(j\omega)^2 + 0.5(j\omega) + 1]\dot{U}_{\text{Cm}} = 2\angle 30^\circ \text{ V}$$

求解代数方程，注意到 $\omega=2\text{rad/s}$ 和 $j^2=-1$ ，得到电容电压相量

$$\dot{U}_{\text{Cm}} = \frac{2\angle 30^\circ}{[0.5(j\omega)^2 + 0.5(j\omega) + 1]} = \frac{2\angle 30^\circ}{-1 + j1} = \sqrt{2}\angle -105^\circ \text{ V}$$

根据 $\omega=2\text{rad/s}$ 得到电容电压的瞬时值表达式

$$u_{\text{C}}(t) = \sqrt{2} \cos(2t - 105^\circ) \text{ V}$$

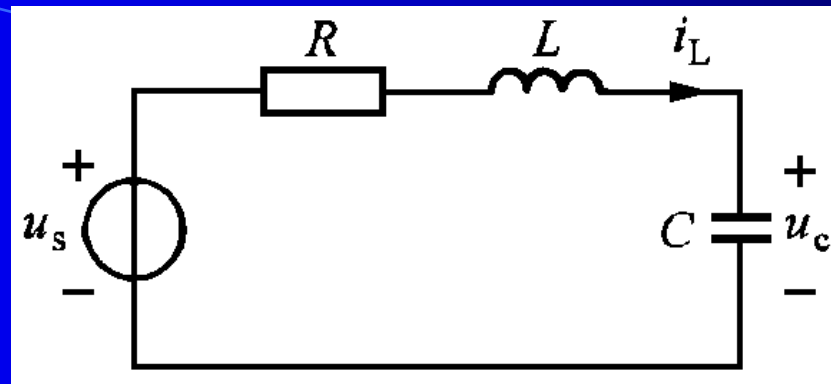


图 10-11

$$u_C(t) = \sqrt{2} \cos(2t - 105^\circ) \text{V}$$

求得电容电流和电感电流的瞬时值表达式

$$i_L(t) = i_C(t) = 0.5 \frac{d}{dt} [\sqrt{2} \cos(2t - 105^\circ)] = \sqrt{2} \cos(2t - 15^\circ) \text{A}$$

由于此二阶电路的两个固有频率都具有负实部，暂态响应将随着时间的增加而衰减到零，以上计算的电容电压和电感电流的特解，也就是电路的正弦稳态响应。

### 三、正弦稳态响应

现在将上面的讨论推广到一般动态电路。具有相同频率 $\omega$ 的一个或几个正弦信号激励的线性时不变动态电路，我们感兴趣的响应为 $x(t)$ ，则 $x(t)$ 可表为如下形式：

$$\begin{aligned}x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ &= K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \cdots + K_n e^{s_n t} + X_m \cos(\omega t + \psi) \quad (10-13)\end{aligned}$$

$s_1$ 、 $s_2$ 、 $\dots$ 、 $s_n$ 是 $n$ 阶动态电路的固有频率。如果全部固有频率具有负实部(即处于左半开复平面上)，则对于任何初始条件，在具有相同频率 $\omega$ 的正弦电压源和电流源激励下，电路中全部电压和全部电流随着 $t \rightarrow \infty$ 将按指数规律趋于相同频率 $\omega$ 的正弦波形。当这种情况发生时，称电路处于正弦稳态。



相量法求微分方程特解的方法与步骤如下：

1. 用KCL，KVL和VCR写出电路方程(例如2b方程，网孔方程，结点方程等)，以感兴趣的电压电流为变量，写出 $n$ 阶微分方程。

2. 用相量表示同一频率的各正弦电压电流，将 $n$ 阶微分方程转换为复系数代数方程。

3. 求解复系数代数方程得到所感兴趣电压或电流的相量表达式。

4. 根据所得到的相量，写出正弦电压或电流的瞬时值表达式。

以上步骤中，列出以某个电压或电流为变量的 $n$ 阶微分方程，并将它转换为复系数代数方程是最困难工作，电路越复杂，工作量越大。

为此，我们可以先画出电路的相量模型，用相量形式的KCL、KVL和元件VCR直接列出复数的电路方程。

用相量法求解电路正弦稳态响应的方法和步骤如下：

1. 画出电路的相量模型，用相量形式的KCL，KVL和VCR直接列出电路的复系数代数方程。

2. 求解复系数代数方程得到所感兴趣的各个电压和电流的相量表达式。

3. 根据所得到的各个相量，写出相应的电压和电流的瞬时值表达式。

用相量法分析正弦稳态响应的优点有：

1. 不需要列出并求解电路的 $n$ 阶微分方程。
2. 可以用分析电阻电路的各种方法和类似公式来分析正弦稳态电路。
3. 读者采用所熟悉的求解线性代数方程的方法，就能求得正弦电压电流的相量以及它们的瞬时值表达式。
4. 便于读者使用计算器和计算机等计算工具来辅助电路分析。

## § 10-3 基尔霍夫定律的相量形式

### 一、基尔霍夫电流定律的相量形式

基尔霍夫电流定律(KCL)叙述为：对于任何集中参数电路中的任一结点，在任何时刻，流出该结点的全部支路电流的代数和等于零。其数学表达式为

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0$$

假设电路中全部电流都是相同频率 $\omega$ 的正弦电流，则可以将它们用振幅相量或有效值相量表示为以下形式

$$i_k(t) = \operatorname{Re}[I_{km} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\sqrt{2}I_k e^{j\omega t}]$$

代入KCL方程中得到

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}[I_{km} e^{j\omega t}] = 0 \quad \sum_{k=1}^n i_k(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}[\sqrt{2}I_k e^{j\omega t}] = 0$$

由于上式适用于任何时刻 $t$ ，其相量关系也必须成立，

即

$$\sum_{k=1}^n I_{km} = 0$$

(10-14)

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

(10-15)

相量形式的KCL定律表示对于具有相同频率的正弦电路中的任一结点，流出该结点的全部支路电流相量的代数和等于零。在列写相量形式KCL方程时，对于参考方向流出结点的电流取“+”号，流入结点的电流取“-”号。

特别注意的是

$$\sum_{k=1}^n I_{km} \neq 0$$

$$\sum_{k=1}^n I_k \neq 0$$

例10-6 电路如图10-12(a)所示,已知

$$i_1(t) = 10\sqrt{2} \cos(\omega t + 60^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 5\sqrt{2} \sin \omega t \text{ A}$$

试求电流*i(t)*及其有效值相量。

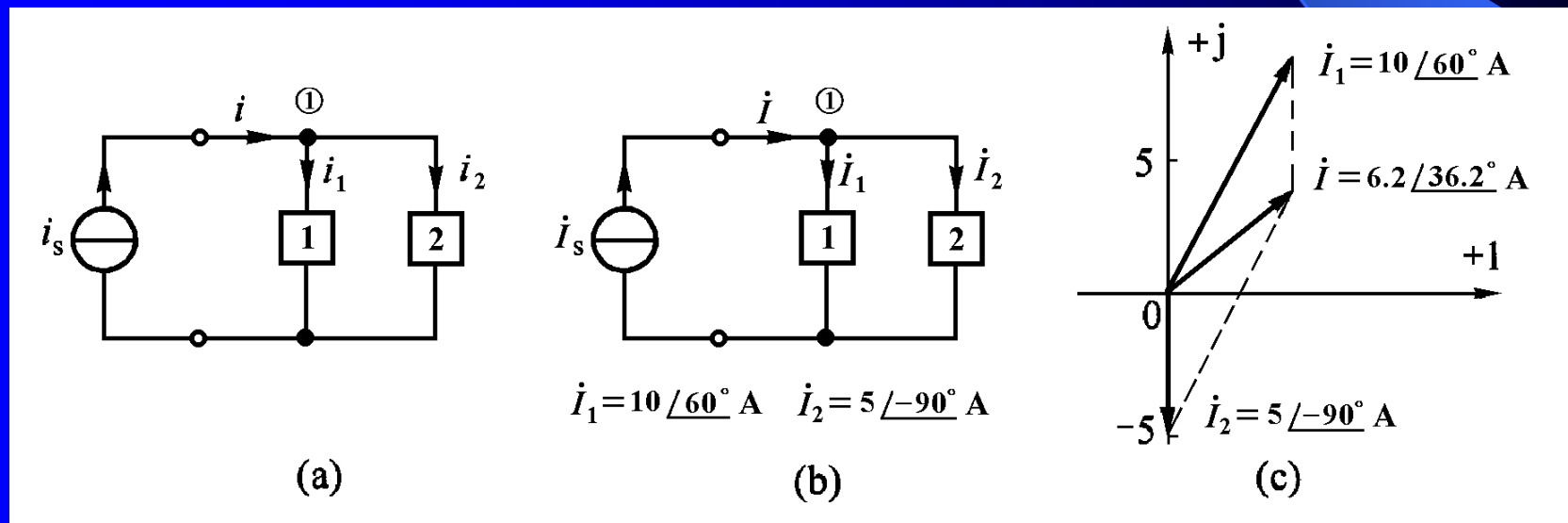
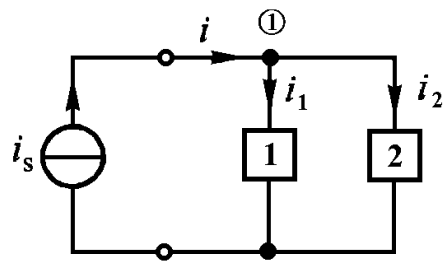
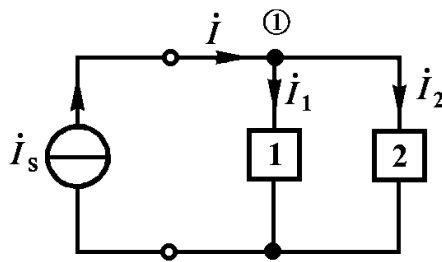


图 10-12



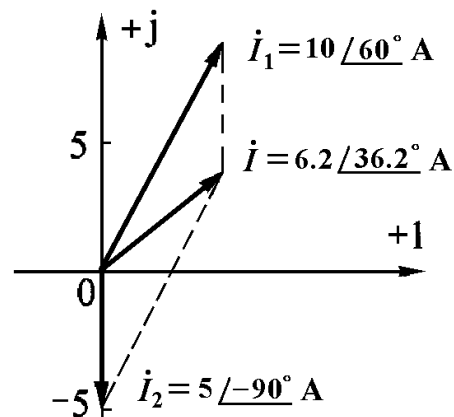


(a)



$$\dot{I}_1 = 10 \angle 60^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_2 = 5 \angle -90^\circ \text{ A}$$

(b)



(c)

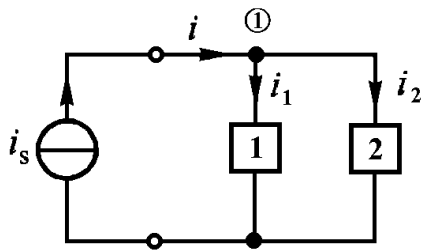
解：根据图(a)所示电路的时域模型，画出图(b)所示的相量模型，图中各电流参考方向均与时域模型相同，仅将时域模型中各电流符号  $i_s$ 、 $i$ 、 $i_1$ 、 $i_2$  用相应的相量符号  $\dot{I}_s$ 、 $\dot{I}$ 、 $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$  表示，并计算出电流相量。

$$\dot{I}_1 = 10 \angle 60^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_2 = 5 \angle -90^\circ \text{ A}$$

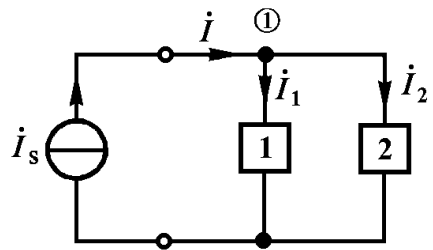
列出图(b)相量模型中结点1的KCL方程，其相量形式

为

$$-\dot{I} + \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0$$

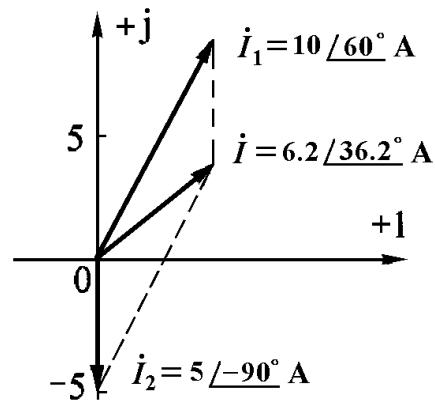


(a)



$$\dot{I}_1 = 10 \angle 60^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_2 = 5 \angle -90^\circ \text{ A}$$

(b)



(c)

由此可得

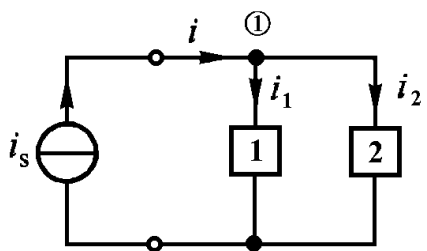
$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 10 \angle 60^\circ + 5 \angle -90^\circ \\ &= 5 + j8.66 - j5 = 5 + j3.66 = 6.2 \angle 36.2^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

写出相应的电流瞬时值表达式

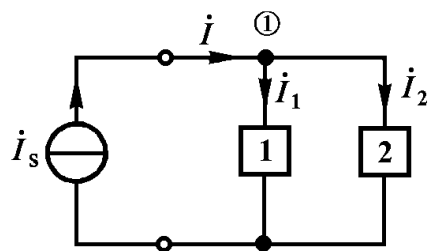
$$i(t) = 6.2\sqrt{2} \cos(\omega t + 36.2^\circ) \text{ A}$$

值得特别提出的是在正弦电流电路中流出任一结点的全部电流有效值之代数和并不一定等于零，例如本题中的

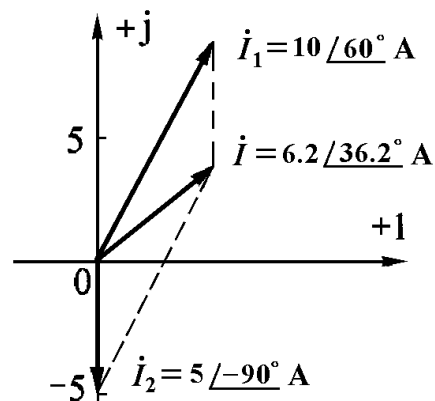
$$I = 6.2 \neq I_1 + I_2 = 10 + 5 = 15。$$



(a)



(b)



(c)

本题也可以用作图的方法求解。在复数平面上，画出已知的电流相量，再用向量运算的平行四边形法则，求得电流相量，如图(c)所示。相量图简单直观，虽然不够精确，还是可以用来检验复数计算的结果是否基本正确。

从相量图上容易看出电流*i*超前于电流*i*<sub>2</sub>，超前的角度为 $36.2^\circ + 90^\circ = 126.2^\circ$ 。

容易看出  $I = 6.2 \neq I_1 + I_2 = 10 + 5 = 15$  即

$$\sum_{k=1}^n I_k \neq 0$$

## 二、基尔霍夫电压定律的相量形式

基尔霍夫电压定律(KVL)叙述为：对于任何集中参数电路中的任一回路，在任何时刻，沿该回路全部支路电压代数和等于零。其数学表达式为

$$\sum_{k=1}^n u_k(t) = 0$$

假设电路中全部电压都是相同频率 $\omega$ 的正弦电压，则可以将它们用有效值相量表示如下：

$$u_k(t) = \operatorname{Re}[\dot{U}_{km} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\sqrt{2}\dot{U}_k e^{j\omega t}]$$

代入KVL方程中得到

$$\sum_{k=1}^n u_k(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}[\dot{U}_{km} e^{j\omega t}] = 0$$

$$\sum_{k=1}^n u_k(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}[\sqrt{2}\dot{U}_k e^{j\omega t}] = 0$$

由于上式适用于任何时刻 $t$ ，其相量关系也必须成立，

即

$$\sum_{k=1}^n \dot{U}_{km} = 0 \quad (10-16)$$

$$\sum_{k=1}^n \dot{U}_k = 0 \quad (10-17)$$

这就是相量形式的KVL定律，它表示对于具有相同频率的正弦电流电路中的任一回路，沿该回路全部支路电压相量的代数和等于零。在列写相量形式KVL方程时，对于参考方向与回路绕行方向相同的电压取“+”号，相反的电压取“-”号。

值得特别注意的是沿任一回路全部支路电压振幅(或有效值)的代数和并不一定等于零，即一般来说

$$\sum_{k=1}^n U_{km} \neq 0$$

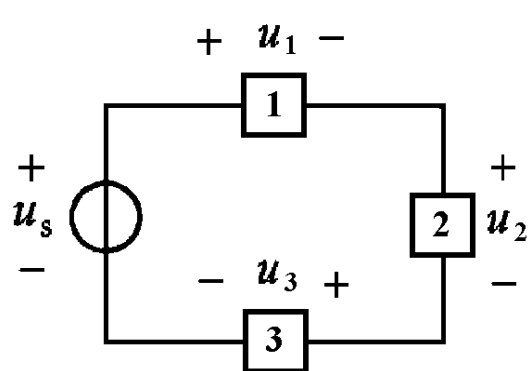
$$\sum_{k=1}^n U_k \neq 0$$

例10-7 电路如图10-13(a)所示，试求电压源电压 $u_s(t)$ 和相应的电压相量，并画出相量图。已知

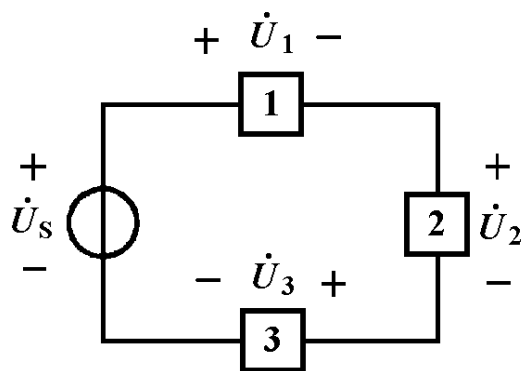
$$u_1(t) = -6\sqrt{2} \cos \omega t \text{ V}$$

$$u_2(t) = 8\sqrt{2} \cos(\omega t + 90^\circ) \text{ V}$$

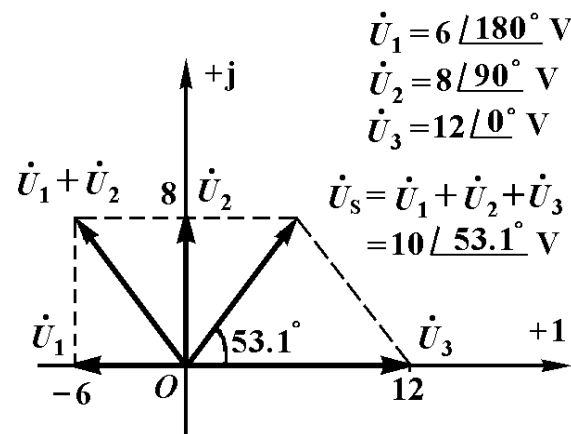
$$u_3(t) = 12\sqrt{2} \cos \omega t \text{ V}$$



(a)



(b)



(c)

图 10-13

$$u_1(t) = -6\sqrt{2} \cos \omega t \text{ V}$$

$$u_2(t) = 8\sqrt{2} \cos(\omega t + 90^\circ) \text{ V}$$

$$u_3(t) = 12\sqrt{2} \cos \omega t \text{ V}$$

解：根据图(a)所示电路的时域模型，画出图(b)所示的相量模型，并计算出电压相量。

$$\dot{U}_1 = 6 \angle -180^\circ \text{ V}$$

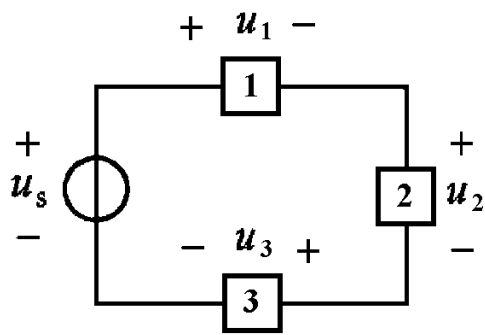
$$\dot{U}_2 = 8 \angle 90^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_3 = 12 \angle 0^\circ \text{ V}$$

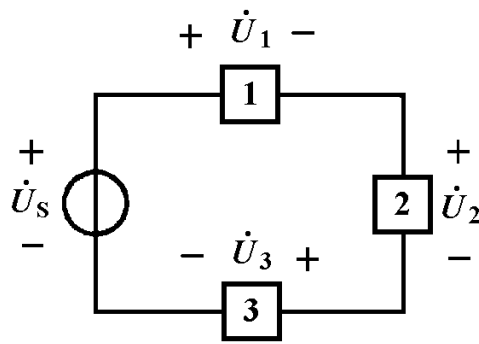
对于图(b)相量模型中的回路，以顺时针为绕行方向，列出的相量形式KVL方程

$$-\dot{U}_s + \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = 0$$

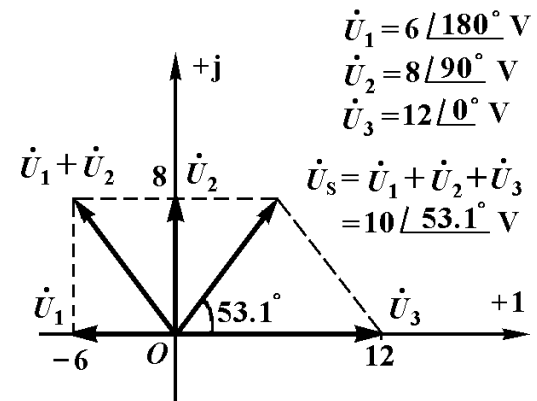




(a)



(b)



(c)

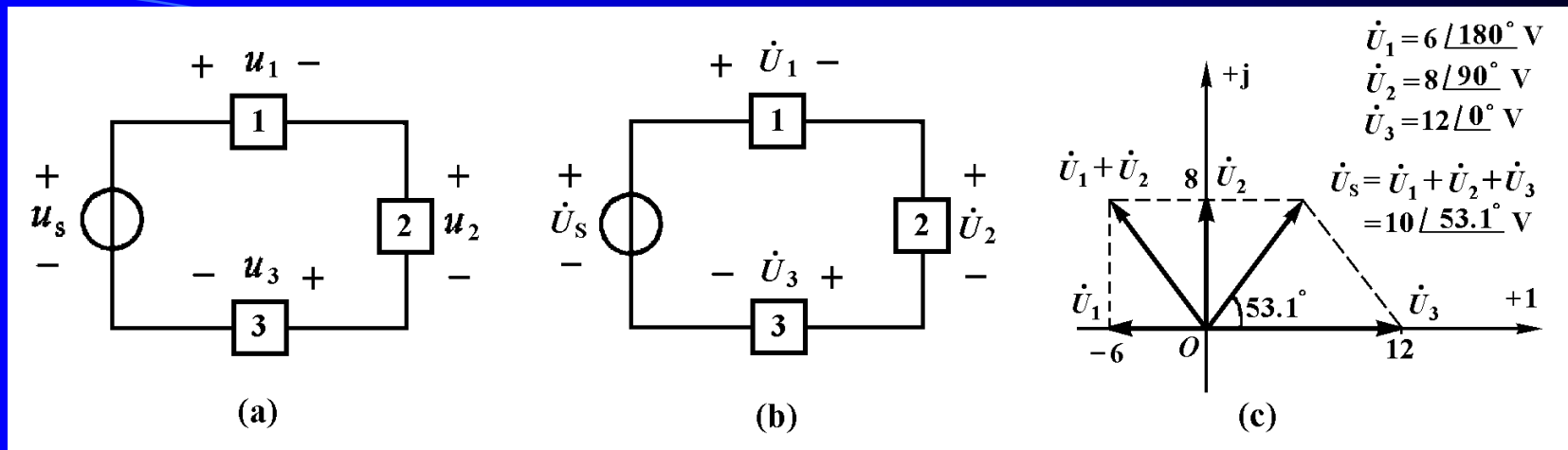
由此可求得

$$\begin{aligned}\dot{U}_s &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_2 = 6\angle 180^\circ + 8\angle 90^\circ + 12\angle 0^\circ \\ &= -6 + j8 + 12 = 6 + j8 = 10\angle 53.1^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

写出相应的电压瞬时值表达式

$$u_s(t) = 10\sqrt{2} \cos(\omega t + 53.1^\circ) \text{ V}$$

值得注意的是回路中全部电压有效值之代数和并不一定等于零，本题中的  $U_s = 10 \neq U_1 + U_2 + U_3 = 6 + 8 + 12 = 26$ 。



本题也可以用作图的方法求解。在复数平面上，画出已知的电压相量，再用向量运算的平行四边形法则，求得电压相量，如图(c)所示，从相量图上容易看出各正弦电压的相位关系。

值得注意的是回路中全部电压有效值之代数和并不一定等于零，本题中  $U_S=10 \neq U_1+U_2+U_3=6+8+12=26$

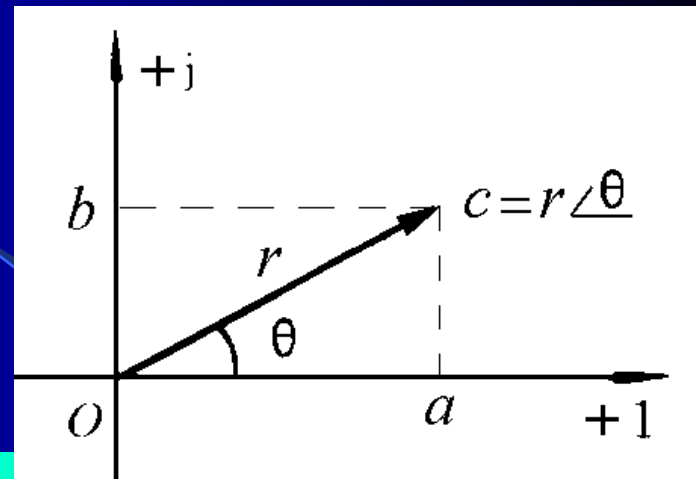
即一般说来

$$\sum_{k=1}^n U_k \neq 0$$

# 关于复数的几个公式

1. 假设复数  $c = r\angle\theta = a + jb$

则有  $c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \theta = \arctan \frac{b}{a}$   
 $a = r \cos \theta \quad b = r \sin \theta$



2. 假设复数  $c_1 = r_1\angle\theta_1, c_2 = r_2\angle\theta_2$

$$c_1 c_2 = r_1 r_2 \angle \theta_1 + \theta_2$$

则有

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \theta_1 - \theta_2$$

3. 假设复数  $c_1 = a_1 + jb_1, c_2 = a_2 + jb_2$

$$c_1 + c_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

则有

$$c_1 - c_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

# 要求掌握计算器进行复数两种形式的转换。

举例

CASIO fx-100  $3+j4=?$

3  $R \rightarrow P$  4  $=$  5  $X \leftrightarrow Y$  53.1

CASIO fx-100  $5 \angle 53.1=?$

5  $P \rightarrow R$  53.1  $=$  3  $X \leftrightarrow Y$  4

SHARP EL-5812  $3+j4=?$

3  $X \updownarrow Y$  4  $\rightarrow r\theta$  5  $X \updownarrow Y$  53.1

SHARP EL-5812  $5 \angle \theta=?$

5  $X \updownarrow Y$  53.1  $\rightarrow xy$  3  $X \updownarrow Y$  4

注意:

DEG

表示  
度数

电路分析中采用符号  $j = \sqrt{-1}$

应用欧拉公式  $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$  可以得到

$$\therefore e^{j90^\circ} = \cos 90^\circ + j\sin 90^\circ = j$$

$$\therefore j = \sqrt{-1} = e^{j90^\circ} = 1 \angle 90^\circ$$

$$\therefore e^{-j90^\circ} = \cos(-90^\circ) + j\sin(-90^\circ) = -j$$

$$\therefore -j = \frac{1}{j} = e^{-j90^\circ} = 1 \angle -90^\circ$$

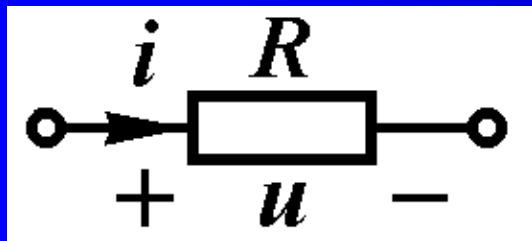
$$\therefore e^{j180^\circ} = \cos 180^\circ + j\sin 180^\circ = -1$$

$$\therefore -1 = j^2 = e^{j180^\circ} = 1 \angle 180^\circ$$

## § 10-4 RLC元件电压电流关系的相量形式

### 一、电阻元件电压电流关系的相量形式

线性电阻的电压电流关系服从欧姆定律，在电压电流采用关联参考方向时，其电压电流关系表示为



$$u(t) = Ri(t) \quad (10-18)$$

当其电流  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$  随时间按正弦规律变化时，电阻上电压电流关系如下：

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u) = Ri(t) = RI_m \cos(\omega t + \psi_i)$$

上式表明，线性电阻的电压和电流是同一频率的正弦时间函数。其振幅或有效值之间服从欧姆定律，其相位差为零(同相)，即

$$U_m = RI_m \quad \text{或} \quad U = RI \quad (10-19)$$

$$\psi_u = \psi_i \quad (10-20)$$

线性电阻元件的时域模型如图10-14(a)所示，反映电压电流瞬时值关系的波形图如图(b)所示。

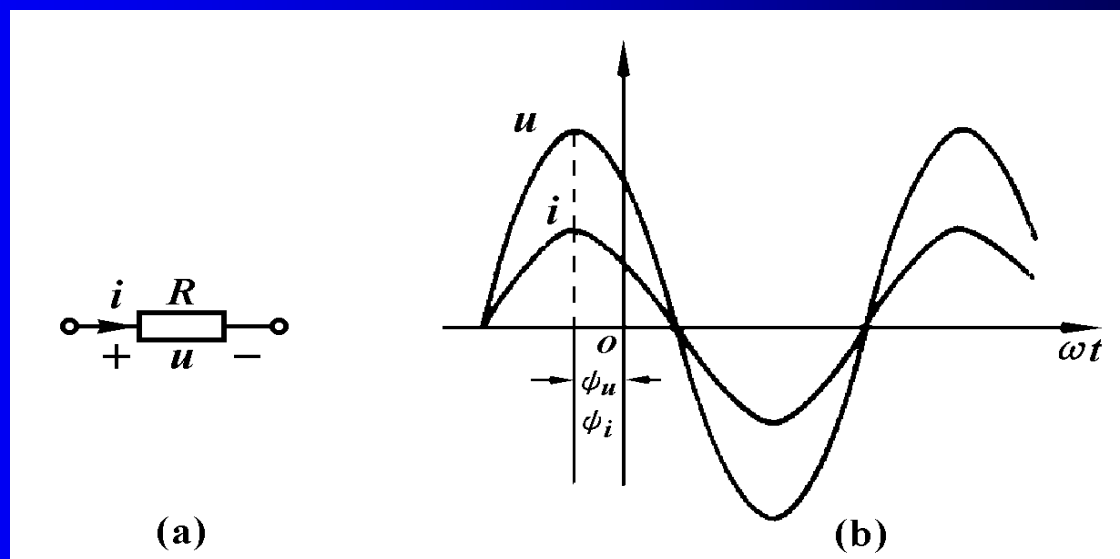


图 10-14

由上图可见，在任一时刻，电阻电压的瞬时值是电流瞬时值的 $R$ 倍，电压的相位与电流的相位相同，即电压电流波形同时达到最大值，同时经过零点。

由于电阻元件的电压电流都是频率相同的正弦时间函数，可以用相量分别表示如下：

$$u(t) = \operatorname{Re}[\dot{U}_m e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\sqrt{2}\dot{U}e^{j\omega t}] \quad (10-21)$$

$$i(t) = \operatorname{Re}[\dot{I}_m e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}] \quad (10-22)$$

将以上两式代入式10-18中，得到

$$u(t) = \operatorname{Re}[\sqrt{2}\dot{U}e^{j\omega t}] = R \cdot \operatorname{Re}[\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}]$$



由此得到线性电阻电压电流关系的相量形式为

$$\dot{U} = R\dot{I} \quad (10-23)$$

这是一个复数方程，它同时提供振幅之间和相位之间的两个关系，即

(1) 电阻电压有效值等于电阻乘以电流的有效值，即

$$U = RI$$

(2) 电阻电压与其电流的相位相同，即  $\psi_u = \psi_i$

线性电阻元件的相量模型如图(a)所示，反映电压电流相量关系的相量图如图(b)所示，由此图可以清楚地看出电阻电压的相位与电阻电流的相位相同。

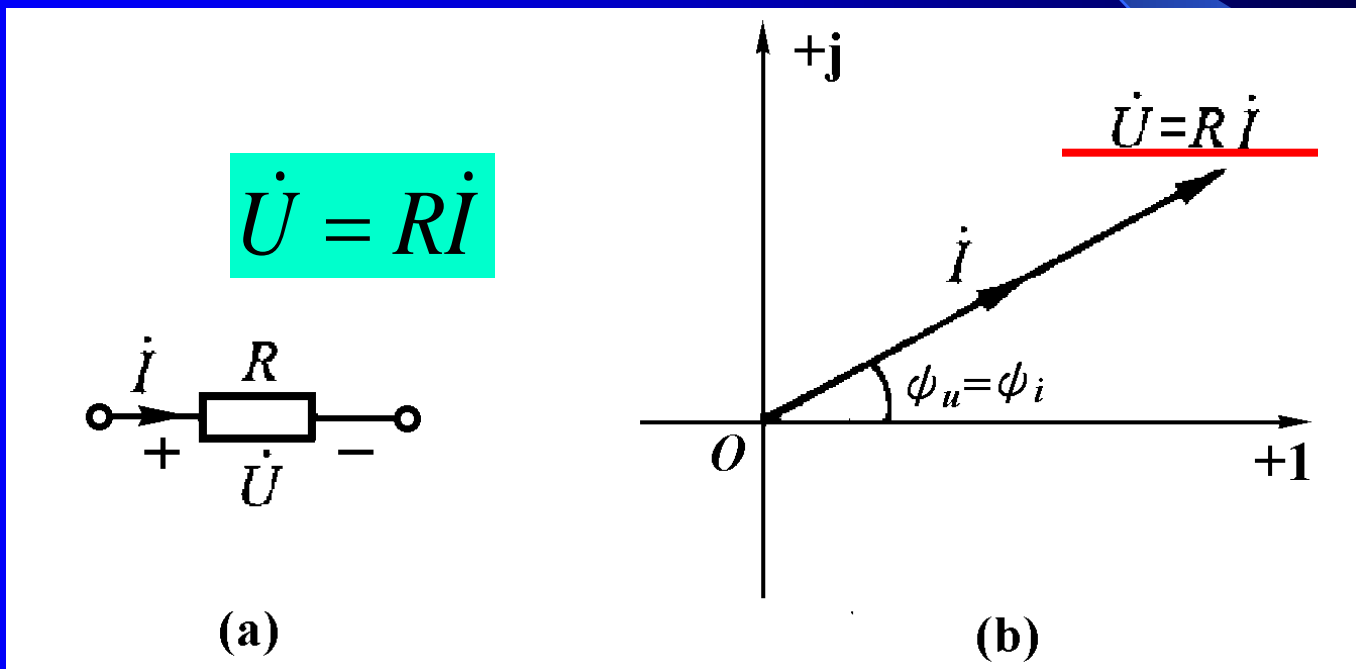
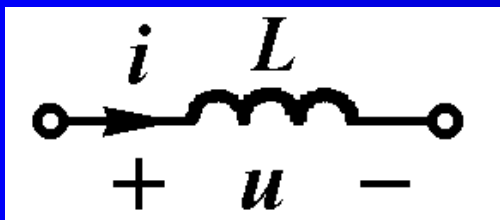


图10-15 正弦电流电路中电阻元件的电压电流相量关系

## 二、电感元件电压电流关系的相量形式

线性电感的电压电流关系采用关联参考方向时，



$$u(t) = L \frac{di}{dt} \quad (10-24)$$

当电感电流  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$  随时间按正弦规律变化时，电感上电压电流关系如下：

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos(\omega t + \psi_u) = L \frac{d}{dt} [I_m \cos(\omega t + \psi_i)] \\ &= -\omega LI_m \sin(\omega t + \psi_i) = \omega LI_m \cos(\omega t + \psi_i + 90^\circ) \end{aligned}$$

表明线性电感的电压和电流是同一频率的正弦时间函数。其振幅或有效值之间的关系以及电压电流相位之间的关系为

$$U_m = \omega L I_m \quad \text{或} \quad U = \omega L I \quad (10-25)$$

$$\psi_u = \psi_i + 90^\circ \quad (10-26)$$

电感元件的时域模型如图10-16(a)所示，反映电压电流瞬时值关系的波形图如图10-16(b)所示。由此可以看出**电感电压超前于电感电流 $90^\circ$** ，当电感电流由负值增加经过零点时，其电压达到正最大值。

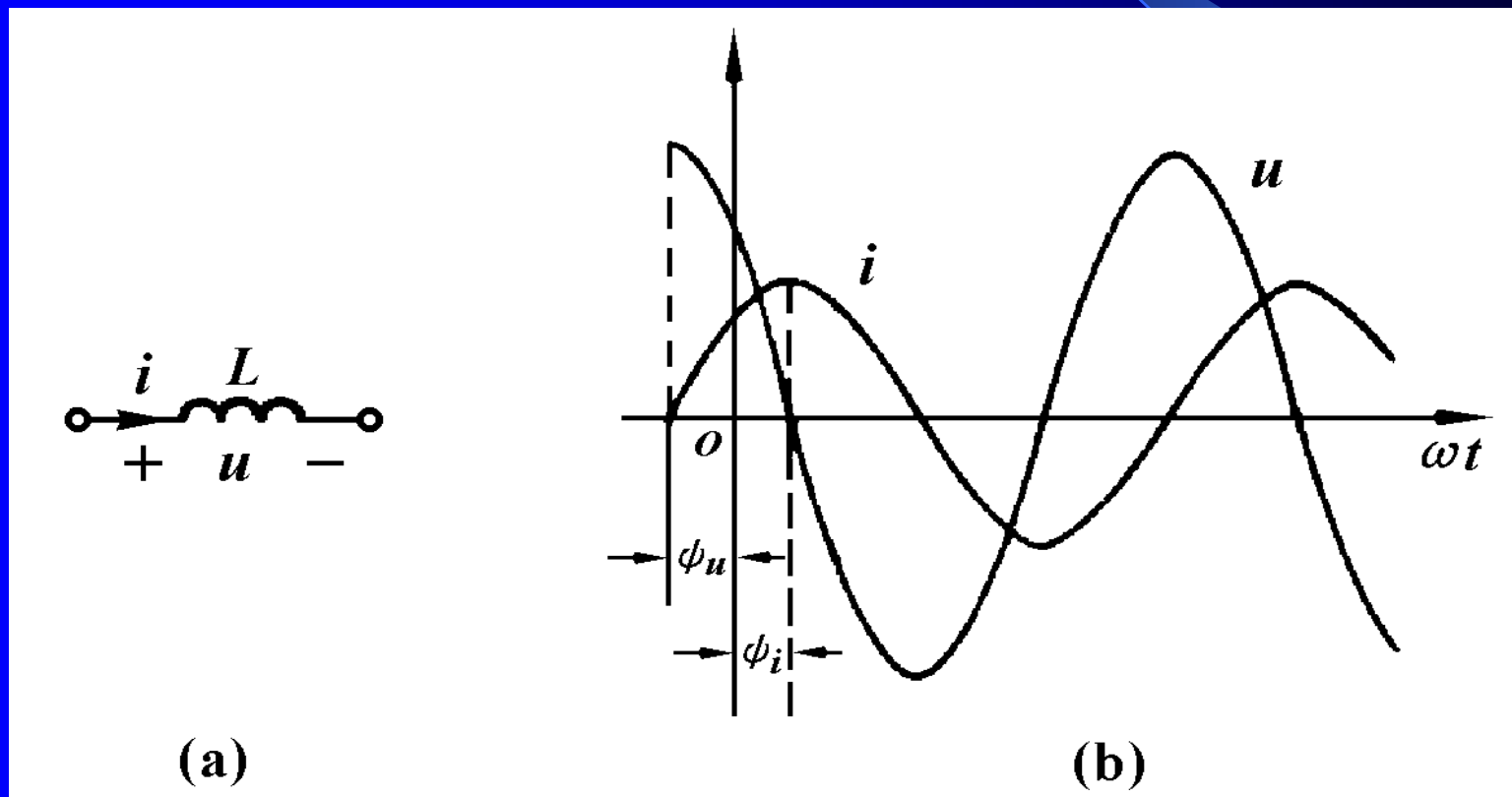


图 10-16

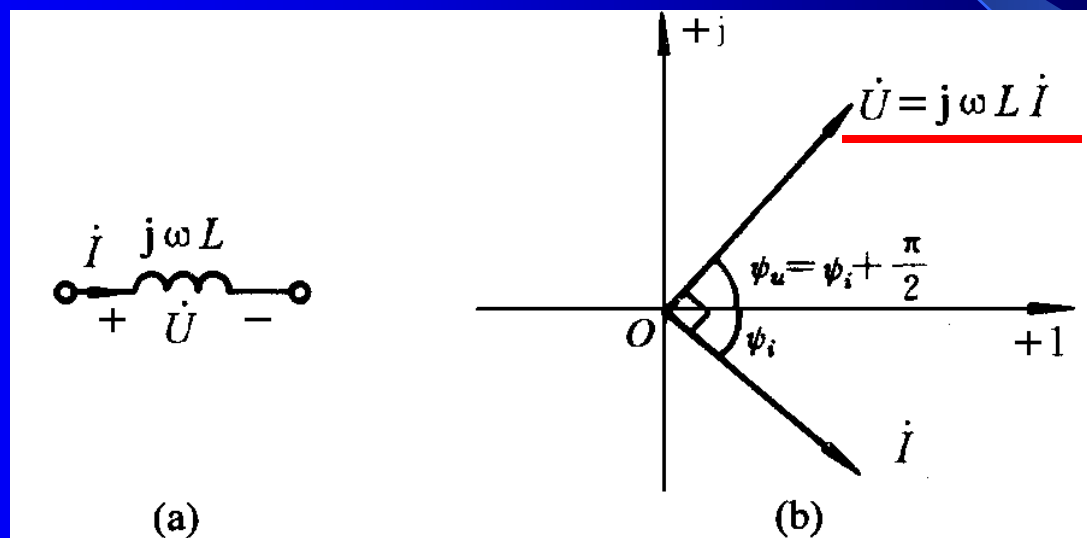
由于电感元件的电压电流都是频率相同的正弦时间函数，可以用相量分别表示，将它们代入式10-24中得到

$$\begin{aligned}u(t) &= \operatorname{Re}[\sqrt{2}\dot{U}e^{j\omega t}] \\ &= L \frac{d}{dt} [\operatorname{Re}(\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t})] \\ &= \operatorname{Re}[j\omega L\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}]\end{aligned}$$

由此得到电感元件电压相量和电流相量的关系式

$$\dot{U} = j\omega L\dot{I} \quad (10-27)$$

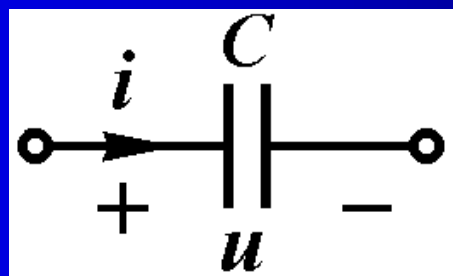
电感元件的相量模型如图(a)所示，电压电流的相量图如(b)所示。由此可以清楚看出电感电压的相位超前于电感电流的相位 $90^\circ$ 。



$$e^{j90^\circ} = \cos 90^\circ + j \sin 90^\circ = j$$

### 三、电容元件电压电流关系的相量形式

线性电容在电压电流采用关联参考方向时



$$i(t) = C \frac{du}{dt} \quad (10-28)$$



当电容电压 $u(t)=U_m \cos(\omega t + \psi_u)$ 随时间按正弦规律变化时

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \cos(\omega t + \psi_i) = C \frac{d}{dt} [U_m \cos(\omega t + \psi_u)] \\ &= -\omega C U_m \sin(\omega t + \psi_u) = \omega C U_m \cos(\omega t + \psi_u + 90^\circ) \end{aligned}$$

线性电容的电压和电流是同一频率的正弦时间函数。其振幅或有效值之间的关系。以及电压电流相位之间的关系为

$$I_m = \omega C U_m \quad \text{或} \quad I = \omega C U \quad (10-29)$$

$$\psi_i = \psi_u + 90^\circ \quad (10-30)$$

电容元件的时域模型如图10-18(a)所示，反映电压电流瞬时值关系的波形图如图(b)所示。由此图可以看出**电容电流超前于电容电压 $90^\circ$** ，当电容电压由负值增加经过零点时，其电流达到正最大值。

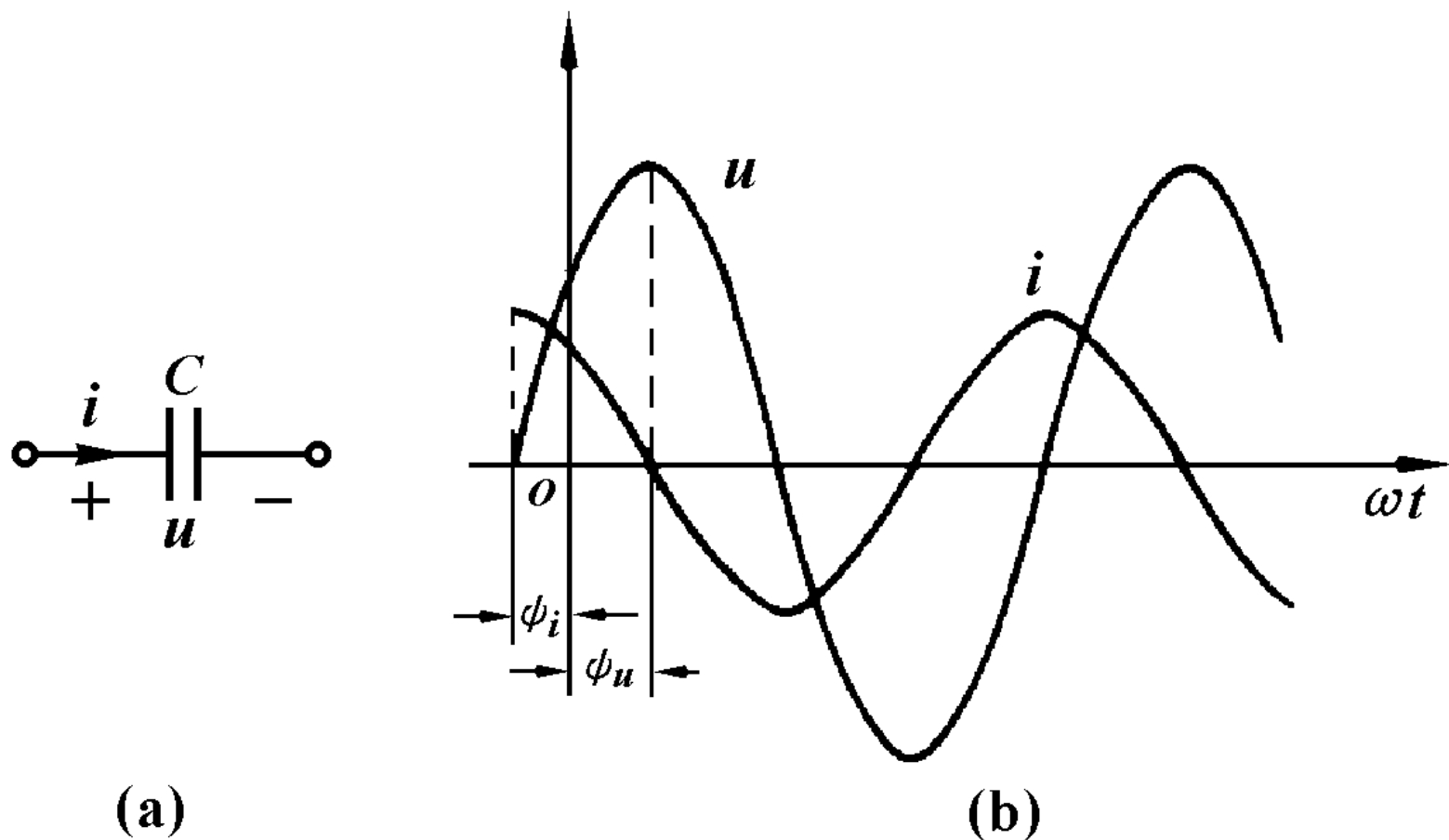


图 10-18

由于电容元件的电压电流都是频率相同的正弦时间函数，可以用相量分别表示，代入式10-28中得到

$$\begin{aligned} i(t) &= \operatorname{Re}[\sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t}] \\ &= C \frac{d}{dt} [\operatorname{Re}(\sqrt{2} \dot{U} e^{j\omega t})] \\ &= \operatorname{Re}[j\omega C \sqrt{2} \dot{U} e^{j\omega t}] \end{aligned}$$

由此得到电容元件电压相量和电流相量的关系式

$$\dot{I} = j\omega C \dot{U} \quad (10-31)$$

电容元件的相量模型如图(a)所示，其相量关系如图(b)所示。

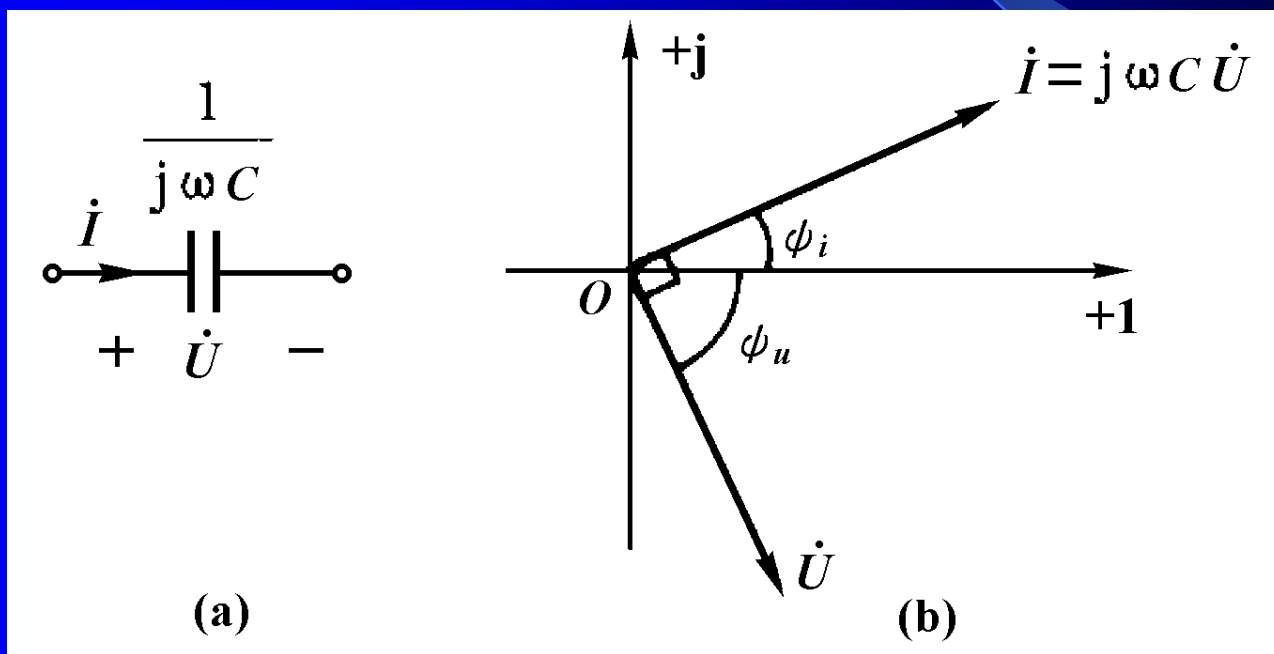


图 10-15

例10-8 电路如图10-20(a)所示, 已知

$$R = 3\Omega, L = 2\text{H}, i_s(t) = \sqrt{2} \cos \omega t \text{ A}, \omega = 2\text{rad/s}$$

试求电压 $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $u(t)$ 及其有效值相量。

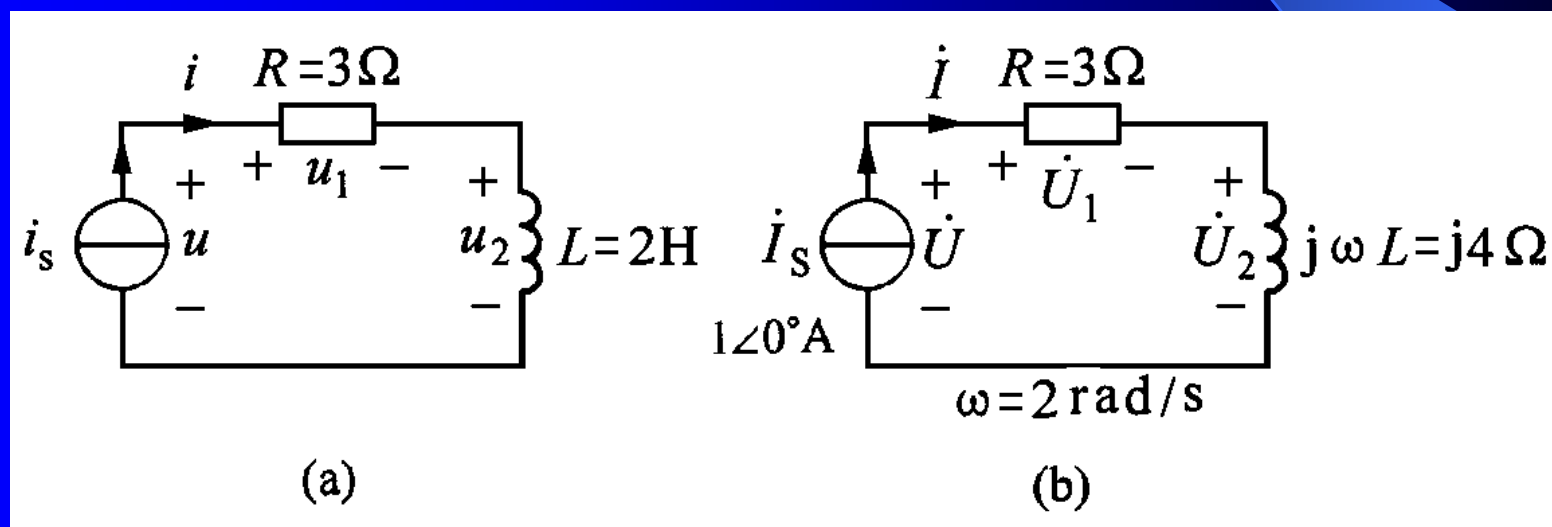


图 10-20

解：根据图(a)所示电路的时域模型，画出图(b)所示的相量模型，图中各电压电流参考方向均与时域模型相同，仅将时域模型中各电压电流符号  $i_s$ 、 $i$ 、 $u_1$ 、 $u_2$ 、 $u$  用相应的相量符号  $\dot{I}_s$ 、 $\dot{I}$ 、 $\dot{U}_1$ 、 $\dot{U}_2$ 、 $\dot{U}$  表示，根据相量形式的KCL求出电流相量

$$\dot{I} = \dot{I}_s = 1\angle 0^\circ \text{ A} = 1\text{ A}$$

由相量形式的VCR方程求出电压

$$\dot{U}_1 = R\dot{I} = R\dot{I}_s = 3 \times 1\angle 0^\circ = 3\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= j\omega L\dot{I} = j\omega L\dot{I}_s = j2 \times 2 \times 1\angle 0^\circ \\ &= j4\text{ V} = 4\angle 90^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

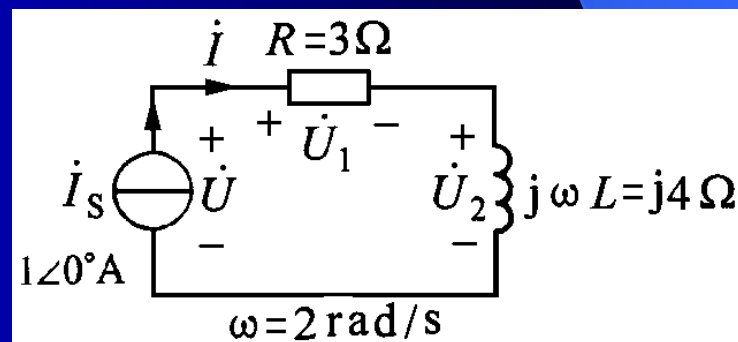


图 10-20(b)

根据相量形式的KVL方程式得到

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 3 + j4 = 5 \angle 53.1^\circ \text{ V}$$

得到相应电压的瞬时值表达式

$$u_1(t) = 3\sqrt{2} \cos 2t \text{ V}$$

$$u_2(t) = 4\sqrt{2} \cos(2t + 90^\circ) \text{ V}$$

$$u(t) = 5\sqrt{2} \cos(2t + 53.1^\circ) \text{ V}$$

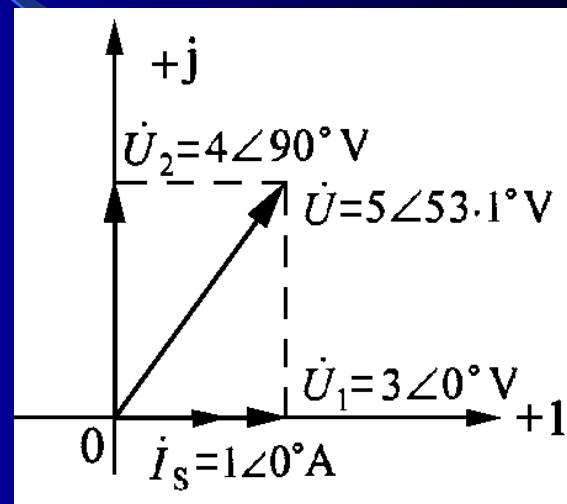


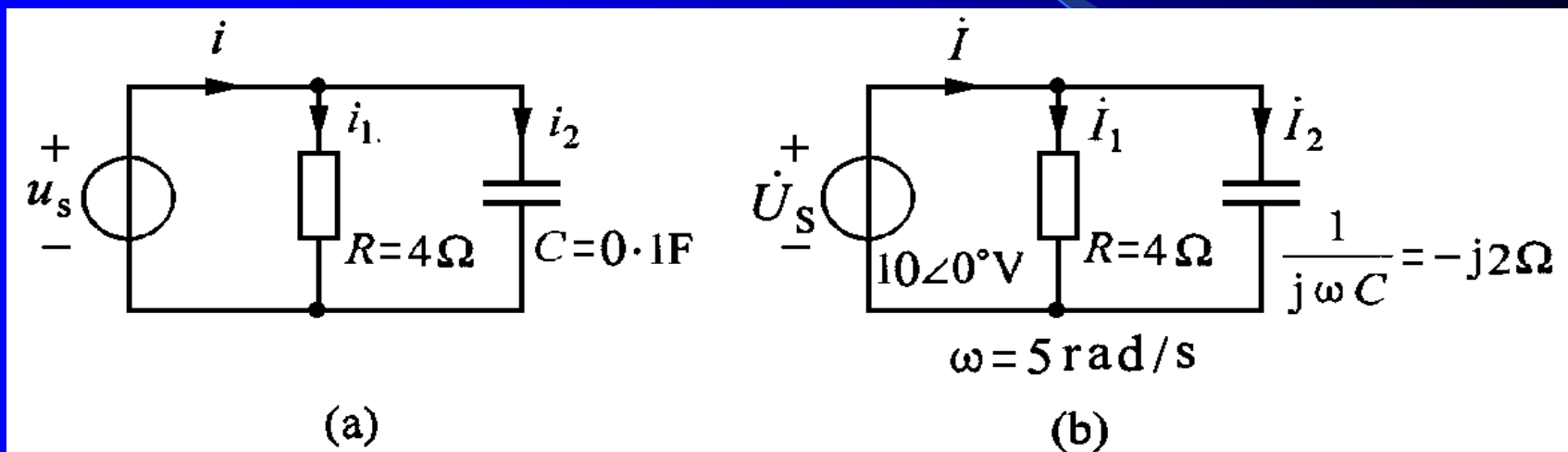
图 10-20(c)

相量图如图(c)所示。由此图可以看出电压 $u(t)$ 超前于电流 $i(t)$ 的角度为 $53.1^\circ$ 。此例中， $U=5 \neq U_1+U_2=3+4=7$

例10-9 电路如图10-21(a)所示,已知

$$R = 4\Omega, C = 0.1\text{F}, u_s(t) = 10\sqrt{2} \cos\omega t \text{ V}, \omega = 5\text{rad/s}$$

试求电流 $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $i(t)$ 及其有效值相量。



解: 画出图(a)相量模型如图(b)所示。根据 $RLC$ 元件相量形式的VCR方程(式10-23和10-31)计算出电流相量。

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{R} = \frac{10\angle 0^\circ}{4} = 2.5\angle 0^\circ = 2.5\text{A}$$



$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_s}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{10\angle 0^\circ}{-j\frac{1}{5 \times 0.1}} = \frac{10\angle 0^\circ}{-j2} = j5\text{A} = 5\angle 90^\circ \text{A}$$

根据相量形式的KCL方程得到

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 2.5 + j5 = 5.59\angle 63.4^\circ \text{A}$$

得到电流的瞬时值表达式

$$i_1(t) = 2.5\sqrt{2} \cos 5t \text{ A}$$

$$i_2(t) = 5\sqrt{2} \cos(5t + 90^\circ) \text{ A}$$

$$i(t) = 5.59\sqrt{2} \cos(5t + 63.4^\circ) \text{ A}$$

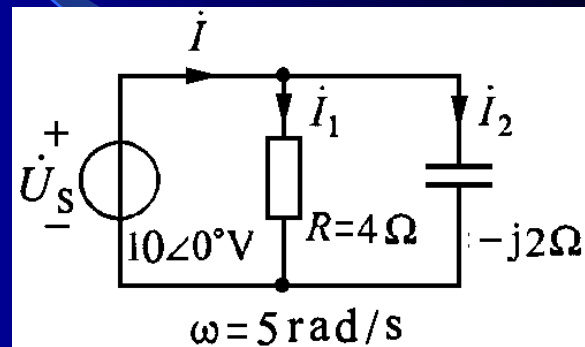
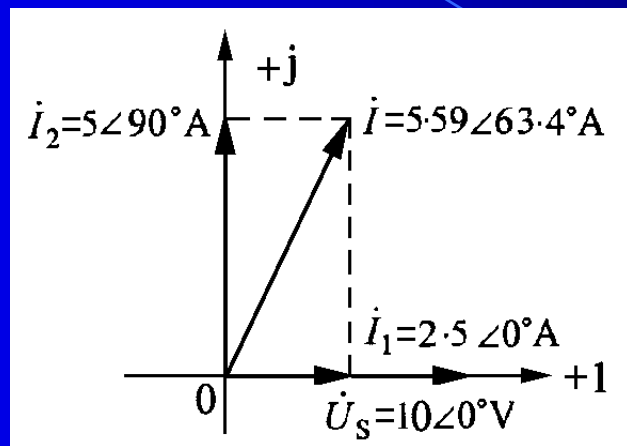


图 10-21

根据所求得各电压电流相量画出相量图。



由此图可以看出电流 $i(t)$ 超前于电压 $u_s(t)$ 的角度为 $63.4^\circ$ 。

此例中， $I = 5.59 \neq I_1 + I_2 = 2.5 + 5 = 7.5$ ，再次说明正弦电流电路中流出任一结点的全部电流有效值的代数和并不一定等于零。

## 四、阻抗与导纳 欧姆定律的相量形式

现将RLC元件电压电流的相量关系列写如下：

$$\dot{U}_R = R\dot{I}_R \quad \frac{\dot{U}_R}{\dot{I}_R} = R \quad \text{称为电阻}$$

$$\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}_L \quad \frac{\dot{U}_L}{\dot{I}_L} = j\omega L \quad \text{称为电感的电抗，简称为感抗}$$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_C \quad \frac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C} = \frac{1}{j\omega C} \quad \text{称为电容的电抗，简称为容抗}$$

$$\dot{U}_R = R\dot{I}_R \quad \frac{\dot{U}_R}{\dot{I}_R} = R \quad \text{称为电阻}$$

$$\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}_L \quad \frac{\dot{U}_L}{\dot{I}_L} = j\omega L \quad \text{称为电感的电抗, 简称为感抗}$$

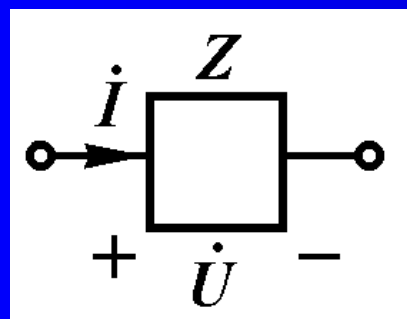
$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_C \quad \frac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C} = \frac{1}{j\omega C} \quad \text{称为电容的电抗, 简称为容抗}$$

我们注意到,  $RLC$ 元件电压相量与电流相量之间的关系类似欧姆定律, 电压相量与电流相量之比是一个与时间无关的量, 其中 $R$ , 称为电阻;  $j\omega L$ , 称为电感的电抗, 简称为感抗;  $1/j\omega C$ , 称为电容的电抗, 简称为容抗。为了使用方便, 我们用大写字母 $Z$ 来表示这个量, 它是一个复数, 称为阻抗。

阻抗定义为电压相量与电流相量之比，即

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \begin{cases} R \\ j\omega L \\ \frac{1}{j\omega C} \end{cases}$$

引入**阻抗**后，我们可以将以上三个关系式用一个式子来表示。



$$\dot{U} = Z\dot{I} \quad \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z \quad (10-32)$$

式10-32称为**欧姆定律的相量形式**。

与上相似，*RLC*元件电压电流的相量关系也可以写成以下形式

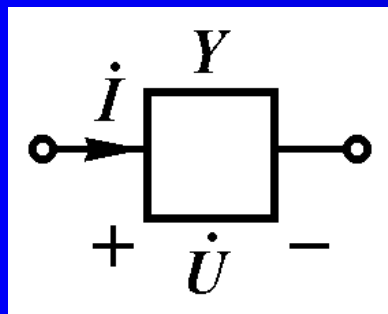
$$\begin{array}{lll} \dot{I}_R = G\dot{U}_R & \frac{\dot{I}_R}{\dot{U}_R} = G & \text{称为电导} \\ \dot{I}_L = \frac{1}{j\omega L}\dot{U}_L & \frac{\dot{I}_L}{\dot{U}_L} = \frac{1}{j\omega L} & \text{称为电感的电纳，简称为感纳} \\ \dot{I}_C = j\omega C\dot{U}_C & \frac{\dot{I}_C}{\dot{U}_C} = j\omega C & \text{称为电容的电纳，简称为容纳} \end{array}$$

我们注意到，*RLC*元件电流相量与电压相量之比是一个与时间无关的量，其中 $G$ ，称为电导； $1/j\omega L$ ，称为电感的电纳，简称为感纳； $j\omega C$ ，称为电容的电纳，简称为容纳。我们用大写字母 $Y$ 来表示这个量，它是一个复数，称为导纳。

导纳 $Y$ 定义为电流相量与电压相量之比，即

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \begin{cases} G \\ j\omega C \\ \frac{1}{j\omega L} \end{cases}$$

引入导纳后，可以将以上关系式用一个式子来表示。



$$\dot{I} = Y\dot{U} \quad \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = Y \quad (10-33)$$

显然，同一个二端元件的阻抗与导纳互为倒数关系，即

$$Z = \frac{1}{Y} \quad Y = \frac{1}{Z}$$

现将反映两类约束关系的KCL、KVL和二端元件VCR的时域和相量形式列写如下。它们是相量法分析正弦稳态电路的基本依据。

	时域形式	相量形式
基尔霍夫电流定律	$\sum_{k=1}^n i_k = 0$	$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0$
基尔霍夫电压定律	$\sum_{k=1}^n u_k = 0$	$\sum_{k=1}^n \dot{U}_k = 0$
电压源	$u_S(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \psi_u)$	$\dot{U}_S = U_S e^{j\psi_u}$
电流源	$i_S(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \psi_i)$	$\dot{I}_S = I_S e^{j\psi_i}$
电阻	$u = Ri \quad i = Gu$	$\dot{U} = Z\dot{I} \quad \dot{I} = Y\dot{U}$
电感	$u = L \frac{di}{dt} \quad i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt$	
电容	$i = C \frac{du}{dt} \quad u = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt$	



## § 10-5 正弦稳态的相量分析

在前两节中，已经推导出反映两类约束关系的KCL、KVL和二端元件VCR的相量形式，它们是用相量法分析正弦稳态电路的基本依据。本节先介绍相量法分析正弦稳态的基本方法和主要步骤，然后再用相量法分析阻抗串并联电路。

# 一、相量法分析正弦稳态的主要步骤

## (一) 画出电路的相量模型

根据电路时域模型画出电路相量模型的方法是

1. 将时域模型中各正弦电压电流，用相应的相量表示，并标明在电路图上。对于已知的正弦电压和电流，按照下式计算出相应的电压电流相量。

	时域形式	相量形式
正弦电压	$u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi_u)$	$\dot{U} = Ue^{j\psi_u} = U\angle\psi_u$
正弦电流	$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi_i)$	$\dot{I} = Ie^{j\psi_i} = I\angle\psi_i$

2. 根据时域模型中 $RLC$ 元件的参数, 用相应的阻抗(或导纳)表示, 并标明在电路图上。

	时域形式		相量形式
电阻	$R$	$\rightarrow$	$R$ 或 $G$
电感	$L$	$\rightarrow$	$j\omega L$ 或 $\frac{1}{j\omega L}$
电容	$C$	$\rightarrow$	$\frac{1}{j\omega C}$ 或 $j\omega C$

(二) 根据KCL、KVL和元件VCR相量形式，建立复系数电路方程或写出相应公式，并求解得到电压电流的相量表达式。

基尔霍夫电流定律

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0$$

基尔霍夫电压定律

$$\sum_{k=1}^n \dot{U}_k = 0$$

欧姆定律

$$\dot{U} = Z\dot{I}$$

$$\dot{I} = Y\dot{U}$$

(三) 根据所计算得到的电压相量和电流相量，写出相应的瞬时值表达式。

相量形式

时域形式

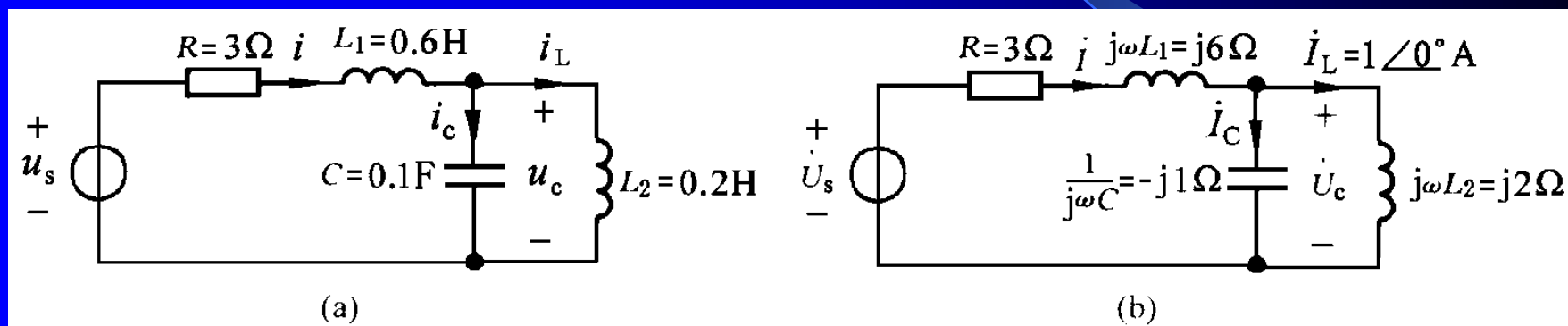
$$\text{正弦电压 } \dot{U} = Ue^{j\psi_u} = U\angle\psi_u \xrightarrow{\omega} u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi_u)$$

$$\text{正弦电流 } \dot{I} = Ie^{j\psi_i} = I\angle\psi_i \xrightarrow{\omega} i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi_i)$$

例10-10 电路如图10-22(a)所示, 已知电感电流

$$i_L(t) = \sqrt{2} \cos \omega t \text{ A}, \quad \omega = 10 \text{ rad/s}$$

试用相量法求电流 $i(t)$ , 电压 $u_C(t)$ 和 $u_S(t)$ 。



解: 1.画出电路图(a)的相量模型, 如图(b)所示。其中

$$\dot{I}_L = 1\angle 0^\circ \text{ A} = 1\text{ A}$$

$$Z_{L1} = j\omega L_1 = j10 \times 0.6 = j6\Omega$$

$$Z_{L2} = j\omega L_2 = j10 \times 0.2 = j2\Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{10 \times 0.1} = -j1\Omega$$

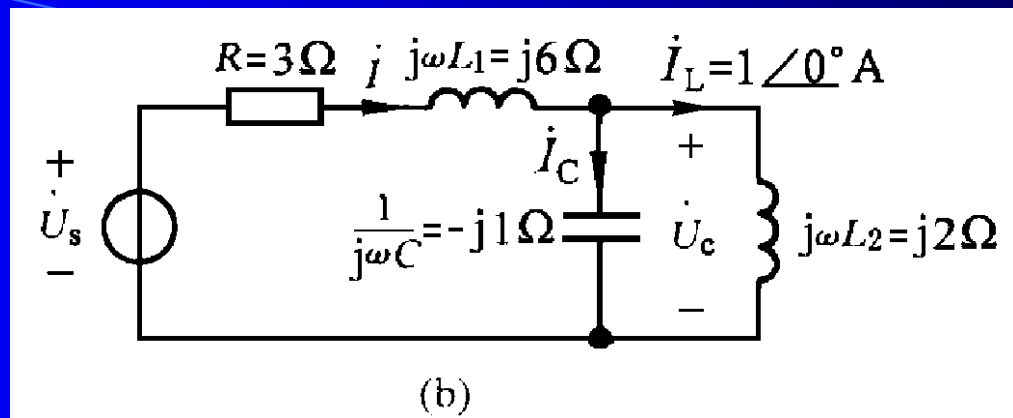


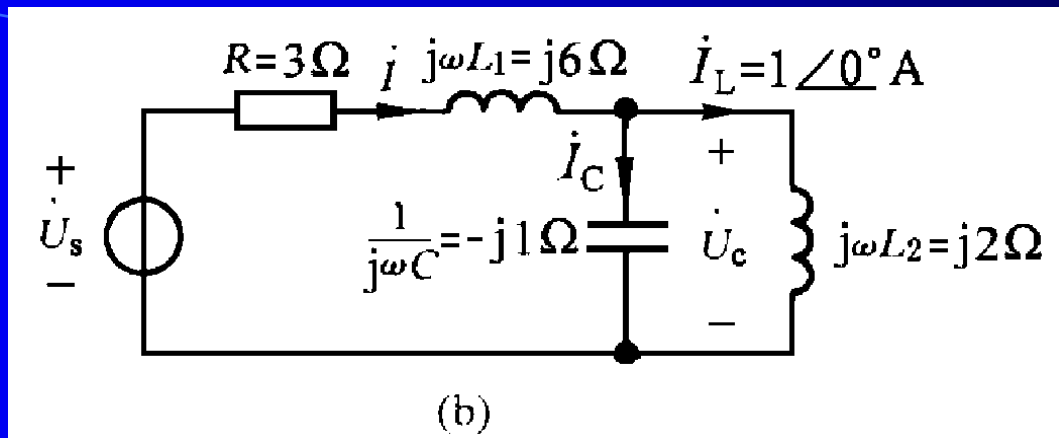
图 10-22

2. 观察相量模型，用相量形式的KVL和电感VCR方程  
求出电感电压和电容电压相量

$$\dot{U}_C = \dot{U}_L = j\omega L_2 \dot{I}_L = j2 \times 1 = j2V$$

根据相量形式的电容VCR方程求出电容电流相量

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{j2}{-j1} = -2\angle 0^\circ A = -2A$$



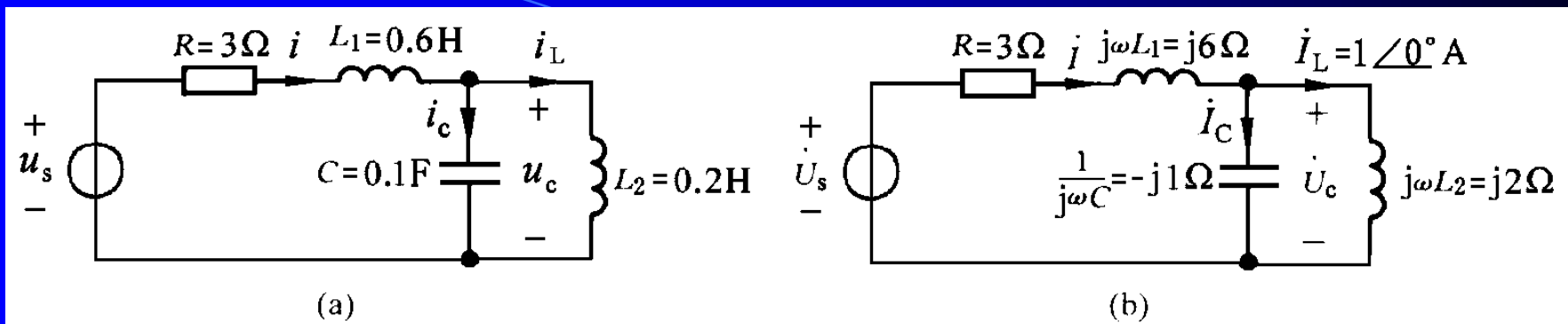
根据相量形式的KCL方程求出电阻电流相量

$$\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_C = 1 - 2 = -1\text{A}$$

根据相量形式的KVL方程和电阻及电感VCR方程，求出电压源电压相量

$$\begin{aligned} \dot{U}_S &= R\dot{I} + j\omega L_1\dot{I} + \dot{U}_C \\ &= 3 \times (-1) + j6 \times (-1) + j2 \\ &= -3 - j4 = 5 \angle -126.9^\circ \text{V} \end{aligned}$$





根据电流相量  $\dot{I} = -1\text{A}$  , 电容电压相量  $\dot{U}_C = j2\text{V}$  和电压相量  $\dot{U}_S = 5\angle -126.9^\circ \text{V}$  以及角频率  $\omega = 10\text{rad/s}$ , 求得电流  $i(t)$ , 电压  $u_C(t)$  和  $u_S(t)$  的瞬时值表达式为

$$i(t) = \sqrt{2} \cos(10t + 180^\circ) \text{A}$$

$$u_C(t) = 2\sqrt{2} \cos(10t + 90^\circ) \text{V}$$

$$u_S(t) = 5\sqrt{2} \cos(10t - 126.9^\circ) \text{V}$$

## 二、阻抗串联和并联电路分析

### 1. 阻抗串联电路分析

图10-23(a)表示 $n$ 个阻抗的串联，流过每个阻抗的电流相同，根据相量形式的基尔霍夫电压定律和欧姆定律得到以下关系

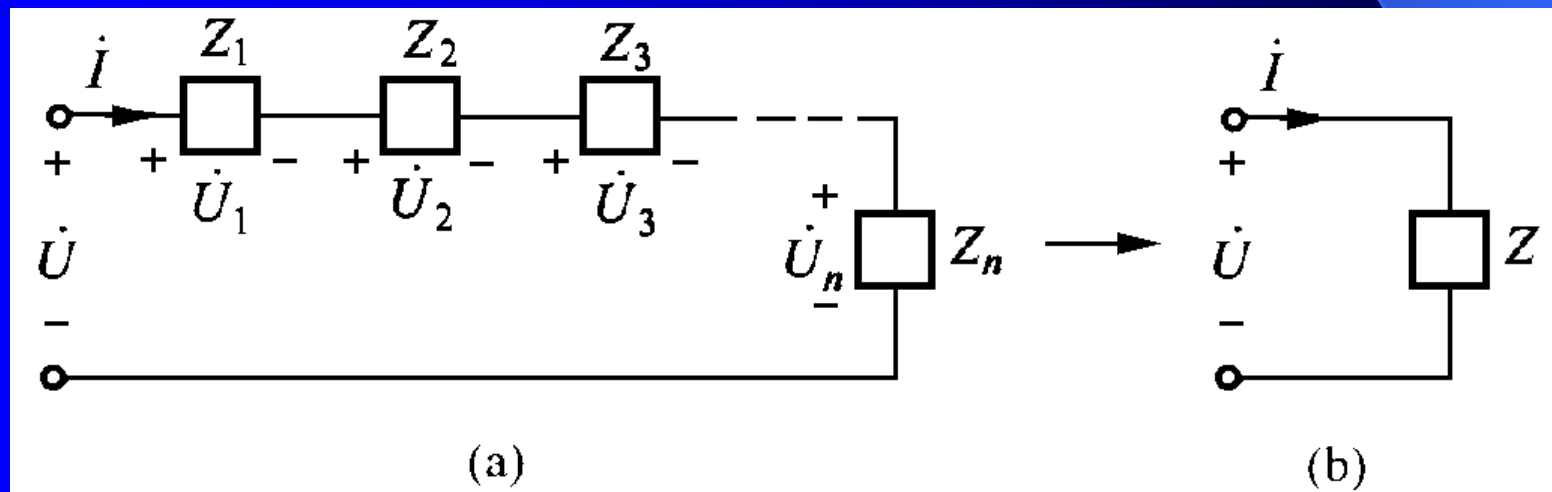
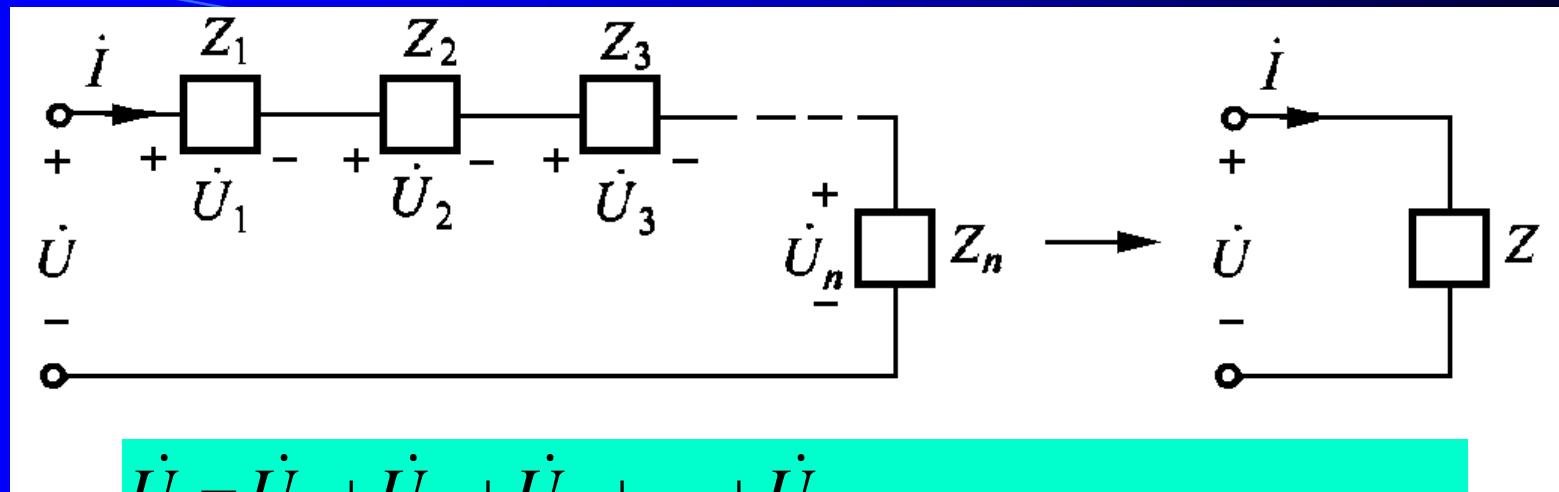


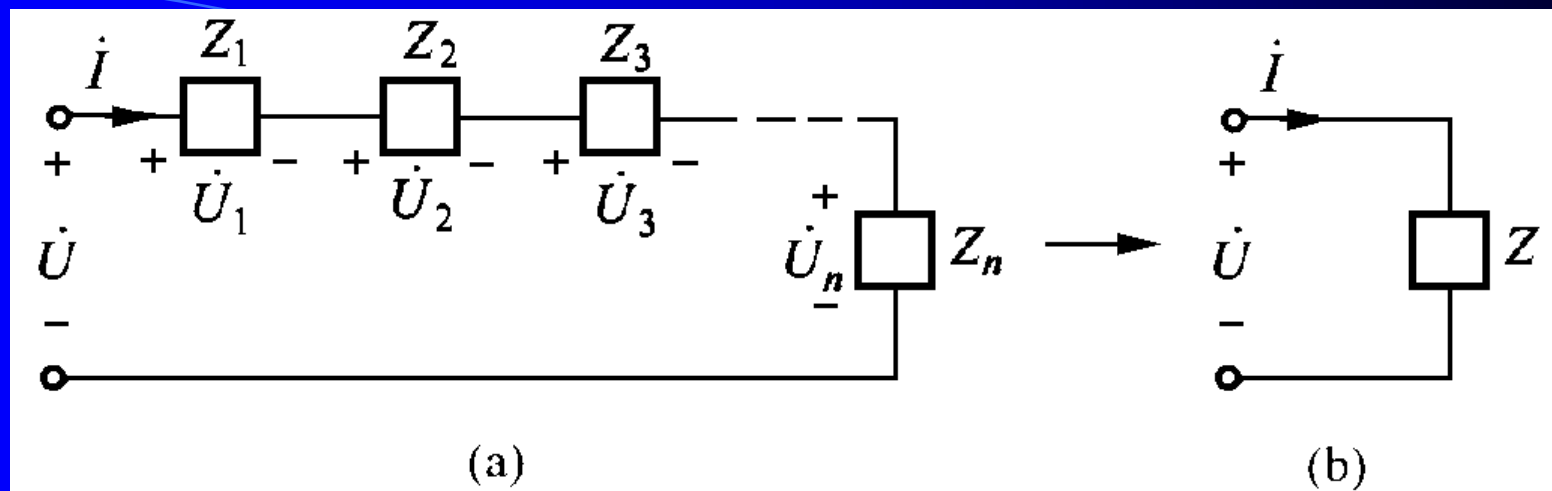
图 10-23



$$\begin{aligned}
 \dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 + \cdots + \dot{U}_n \\
 &= Z_1 \dot{I} + Z_2 \dot{I} + Z_3 \dot{I} + \cdots + Z_n \dot{I} \\
 &= (Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_n) \dot{I} = Z \dot{I} \quad (10-34)
 \end{aligned}$$

以上计算结果表明  $n$  个阻抗串联组成的单口网络，就端口特性来说，等效于一个阻抗，其等效阻抗值等于各串联阻抗之和，即

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_n = \sum_{k=1}^n Z_k \quad (10-35)$$

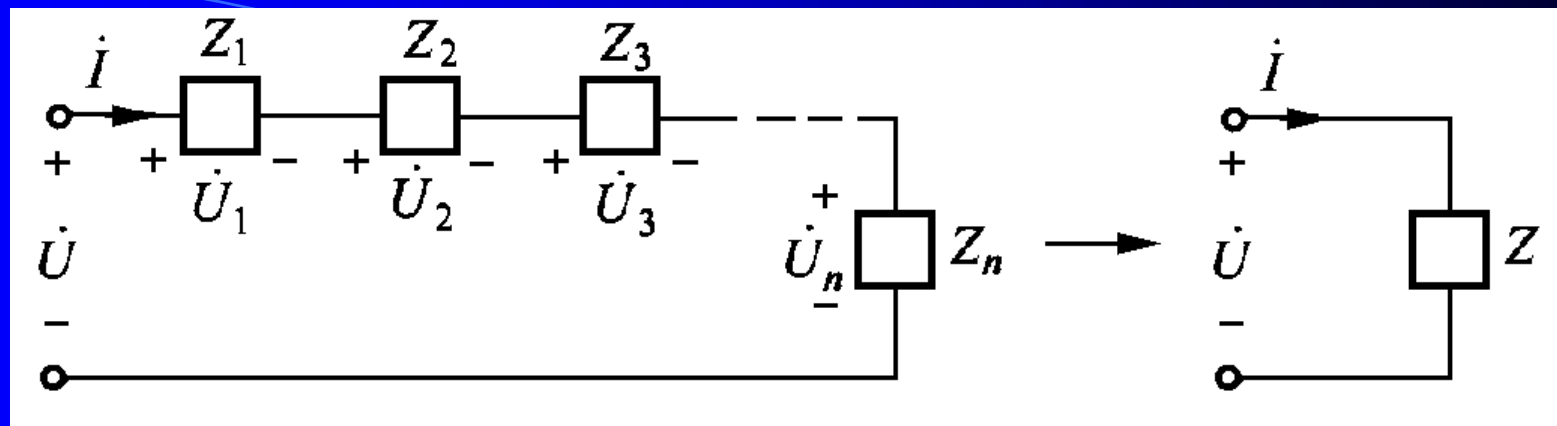


$n$ 个阻抗串联的电流相量与其端口电压相量的关系为

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_n} = \frac{\dot{U}}{\sum_{k=1}^n Z_k} \quad (10-36)$$

第 $k$ 个阻抗上的电压相量与端口电压相量的关系为

$$\dot{U}_k = Z_k \dot{I} = \frac{Z_k}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_n} \dot{U} = \frac{Z_k}{\sum_{k=1}^n Z_k} \dot{U} \quad (10-37)$$



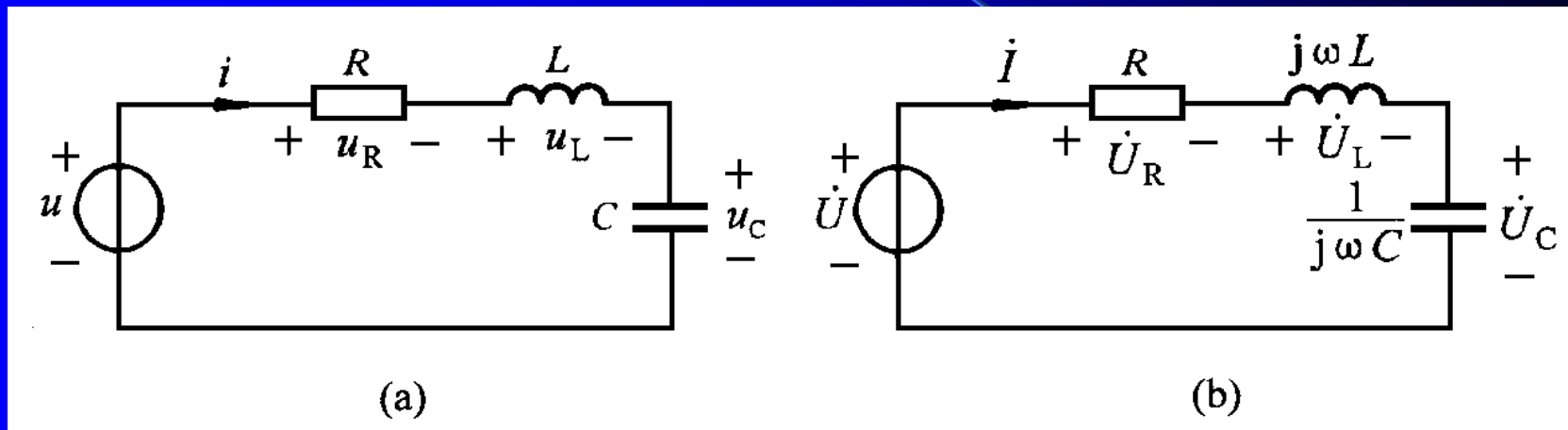
$$\dot{U}_k = Z_k \dot{I} = \frac{Z_k}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_n} \dot{U} = \frac{Z_k}{\sum_{k=1}^n Z_k} \dot{U} \quad (10-37)$$

这个公式称为 $n$ 个阻抗串联时的分压公式。当两个阻抗串联时的分压公式为

$$\dot{U}_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \dot{U} \quad \dot{U}_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{U} \quad (10-38)$$

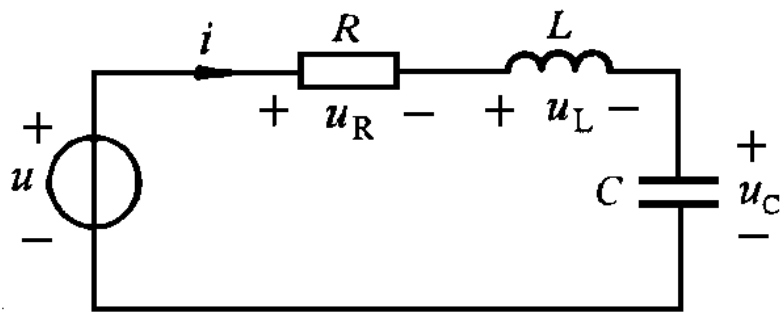
读者可以看出以上几个公式与 $n$ 个电阻串联时得到的公式相类似。

下面用相量法对图10-24示RLC串联电路进行分析。已知电压 $u(t)=U_m \cos(\omega t + \psi_u)$ ，求各电压电流。

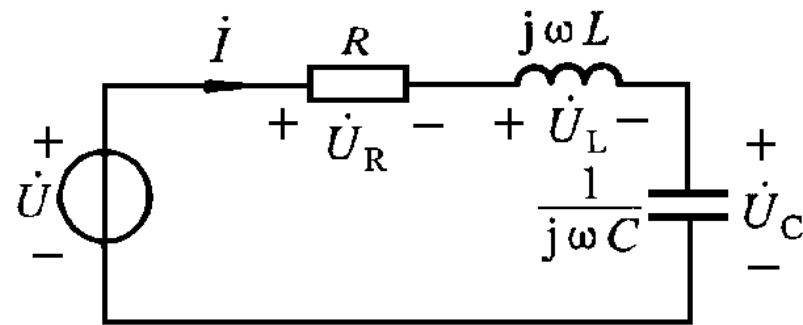


图(a)所示电路的相量模型如图(b)所示。单口网络相量模型的等效阻抗

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$



(a)



(b)

## 电流相量

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{U \angle \psi_u}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = I \angle \psi_i$$

其中

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad \psi_i = \psi_u - \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

用分压公式计算 $RLC$ 元件上的电压相量

$$\dot{U}_R = \frac{R}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \dot{U}$$

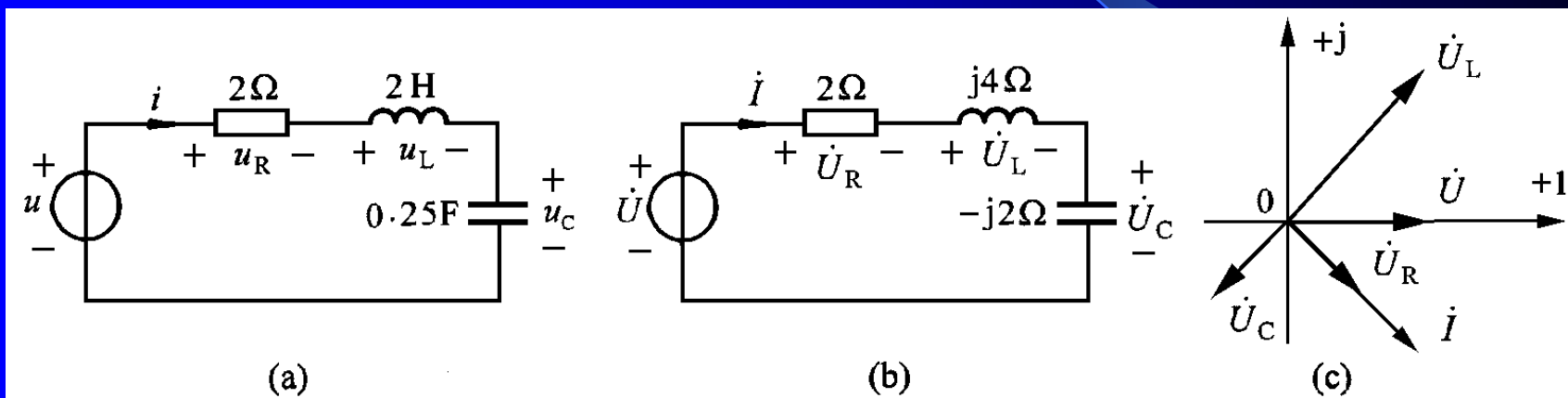
$$\dot{U}_L = \frac{j\omega L}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \dot{U}$$

$$\dot{U}_C = \frac{-j\frac{1}{\omega C}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \dot{U}$$

根据计算得到的电流相量和电压相量写出电流和电压的瞬时值表达式。

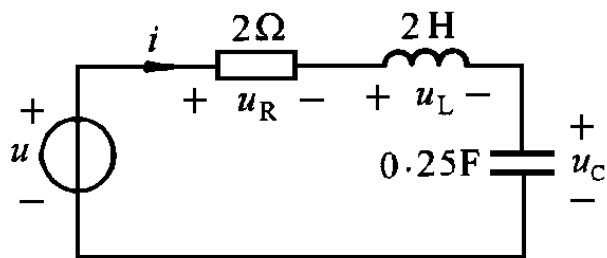


例10-11 已知图10-25(a)所示电路的 $u(t)=10\sqrt{2}\cos 2t\text{ V}$ ,  
 $R=2\Omega$ ,  $L=2\text{H}$ ,  $C=0.25\text{F}$ 。试用相量方法计算电路  
 中的 $i(t)$ ,  $u_R(t)$ ,  $u_L(t)$ ,  $u_C(t)$ 。

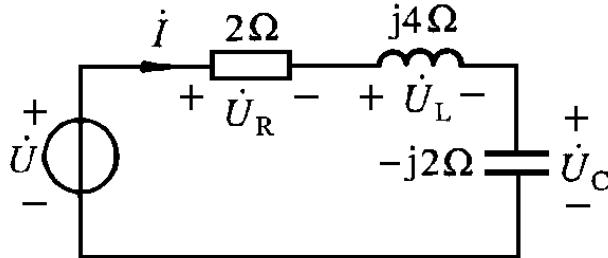


解：图(a)电路的相量模型，如图(b)所示。求出RLC串联电  
 路的等效阻抗

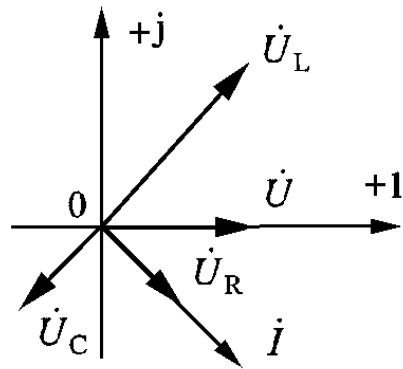
$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = (2 + j4 - j2)\Omega = (2 + j2)\Omega = 2\sqrt{2}\angle 45^\circ \Omega$$



(a)



(b)



(c)

求出RLC元件的相量电流

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{10\angle 0^\circ}{2\sqrt{2}\angle 45^\circ} = 2.5\sqrt{2}\angle -45^\circ \text{ A}$$

用分压公式计算RLC元件上的电压相量

$$\dot{U}_R = \frac{2}{2\sqrt{2}\angle 45^\circ} \times 10\angle 0^\circ = 7.07\angle -45^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_L = \frac{j4}{2\sqrt{2}\angle 45^\circ} \times 10\angle 0^\circ = 14.14\angle 45^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_C = \frac{-j2}{2\sqrt{2}\angle 45^\circ} \times 10\angle 0^\circ = 7.07\angle -135^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_R = \frac{2}{2\sqrt{2}\angle 45^\circ} \times 10\angle 0^\circ = 7.07\angle -45^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_L = \frac{j4}{2\sqrt{2}\angle 45^\circ} \times 10\angle 0^\circ = 14.14\angle 45^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_C = \frac{-j2}{2\sqrt{2}\angle 45^\circ} \times 10\angle 0^\circ = 7.07\angle -135^\circ \text{ V}$$

根据以上电压电流相量得到相应的瞬时值表达式

$$i(t) = 2.5\sqrt{2} \times \sqrt{2} \cos(2t - 45^\circ) \text{ A} = 5 \cos(2t - 45^\circ) \text{ A}$$

$$u_R(t) = 7.07\sqrt{2} \cos(2t - 45^\circ) \text{ V} = 10 \cos(2t - 45^\circ) \text{ V}$$

$$u_L(t) = 14.14\sqrt{2} \cos(2t + 45^\circ) \text{ V} = 20 \cos(2t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$u_C(t) = 7.07\sqrt{2} \cos(2t - 135^\circ) \text{ V} = 10 \cos(2t - 135^\circ) \text{ V}$$

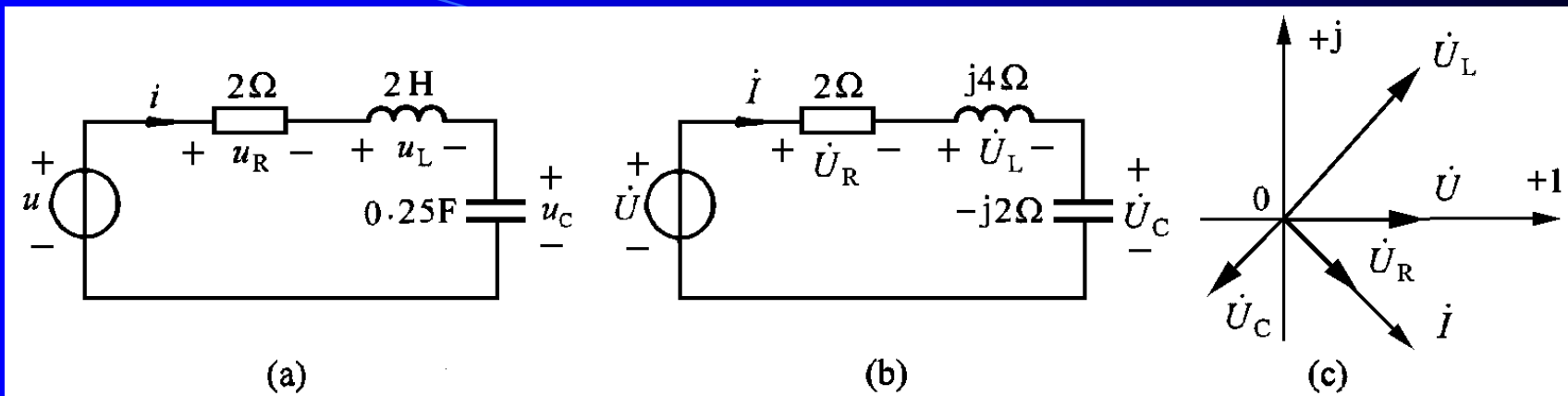


图 10-25

各电压电流的相量图如图(c)所示。从相量图上清楚地看出端口电压 $u(t)$ 的相位超前于端口电流相位 $i(t)$   $45^\circ$ ，表明该 $RLC$ 串联单口网络的端口特性等效于一个电阻与电感的串联，即单口网络具有电感性。从相量图还可以看出

$$U=10\text{V} \neq U_R+U_L+U_C=(7.07+14.14+7.07)\text{V}=28.28\text{V}$$

其中电感电压 $U_L=14.14\text{V}$ 比总电压 $U=10\text{V}$ 还要大，这再次表明电压有效值之间不服从KVL定律。

## 2. 导纳并联电路分析

图 10-26(a) 表示  $n$  个导纳的并联，每个导纳的电压相同，根据相量形式的基尔霍夫电流定律和欧姆定律得到以下关系

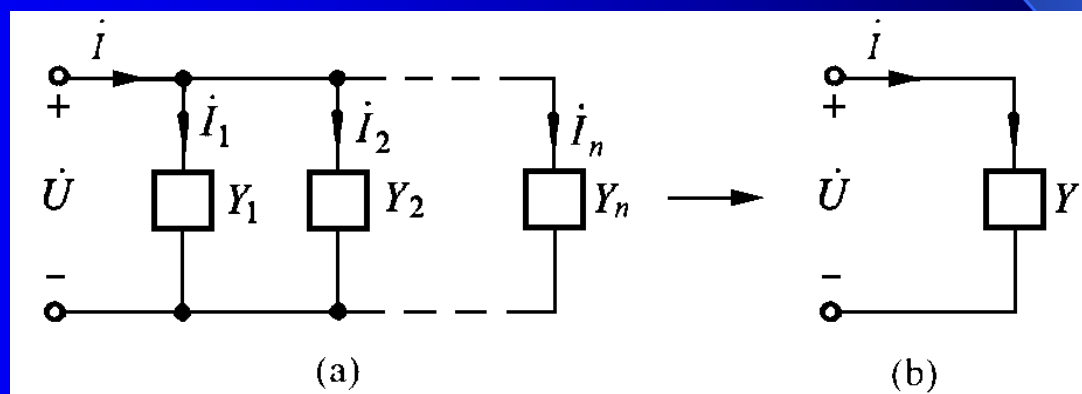
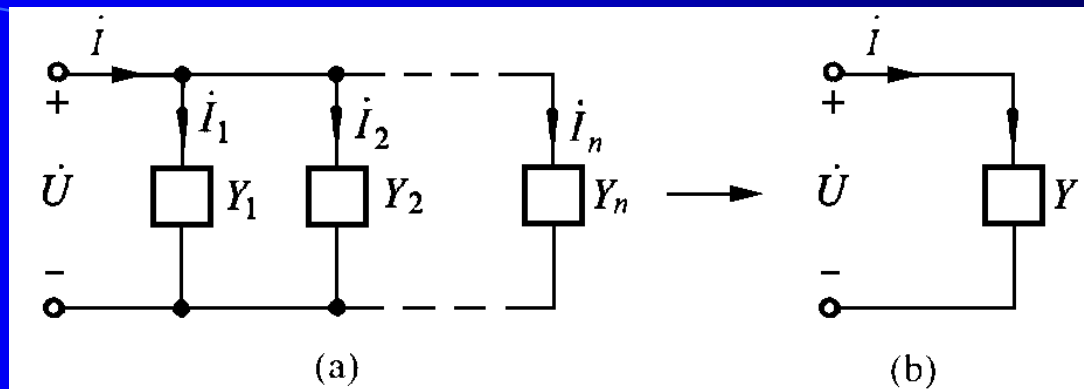


图 10-26

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \cdots + \dot{I}_n = Y_1 \dot{U} + Y_2 \dot{U} + \cdots + Y_n \dot{U} \\ &= (Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n) \dot{U} = Y \dot{U} \quad (10-39)\end{aligned}$$

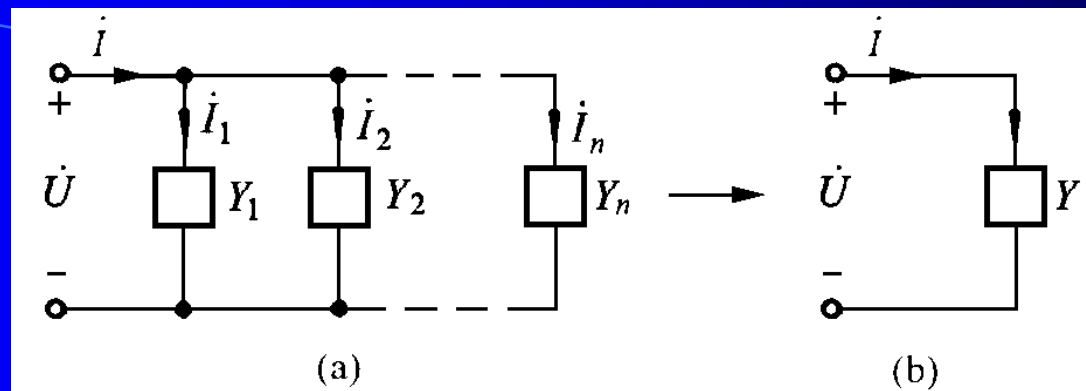


以上计算结果表明 $n$ 个导纳并联组成的单口网络，等效于一个导纳，其等效导纳值等于各并联导纳之和，即

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = \sum_{k=1}^n Y_k \quad (10-40)$$

得到 $n$ 个导纳并联的电压相量与其端口电流相量的关系为

$$\dot{U} = \frac{\dot{I}}{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n} = \frac{\dot{I}}{\sum_{k=1}^n Y_k} \quad (10-41)$$



求得第 $k$ 个导纳中的电流相量与端口电流相量的关系为

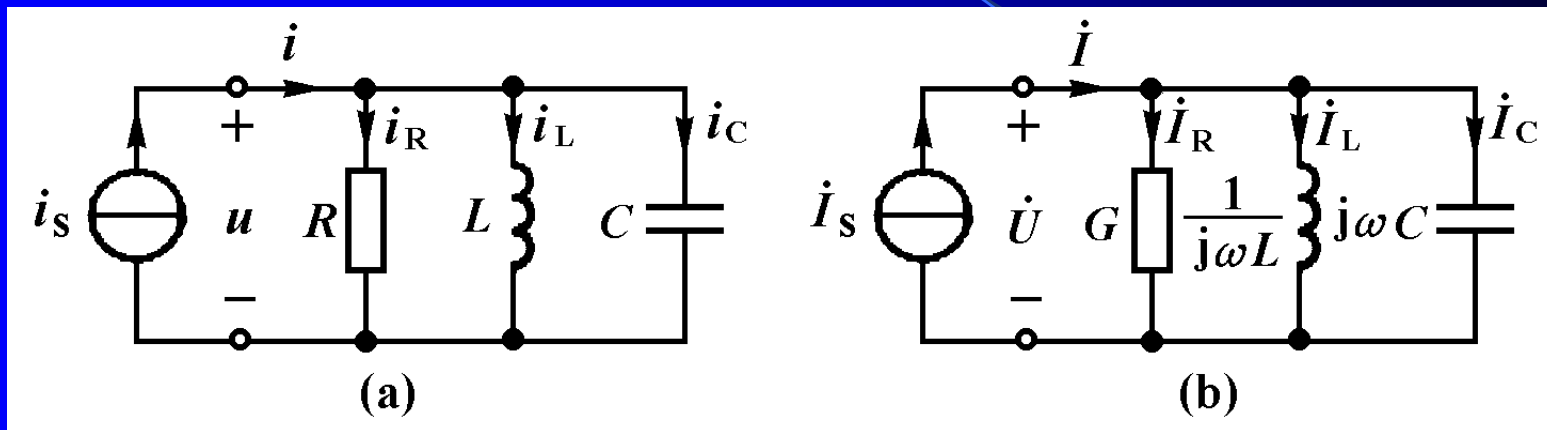
$$\dot{I}_k = Y_k \dot{U} = \frac{Y_k}{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n} \dot{I} = \frac{Y_k}{\sum_{k=1}^n Y_k} \dot{I} \quad (10-42)$$

这个公式称为 $n$ 个导纳并联时的分流公式。常用的两个阻抗并联时的分流公式为

$$\dot{I}_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{I} \quad \dot{I}_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \dot{I} \quad (10-43)$$

以上几个公式与 $n$ 个电导并联时得到的公式相类似。

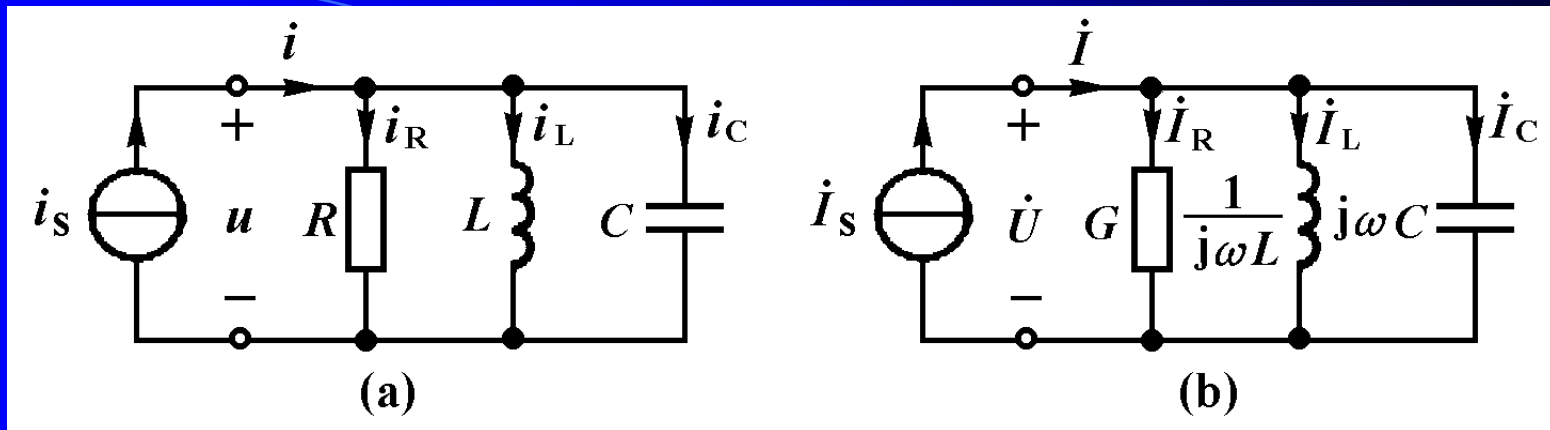
下面用相量法对图(a)所示RLC并联电路进行分析。已知电压 $i(t)=I_m \cos(\omega t+\psi_i)$ ，求各电压电流。



图(a)所示电路的相量模型如图(b)所示。计算出单口网络相量模型的等效导纳

$$Y = Y_R + Y_C + Y_L = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$





计算出电压相量

$$\dot{U} = \frac{\dot{I}}{Y} = \frac{I \angle \psi_i}{G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})} = U \angle \psi_u$$

其中

$$U = \frac{I}{\sqrt{G^2 + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}} \quad \psi_u = \psi_i - \arctan \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}$$

用分流公式计算RLC元件中的电流相量

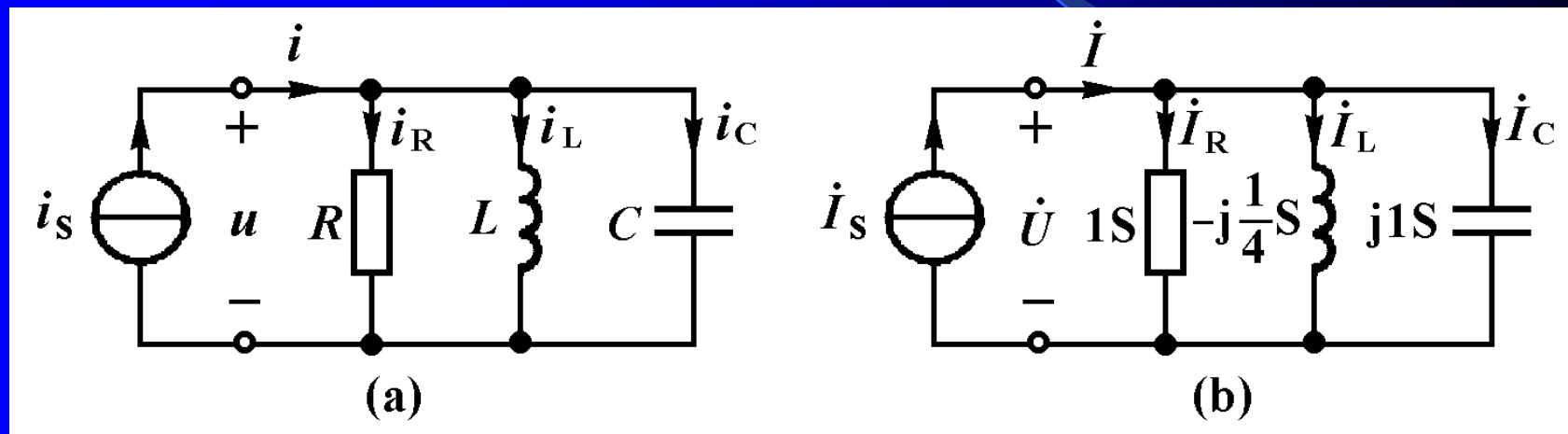
$$\dot{I}_R = \frac{G}{G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})} \dot{I}$$
$$\dot{I}_C = \frac{j\omega C}{G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})} \dot{I}$$
$$\dot{I}_L = \frac{-j\frac{1}{\omega L}}{G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})} \dot{I}$$

根据电压相量和电流相量可以写出电压和电流的瞬时值表达式。

例10-12 已知图10-28(a)所示电路的

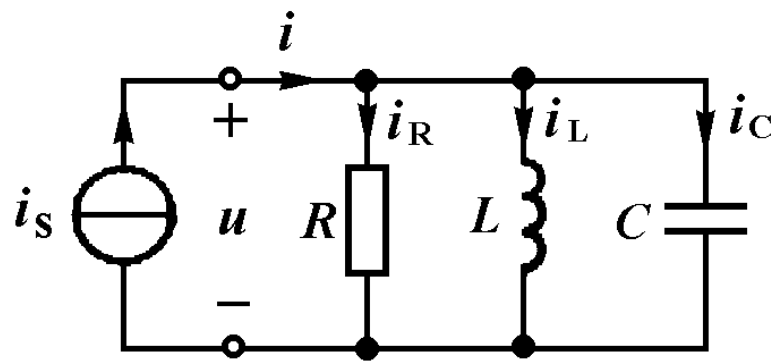
$$i_S(t) = 15\sqrt{2} \cos 2t \text{ A}, R = 1\Omega, L = 2\text{H}, C = 0.5\text{F}$$

试用相量方法计算电路中的 $u(t)$ ,  $i_R(t)$ ,  $i_L(t)$ ,  $i_C(t)$ 。

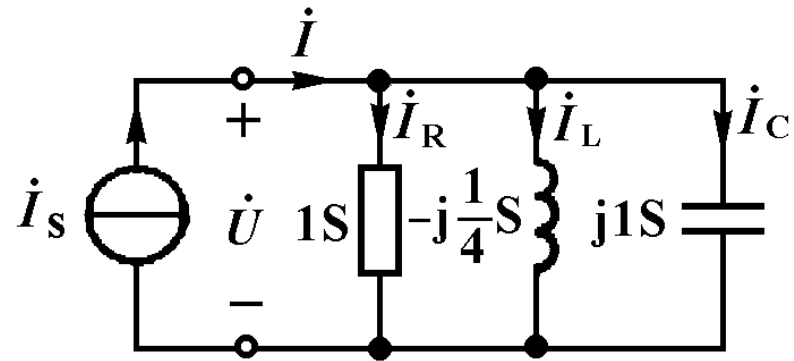


解：图(a)所示电路的相量模型如图(b)所示。求出 $RLC$ 并联电路的等效导纳

$$Y = Y_R + Y_L + Y_C = (1 - j\frac{1}{4} + j1)\text{S} = (1 + j0.75)\text{S} = 1.25\angle 36.9^\circ \text{S}$$



(a)



(b)

求出相量电压

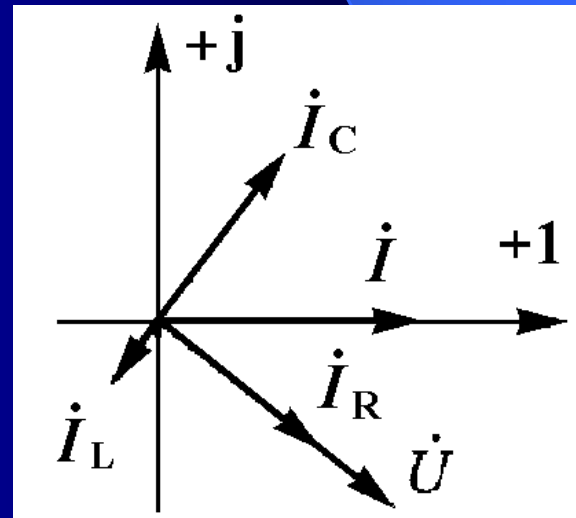
$$\dot{U} = \frac{\dot{I}}{Y} = \frac{15 \angle 0^\circ}{1.25 \angle 36.9^\circ} \text{ V} = 12 \angle -36.9^\circ \text{ V}$$

用分流公式计算RLC元件上的电流相量

$$\dot{I}_R = \frac{1}{1.25 \angle 36.9^\circ} \times 15 \angle 0^\circ \text{ A} = 12 \angle -36.9^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_L = \frac{-j0.25}{1.25 \angle 36.9^\circ} \times 15 \angle 0^\circ \text{ A} = 3 \angle -126.9^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \frac{j1}{1.25 \angle 36.9^\circ} \times 15 \angle 0^\circ \text{ A} = 12 \angle 53.1^\circ \text{ A}$$



$$\dot{I}_R = \frac{1}{1.25 \angle 36.9^\circ} \times 15 \angle 0^\circ \text{ A} = 12 \angle -36.9^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_L = \frac{-j0.25}{1.25 \angle 36.9^\circ} \times 15 \angle 0^\circ \text{ A} = 3 \angle -126.9^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \frac{j1}{1.25 \angle 36.9^\circ} \times 15 \angle 0^\circ \text{ A} = 12 \angle 53.1^\circ \text{ A}$$

根据以上电压电流相量得到相应的瞬时值表达式

$$u(t) = 12\sqrt{2} \cos(2t - 36.9^\circ) \text{ V}$$

$$i_R(t) = 12\sqrt{2} \cos(2t - 36.9^\circ) \text{ A}$$

$$i_L(t) = 3\sqrt{2} \cos(2t - 126.9^\circ) \text{ A}$$

$$i_C(t) = 12\sqrt{2} \cos(2t + 53.1^\circ) \text{ A}$$

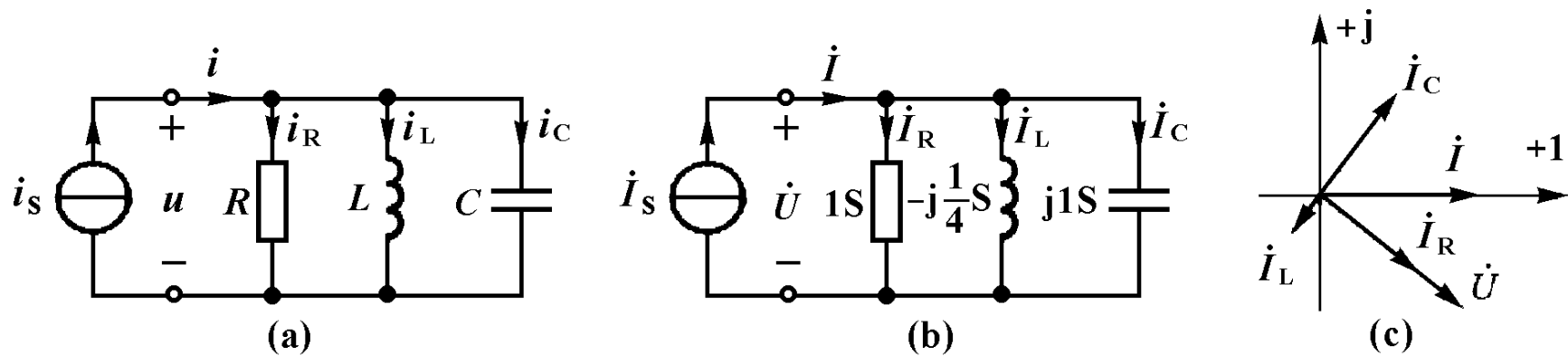


图 10-28

各电压电流的相量图如图(c)所示。从相量图上清楚地看出端口电流的相位超前于端口电压相位 $36.9^\circ$ ，表明该RLC并联单口网络的端口特性等效于一个电阻与电容的并联，该单口网络具有电容性。从计算结果和相量图均可以看出

$$I = 15\text{A} \neq I_R + I_L + I_C = (12 + 3 + 12)\text{A} = 27\text{A}$$

再次表明电流有效值之间不服从KCL定律。

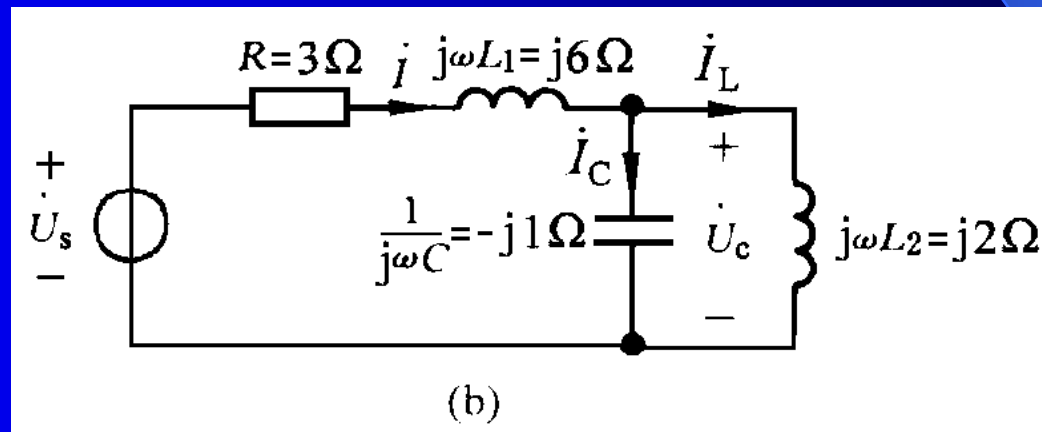
例10-13 图10-29示电路与例10-10中讨论的电路完全相同。

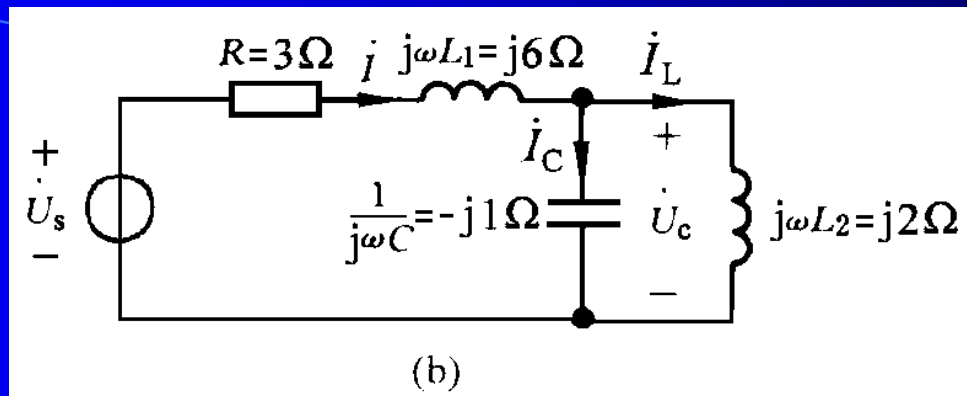
已知电压源电压为

$$u_S(t) = 10\sqrt{2} \cos \omega t \text{ V}, \quad \omega = 10 \text{ rad/s}$$

试求各电压电流。

图 10-29





解：该电路既有阻抗的串联，又有阻抗的并联，我们可以用阻抗联和并联的等效阻抗公式，求出连接于电压源的阻抗混联单口网络的等效阻抗

$$Z = \left[ 3 + j6 + \frac{j2 \times (-j1)}{j2 - j1} \right] \Omega$$

$$= (3 + j6 - j2) \Omega = (3 + j4) \Omega = 5 \angle 53.1^\circ \Omega$$

计算出电流相量

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{10 \angle 0^\circ}{5 \angle 53.1^\circ} \text{ A} = 2 \angle -53.1^\circ \text{ A}$$



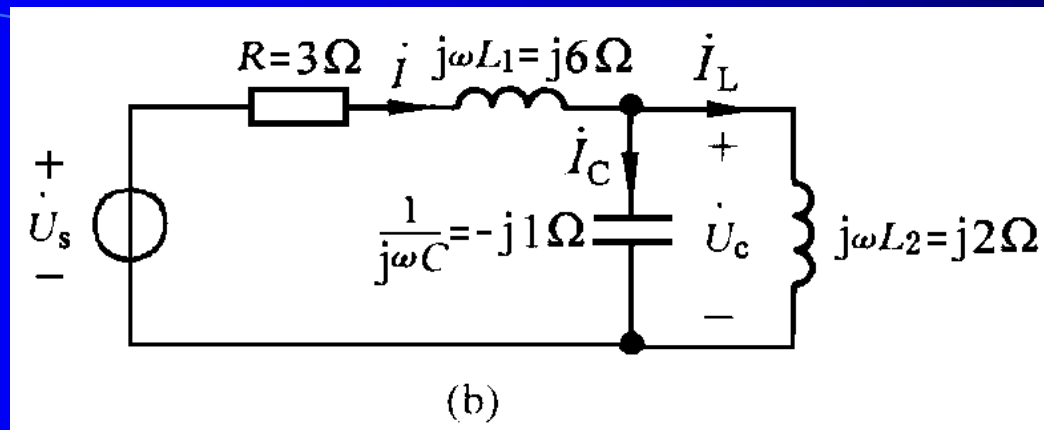


图 10-29

用两个阻抗并联的分流公式，计算出

$$\dot{I}_C = \frac{Z_L}{Z_L + Z_C} \dot{I} = \frac{j2}{j2 - j1} \times 2 \angle -53.1^\circ \text{ A} = 4 \angle -53.1^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_L = \frac{Z_C}{Z_L + Z_C} \dot{I} = \frac{-j1}{j2 - j1} \times 2 \angle -53.1^\circ \text{ A} = 2 \angle 126.9^\circ \text{ A}$$

用相量形式的欧姆定律，求出电容电压和电感电压相量

$$\dot{U}_C = Z_C \dot{I}_C = -j1 \times 4 \angle -53.1^\circ \text{ V} = 4 \angle -143.1^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_L = Z_L \dot{I}_L = j2 \times 2 \angle 126.9^\circ \text{ V} = 4 \angle 216.9^\circ \text{ V} = 4 \angle -143.1^\circ \text{ V}$$

由于电容与电感并联，电容电压与电感电压应该相同。

本题也可以利用线性电路叠加定理来计算各电压电流。因为本题电压源电压幅度是图10-22电路中电压幅度的2倍，初相增加 $126.9^\circ$ ，现将图10-22电路中各电压电流幅度增加到2倍，初相增加 $126.9^\circ$ ，即可得到本题的电压电流。例如图10-22电路中电容电压为

$$\dot{U}_C = j2 = 2\angle 90^\circ \text{ V} \quad u_C(t) = 2\sqrt{2} \cos(10t + 90^\circ) \text{ V}$$

本题中的电容电压为

$$\begin{aligned} \dot{U}_C &= 2 \times 2\angle(90^\circ + 126.9^\circ) \text{ V} = 4\angle 216.9^\circ \text{ V} = 4\angle -143.1^\circ \text{ V} \\ u_C(t) &= 2 \times 2\sqrt{2} \cos(10t + 90^\circ + 126.9^\circ) \text{ V} \\ &= 4\sqrt{2} \cos(10t - 143.1^\circ) \text{ V} \end{aligned}$$

## § 10-6 一般正弦稳态电路分析

从以上几节讨论中可以看到，由于相量形式的基尔霍夫定律和欧姆定律与电阻电路中同一定律的形式完全相同，分析线性电阻电路的一些公式和方法完全可以用到正弦稳态电路的分析中来。其差别仅仅在于电压电流用相应的相量替换，电阻和电导用阻抗和导纳替换。本节将举例说明支路分析，网孔分析，结点分析，叠加定理和戴维宁-诺顿定理在正弦稳态分析中的应用。

例10-14 图10-30(a)电路中，已知

$$u_{S1}(t) = 3\sqrt{2} \cos \omega t \text{ V}, u_{S2}(t) = 4\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}, \omega = 2 \text{ rad/s}$$

试求电流  $i_1(t)$

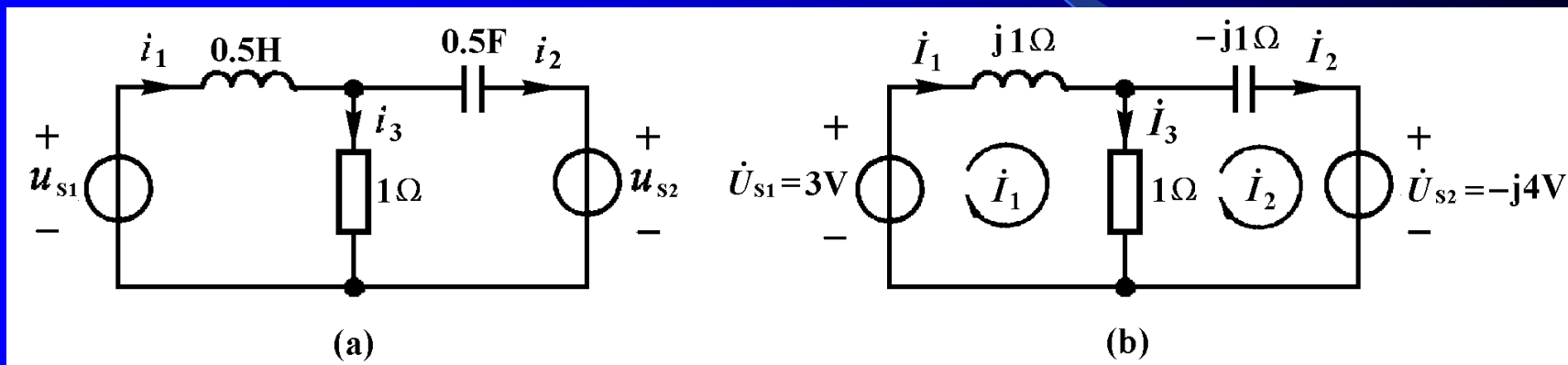


图 10-30

解：先画出电路的相量模型，如(b)所示，其中

$$\dot{U}_{S1} = 3\angle 0^\circ \text{ V}, \quad \dot{U}_{S2} = -j4\text{V} = 4\angle -90^\circ \text{ V}$$

$$j\omega L = j1\Omega, \quad \frac{1}{j\omega C} = -j1\Omega$$

## 1. 支路分析

以支路电流作为变量，列出图(b)所示相量模型的KCL和KVL方程

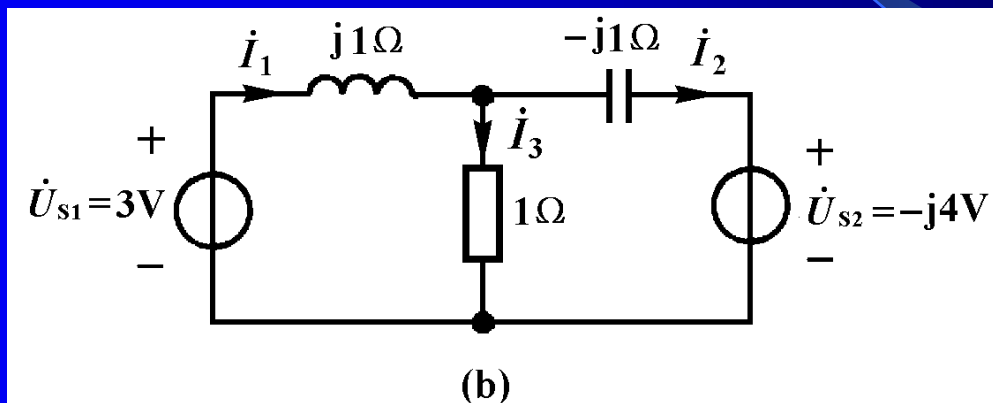


图 10-30

$$\begin{cases} -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0 \\ j\dot{I}_1 + \dot{I}_3 = 3\angle 0^\circ \\ -j\dot{I}_2 - \dot{I}_3 = j4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0 \\ \mathrm{j}\dot{I}_1 + \dot{I}_3 = 3\angle 0^\circ \\ -\mathrm{j}\dot{I}_2 - \dot{I}_3 = \mathrm{j}4 \end{cases}$$

求解得到

$$\dot{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ \mathrm{j}4 & -\mathrm{j} & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \mathrm{j} & 0 & 1 \\ 0 & -\mathrm{j} & -1 \end{vmatrix}} \mathrm{A} = \frac{\mathrm{j}4 - \mathrm{j}3 + 3}{1 - \mathrm{j} + \mathrm{j}} \mathrm{A} = (3 + \mathrm{j}1) \mathrm{A} = 3.162\angle 18.43^\circ \mathrm{A}$$

由电流相量得到相应的瞬时值表达式

$$i_1(t) = 3.162\sqrt{2}\cos(2t + 18.43^\circ) \mathrm{A}$$

## 2. 网孔分析

假设网孔电流如图 (b) 所示，用观察法列出网孔电流方程

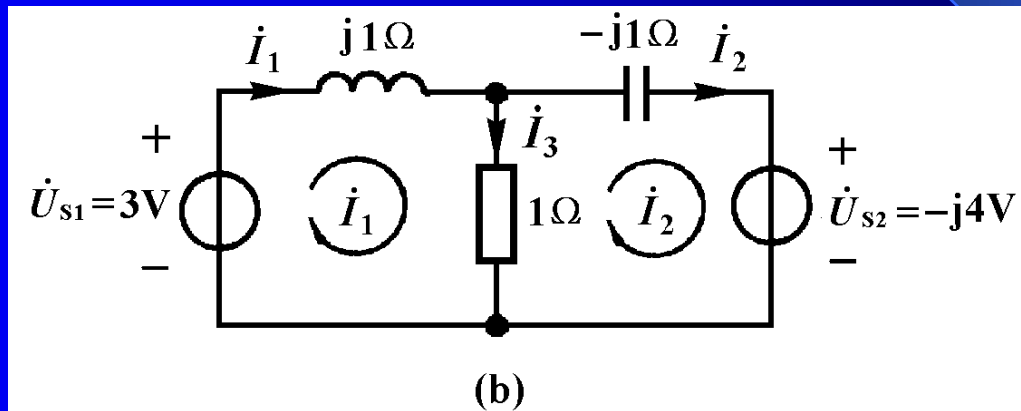


图 10-30

$$\begin{cases} (1 + j1)\dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 3\angle 0^\circ \\ -\dot{I}_1 + (1 - j1)\dot{I}_2 = j4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 + j1)\dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 3\angle 0^\circ \\ -\dot{I}_1 + (1 - j1)\dot{I}_2 = j4 \end{cases}$$

求解得到

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ j4 & 1-j1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+j1 & -1 \\ -1 & 1-j1 \end{vmatrix}} \text{ A} \\ &= \frac{3 - j3 + j4}{2 - 1} \text{ A} = (3 + j1) \text{ A} = 3.162\angle 18.43^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

由电流相量得到相应的瞬时值表达式

$$i_1(t) = 3.162\sqrt{2} \cos(2t + 18.43^\circ) \text{ A}$$



### 3. 结点分析

为了便于列写电路的结点电压方程，画出采用**导纳参数**的相量模型，如图10-31所示，其中

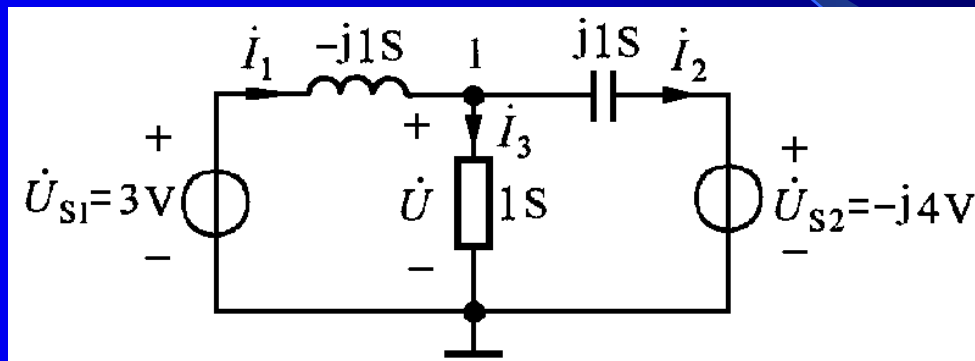


图 10-31

$$\frac{1}{j\omega L} = -j1S, j\omega C = j1S$$

选择参考结点如图所示，用观察法列出结点电压方程

$$(1 - j1 + j1)\dot{U} - (-j1) \times 3 - j1 \times (-j4) = 0$$

$$(1 - j1 + j1)\dot{U} - (-j1) \times 3 - j1 \times (-j4) = 0$$

求解得到

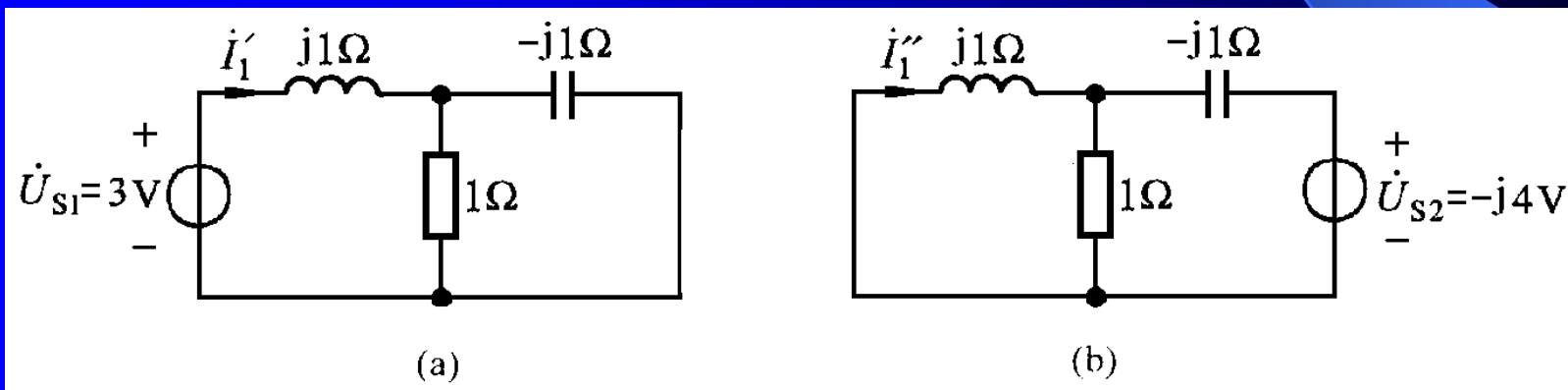
$$\begin{aligned}\dot{U} &= -j1 \times 3 + j1 \times (-j4) \\ &= 4 - j3 = 5 \angle -36.9^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

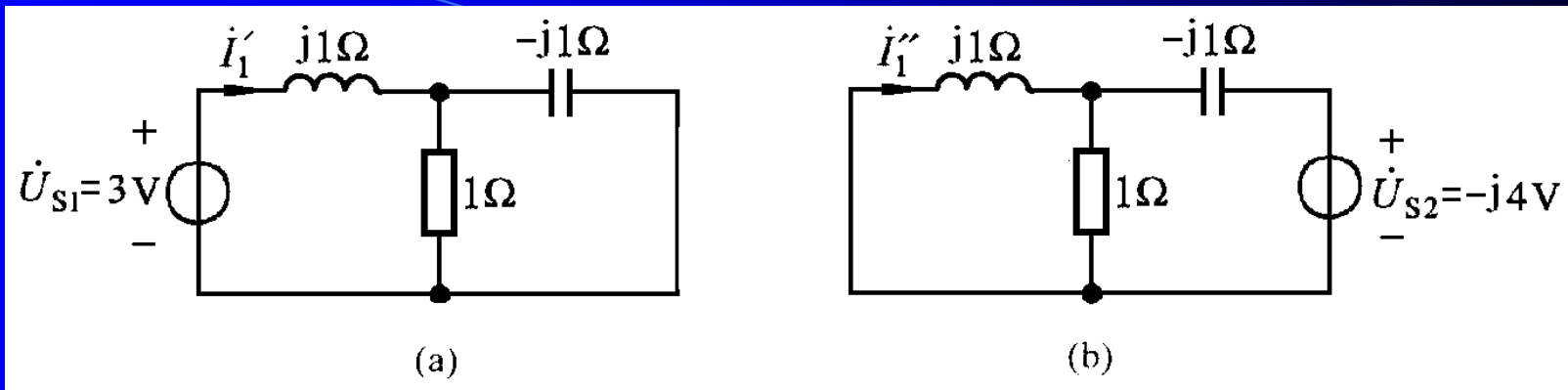
最后求得电流

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= -j1 \times (\dot{U}_{S1} - \dot{U}) \\ &= -j1 \times (3 - 4 + j3) = 3 + j1 = 3.162 \angle 18.43^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

## 4. 叠加定理

叠加定理适用于线性电路，也可以用于正弦稳态分析。画出两个独立电压源单独作用的电路，如图10-32所示。





用分别计算每个独立电压源单独作用产生的电流相量，  
然后相加的方法得到电流相量

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_1 &= \dot{I}_1' + \dot{I}_1'' = \frac{\dot{U}_{S1}}{j1 + \frac{1 \times (-j1)}{1 - j1}} + \frac{-\dot{U}_{S2}}{-j1 + \frac{1 \times j1}{1 + j1}} \times \frac{1}{1 + j1} \\
 &= \frac{3}{j1 + 0.5 - j0.5} + \frac{j4}{1 + j1 - j1} = 3 + j1 = 3.126 \angle 18.43^\circ \text{ A}
 \end{aligned}$$

## 5. 戴维宁定理

戴维宁定理告诉我们：含独立源的单口网络相量模型可以一个电压源和阻抗 $Z_0$ 串联电路代替，而不会影响电路其余部分的电压和电流相量。

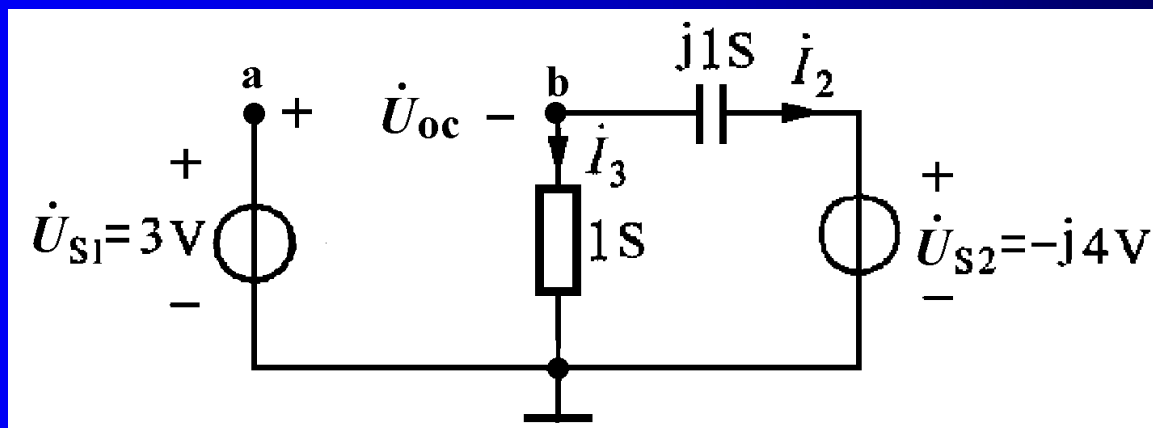
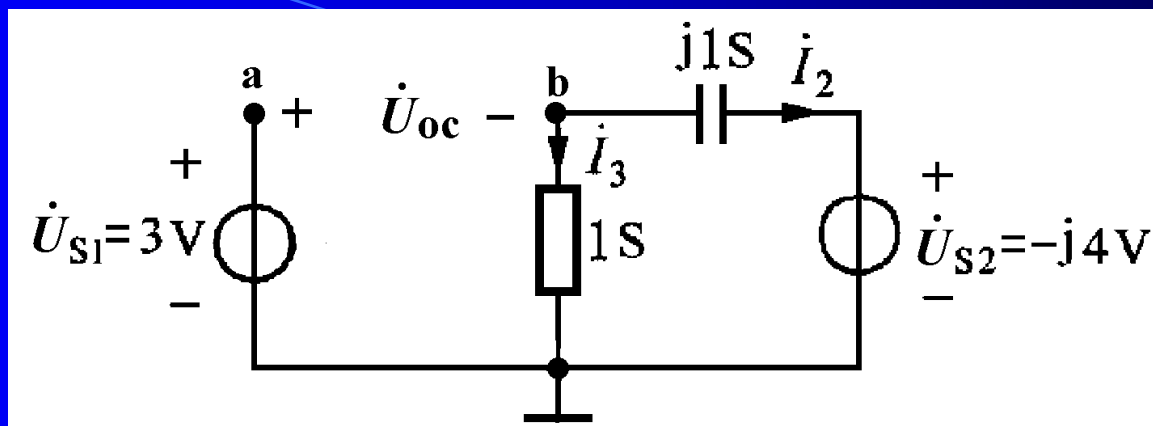


图 10-33



先求出连接电感的单口网络的戴维宁等效电路。

(1) 断开电感支路得到图(a)电路，由此求得端口的开

路电压

$$\begin{aligned} \dot{U}_{oc} &= \dot{U}_{S1} - \frac{1}{1-j1} \times \dot{U}_{S2} \\ &= 3 - \frac{-j4}{1-j1} = 3 - (2-j2) = 1+j2 \end{aligned}$$

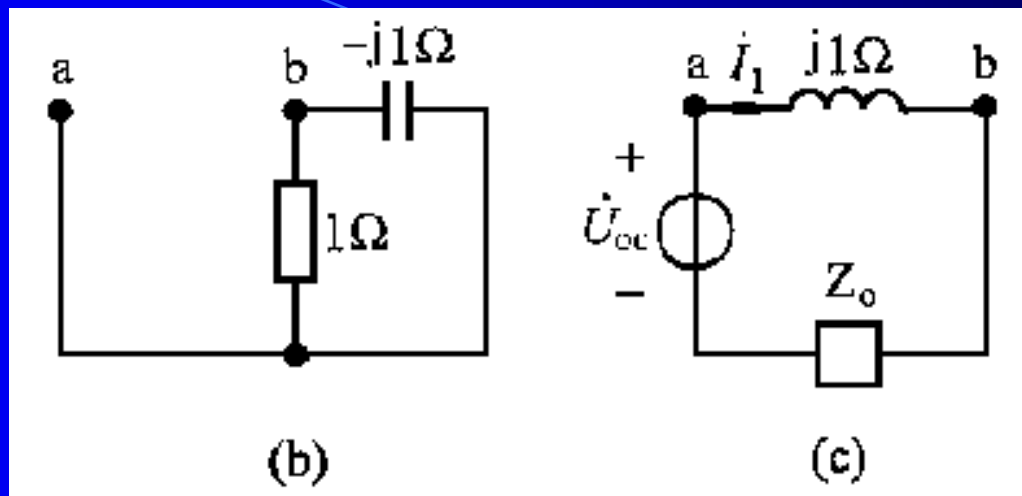
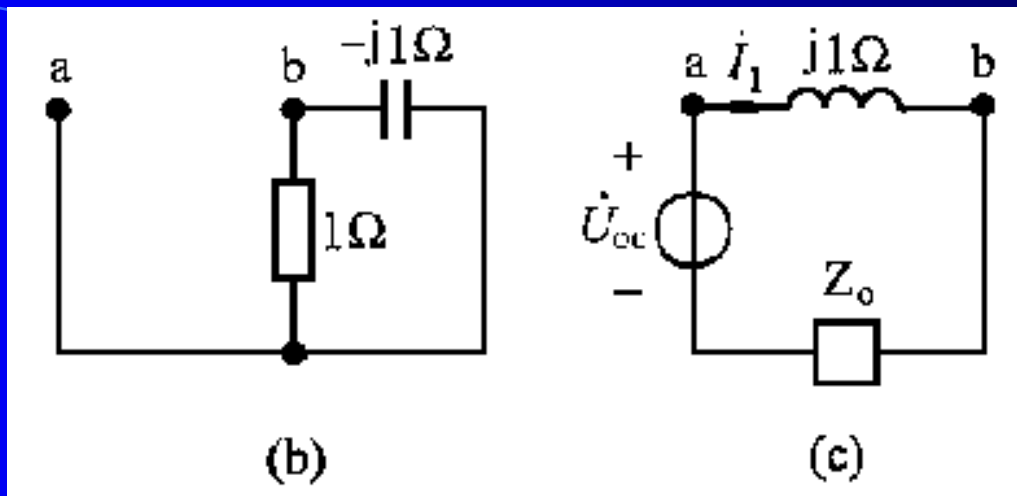


图 10-33

(2) 将图10-33(a)电路中两个独立电压源用短路代替，得到图(b)电路，由此求得单口网络的输出阻抗

$$Z_o = \frac{1 \times (-j1)}{1 - j1} = \frac{-j1 \times (1 + j1)}{2} = (0.5 - j0.5)\Omega$$



用戴维宁电路代替单口网络得到图(c)所示电路，由此求得

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_1 &= \frac{\dot{U}_{oc}}{Z_o + j1} \\
 &= \frac{1 + j2}{0.5 - j0.5 + j1} = \frac{1 + j2}{0.5 + j0.5} \\
 &= 3 + j1 = 3.162 \angle 18.43^\circ \text{ A}
 \end{aligned}$$



例10-15 电路如图10-34(a)所示, 已知 $R_1=5\Omega$ ,  $R_2=10\Omega$ ,

$$L_1=L_2=10\text{mH}, C=100\mu\text{F}, i_{s1}(t) = \sqrt{2} \cos(\omega t + 30^\circ)\text{A}$$

$$u_{s2}(t) = 10\sqrt{2} \cos\omega t \text{ V}, u_{s3}(t) = 15\sqrt{2} \cos(\omega t + 45^\circ)\text{V}, \omega = 10^3 \text{ rad/s}$$

试用网孔分析和结点分析计算电流 $i_2(t)$

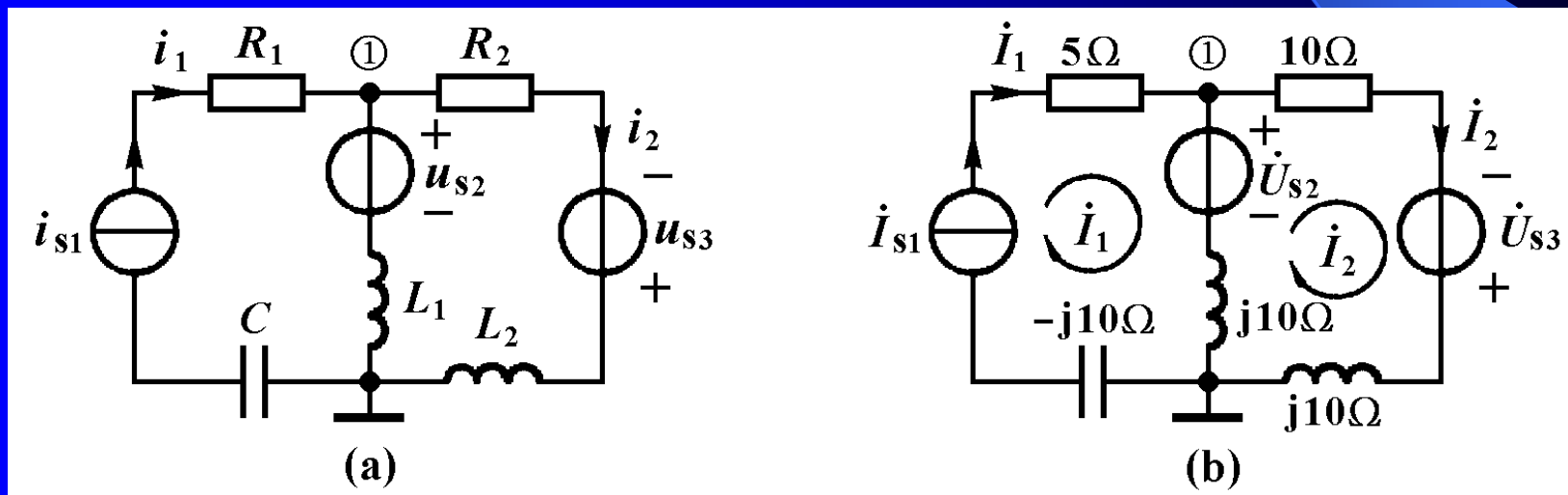


图 10-34

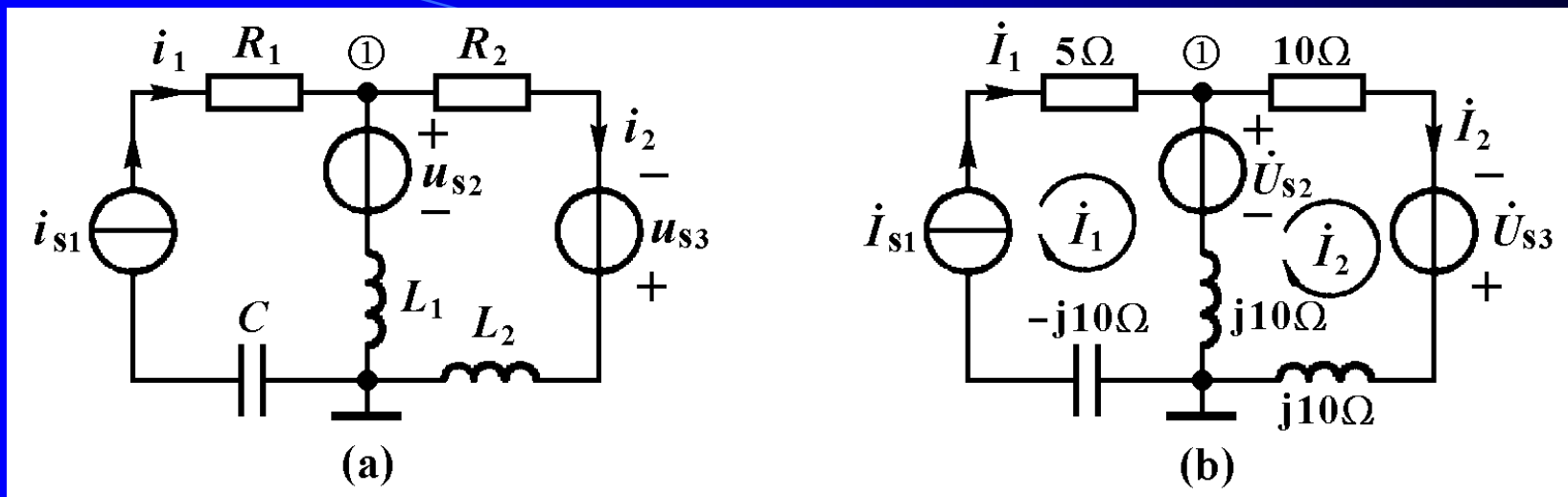


图 10-34

解：画出图(a)电路的相量模型，如图(b)所示，其中

$$\dot{I}_{s1} = 1 \angle 30^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_{s2} = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{s3} = 15 \angle 45^\circ \text{ V}$$

$$j\omega L_1 = j\omega L_2 = j10\Omega$$

$$\frac{1}{j\omega C} = -j10\Omega$$

## 1. 网孔分析

设两个网孔电流如图(b)所示。

$$\dot{U}_{S2} = 10\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{S3} = 15\angle 45^\circ \text{ V}$$

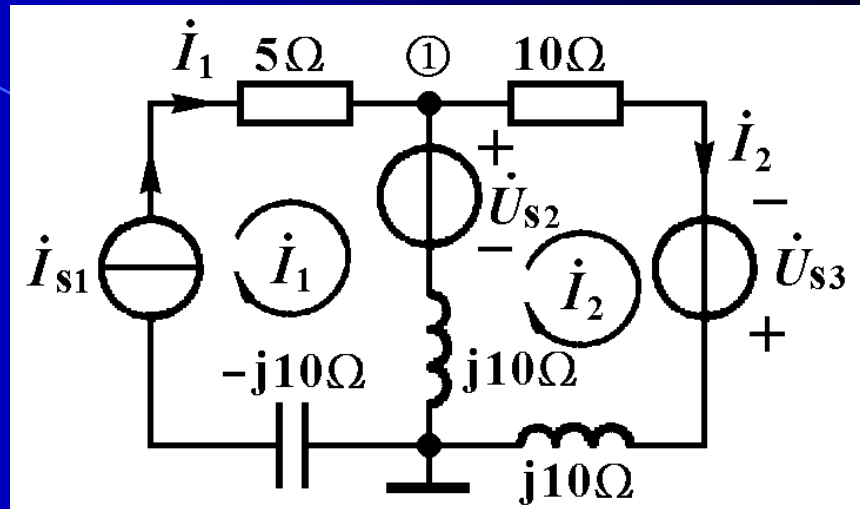


图 10-34

用观察法直接列出网孔电

流方程

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = 1\angle 30^\circ \text{ A} \\ -j10\dot{I}_1 + (10 + j20)\dot{I}_2 = 15\angle 45^\circ + 10\angle 0^\circ \end{cases}$$

求解得到

$$\dot{I}_2 = 1.109\angle -12.44^\circ \text{ A}$$

$$i_2(t) = 1.109\sqrt{2} \cos(10^3 t - 12.44^\circ) \text{ A}$$

## 2. 结点分析

将图(b)相量模型中的电压源和阻抗串联单口网络等效变换为电流源和阻抗的并联后。

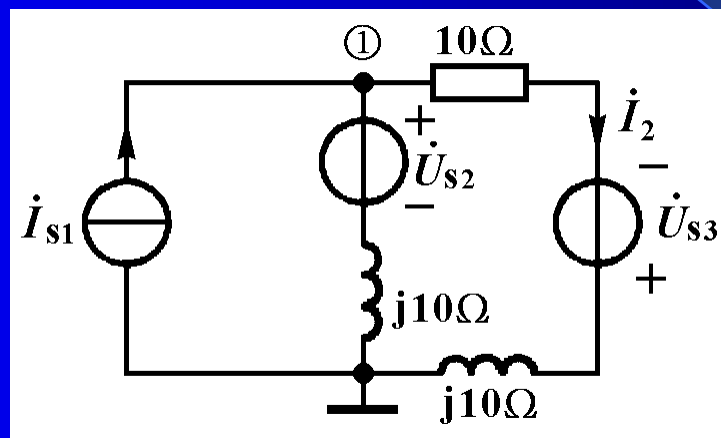


图 10-34

$$\dot{U}_{s2} = 10 \angle 0^\circ \text{V}, \dot{U}_{s3} = 15 \angle 45^\circ \text{V}$$

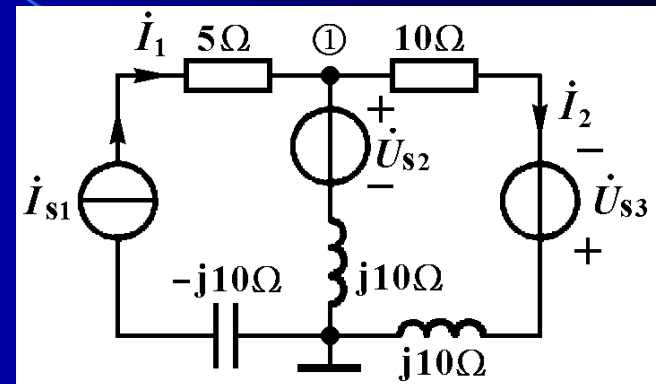
用观察法直接列出结点电压方程

$$\left( \frac{1}{j10} + \frac{1}{10 + j10} \right) \dot{U}_1 = 1 \angle 30^\circ + \frac{10 \angle 0^\circ}{j10} - \frac{15 \angle 45^\circ}{10 + j10}$$

$$\left( \frac{1}{j10} + \frac{1}{10 + j10} \right) \dot{U}_1 = 1 \angle 30^\circ + \frac{10 \angle 0^\circ}{j10} - \frac{15 \angle 45^\circ}{10 + j10}$$

求解得到

$$\dot{U}_1 = 3.39 \angle -39.7^\circ \text{ V}$$



再用相量形式的KVL方程求出电流

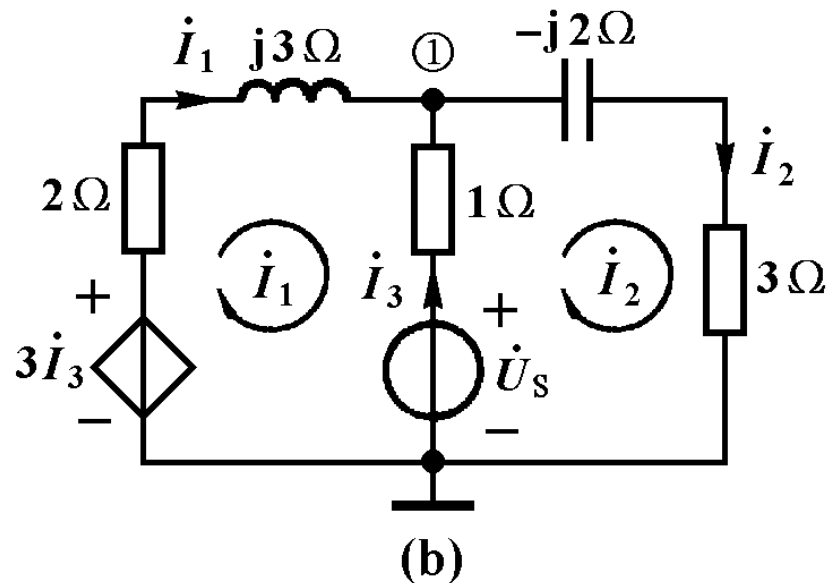
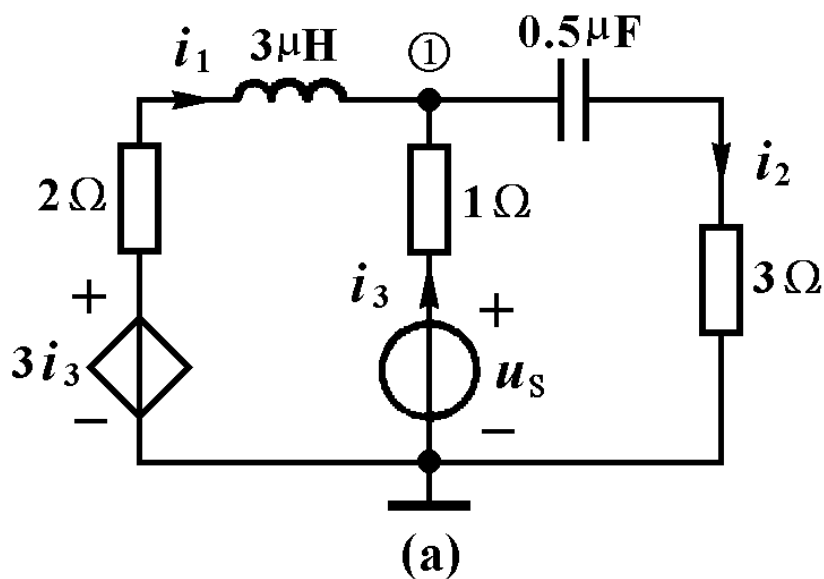
$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= \frac{\dot{U}_1 + \dot{U}_{s3}}{R_2 + j\omega L_2} \\ &= \frac{3.39 \angle -39.7^\circ + 15 \angle 45^\circ}{10 + j10} \text{ A} = 1.109 \angle -12.4^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

$$i_2(t) = 1.109\sqrt{2} \cos(10^3 t - 12.4^\circ) \text{ A}$$

例10-16 电路如图10-35(a)所示, 已知

$$u_S(t) = 5\sqrt{2} \cos(\omega t + 30^\circ) \text{ V}, \omega = 10^6 \text{ rad/s}$$

试用网孔分析、结点分析和戴维宁定理计算电流 $i_2(t)$ 。



解: 画出图(a)的相量模型, 如图(b)所示, 其中

$$\dot{U}_S = 5\angle 30^\circ \text{ V}$$

## 1.网孔分析

设两个网孔电流  $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ ，用观察法直接列出网孔电流方程

$$\begin{cases} (3 + j3)\dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 3\dot{I}_3 - 5\angle 30^\circ \\ -\dot{I}_1 + (4 - j2)\dot{I}_2 = 5\angle 30^\circ \end{cases}$$

代入

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_2 - \dot{I}_1$$

得到以下方程

$$\begin{cases} (6 + j3)\dot{I}_1 - 4\dot{I}_2 = -5\angle 30^\circ \\ -\dot{I}_1 + (4 - j2)\dot{I}_2 = 5\angle 30^\circ \end{cases}$$

求解得到

$$\dot{I}_2 = 1.121\angle 60.96^\circ \text{ A}$$

$$i_2(t) = 1.121\sqrt{2} \cos(10^6 t + 60.96^\circ) \text{ A}$$

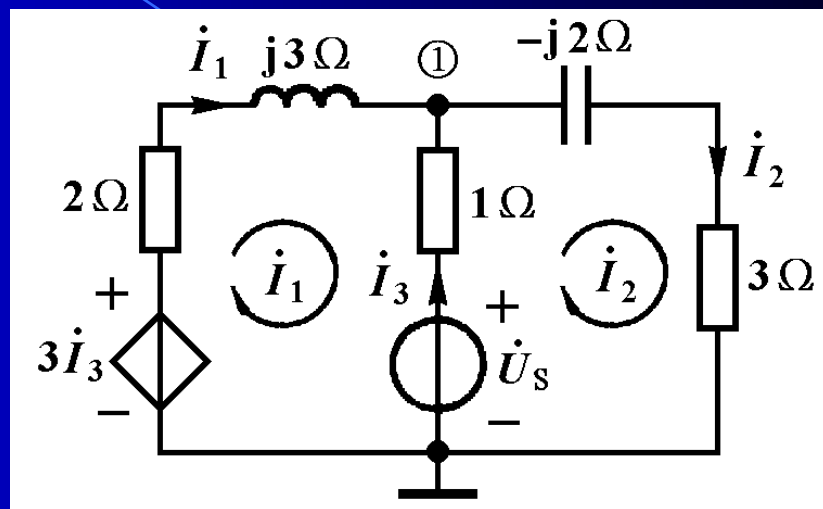


图 10-35

$$\dot{U}_S = 5\angle 30^\circ \text{ V}$$

## 2. 结点分析

将电压源和阻抗串联单口网络等效变换为电流源和阻抗的并联后，再列出结点电压方程

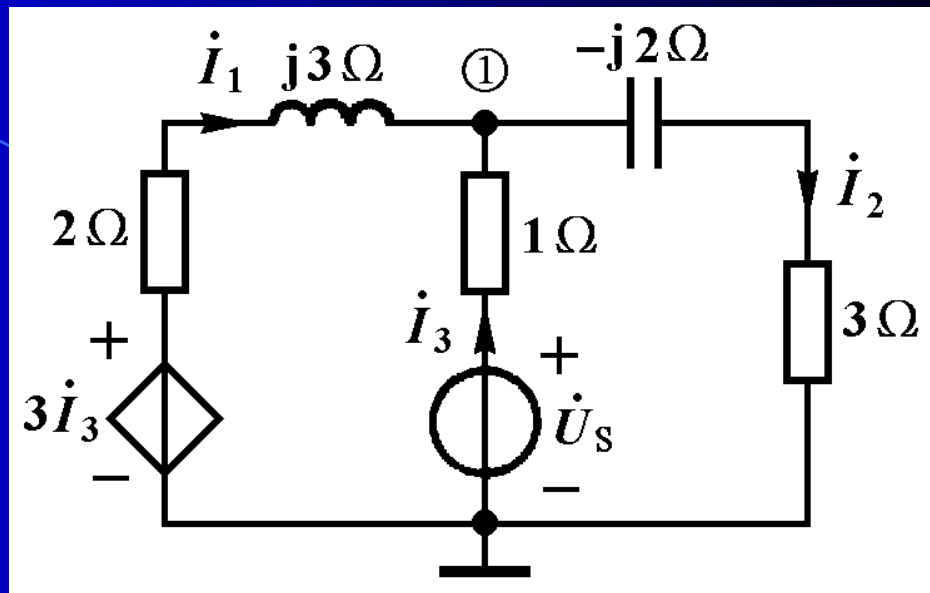


图 10-35(b)

$$\left( \frac{1}{2+j3} + 1 + \frac{1}{3-j2} \right) \dot{U}_1 = \frac{3\dot{I}_3}{2+j3} + \frac{5\angle 30^\circ}{1}$$

代入

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_s - \dot{U}_1}{1} = 5\angle 30^\circ - \dot{U}_1$$

求解得到  $\dot{U}_1 = 4.043 \angle 27.27^\circ \text{ V}$      $\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{3-j2} = 1.12 \angle 60.96^\circ \text{ A}$



### 3.用戴维宁定理求解

(1) 由图 10-35(c) 电路求端口的开路电压  $\dot{U}_{oc}$ 。先用网孔方程求电流  $\dot{I}_3$

$$(3 + j3)\dot{I}_3 + 3\dot{I}_3 = 5\angle 30^\circ$$

求解得到 
$$\dot{I}_3 = \frac{5\angle 30^\circ}{6 + j3} \text{ A}$$

$$\dot{U}_{oc} = -(1\Omega)\dot{I}_3 + \dot{U}_s = \frac{5 + j3}{6 + j3} \times 5\angle 30^\circ \text{ V} = 4.346 \angle 34.4^\circ \text{ V}$$

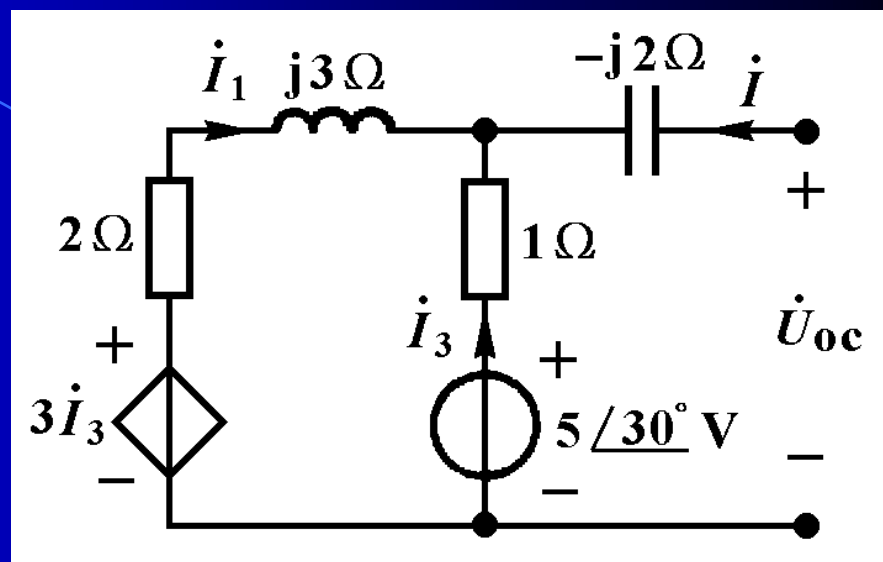


图 10-35(c)

(2) 用外加电流源求端口电压的方法，由图10-35(d)电路求输出阻抗 $Z_0$ 。列出支路电流方程

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_3 + \dot{I} = 0 & (1) \\ (2 + j3)\dot{I}_1 - 4\dot{I}_3 = 0 & (2) \\ -j2\dot{I} - \dot{I}_3 = \dot{U} & (3) \end{cases}$$

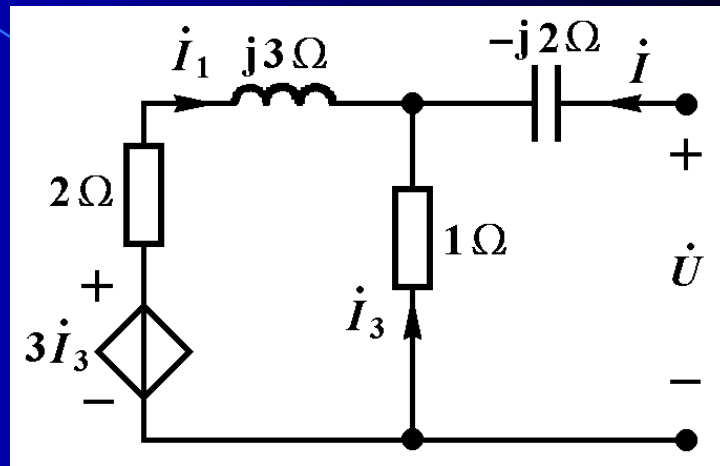


图 10-35(d)

由式(1)、(2)得到

$$\dot{I}_3 = \frac{-(2 + j3)}{6 + j3} \dot{I}$$

代入式(3)得到

$$\dot{U} = -j2\dot{I} + \frac{2 + j3}{6 + j3} \dot{I} = \frac{8 - j9}{6 + j3} \dot{I}$$

$$Z_0 = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{8 - j9}{6 + j3} \Omega = 1.795 \angle -74.93^\circ \Omega$$

得到图10-35(e)所示等效电路

$$\dot{U}_{oc} = \frac{5 + j3}{6 + j3} \times 5 \angle 30^\circ \text{ V} = 4.346 \angle 34.4^\circ \text{ V}$$

$$Z_o = \frac{8 + j9}{6 + j3} \Omega = 1.795 \angle -74.93^\circ \Omega$$

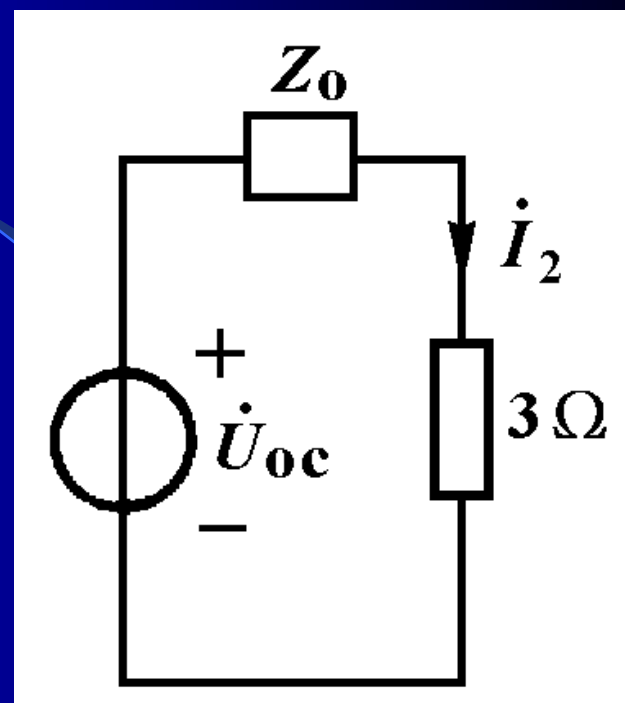
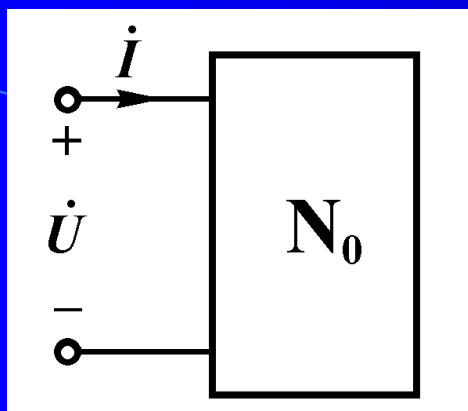


图 10-35(e)

由图10-35(e)求得

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{oc}}{Z_o + 3\Omega} = \frac{5 + j3}{26} \times 5 \angle 30^\circ \text{ A} = 1.12 \angle 60.96^\circ \text{ A}$$

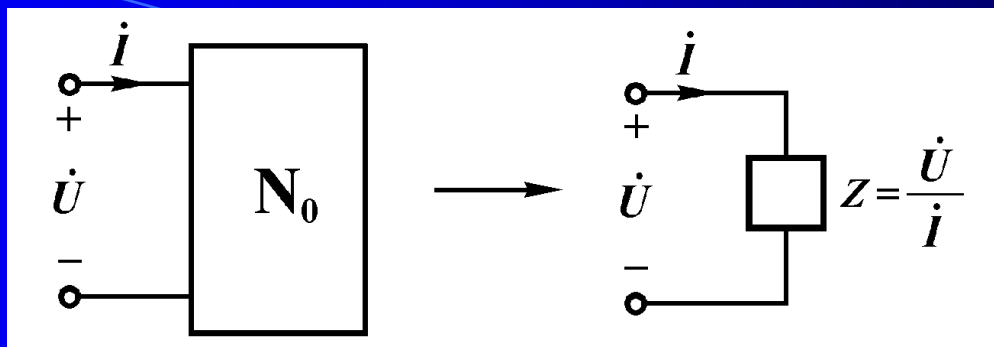
## § 10-7 单口网络相量模型的等效



两个单口网络相量模型的端口电压电流关系相同时，称此两个单口网络等效。

### 一、阻抗和导纳

我们已经知道阻抗和导纳是正弦稳态分析中的两个重要概念，它们可以用来表示 $RLC$ 元件以及由这些元件组成的单口网络的特性。现在将这两个概念推广到一般单口网络的相量模型，正式给出它们的定义。

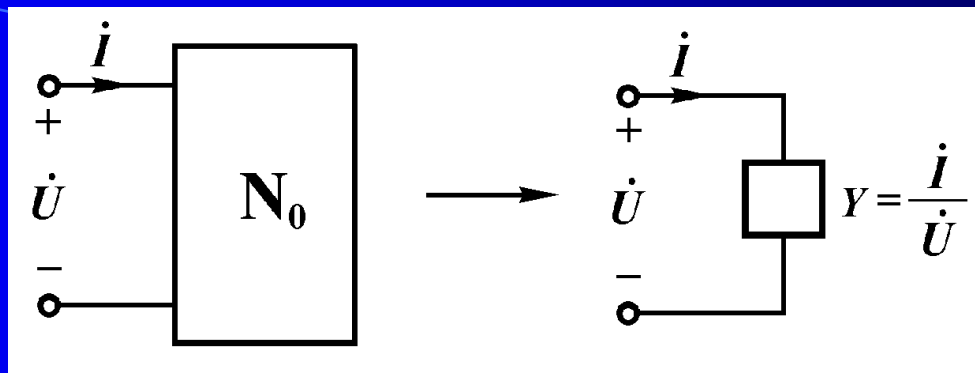


假设端口电压与电流相量采用关联的参考方向，其电压相量与电流相量之比为一个常量，这个常量称为阻抗，即

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + jX = |Z| \angle \varphi \quad (10-44)$$

阻抗是一个复数，其实部 $R$ 称为**电阻分量**，虚部 $X$ 称为**电抗分量**，阻抗的幅角 $\varphi = \psi_u - \psi_i$ 称为阻抗角，它表示端口正弦电压 $u(t)$ 与正弦电流 $i(t)$ 的相位差。上式可以改写以下形式

$$\dot{U} = Z\dot{I} \quad (10-45)$$



与阻抗相似，在端口电压与电流相量采用关联参考方向的条件下，其**电流相量与电压相量之比为一个常量**，这个常量称为**导纳**，即

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = G + jB = |Y| \angle -\varphi \quad (10-46)$$

导纳是一个复数，其实部 $G$ 称为**电导分量**，虚部 $B$ 称为**电纳分量**，导纳的幅角 $-\varphi = \psi_i - \psi_u$ 表示端口正弦电流 $i(t)$ 与正弦电压 $u(t)$ 的相位差。上式可以改写以下形式

$$\dot{I} = Y\dot{U} \quad (10-47)$$

从以上几个公式中可以得到以下关系

$$\dot{U} = Z\dot{I} = R\dot{I} + jX\dot{I} \quad \dot{I} = Y\dot{U} = G\dot{U} + jB\dot{U}$$

此式表明：就单口网络的相量模型的端口特性而言，可以用一个电阻和电抗元件的串联电路或用一个电导和电纳元件的并联电路来等效。

同一个单口网络相量模型的阻抗与导纳之间存在倒数关系，即

$$Z = \frac{1}{Y} \quad Y = \frac{1}{Z} \quad (10-48)$$

已知单口网络可以用外加电源计算端口电压电流关系的方法求出等效阻抗和等效导纳。

例10-17 单口网络如图10-37(a)所示，试计算该单口网络在  $\omega=1\text{rad/s}$  和  $\omega=2\text{rad/s}$  时的等效阻抗和相应的等效电路。

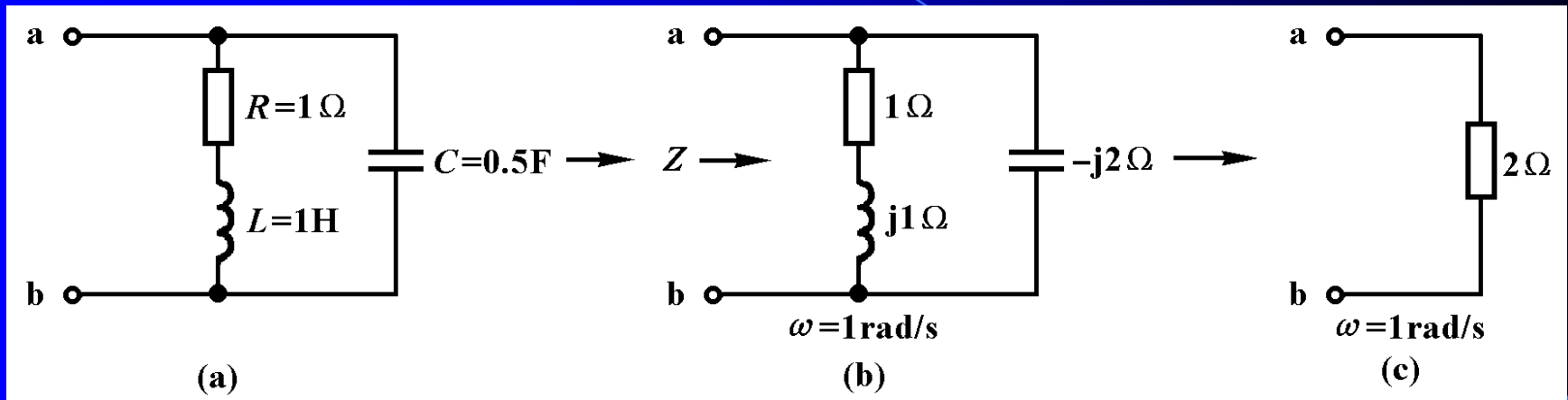


图10-37

解：画出图(a)电路在  $\omega=1\text{rad/s}$  时的相量模型如图(b)所示，用阻抗串并联阻抗的公式求得单口等效阻抗为

$$Z(j1) = \frac{(1 + j1)(-j2)}{1 + j1 - j2} = \frac{2 - j2}{1 - j} = 2\Omega$$

计算表明，等效阻抗为一个  $2\Omega$  的电阻，如图(c)所示。



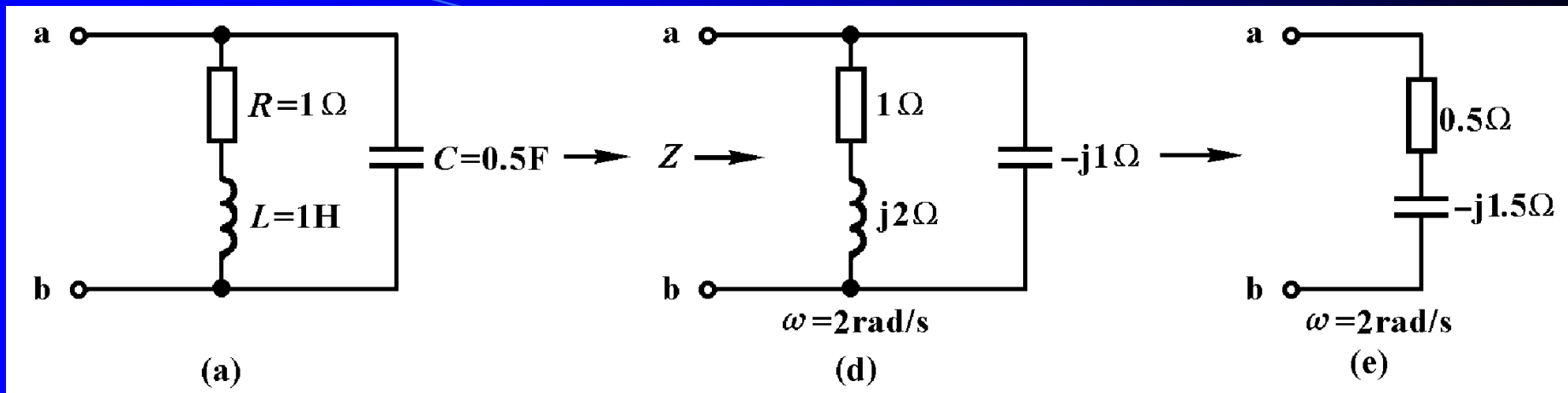


图 10-37

画出  $\omega=2\text{rad/s}$  时的相量模型如图 10-37(d) 所示，用阻抗串并联阻抗的公式求得等效阻抗为

$$Z(j2) = \frac{(1 + j2)(-j1)}{1 + j2 - j1} = \frac{2 - j1}{1 + j1} = \frac{1 - j3}{2} = (0.5 - j1.5) \Omega$$

计算结果表明，等效阻抗为一个  $0.5\Omega$  的电阻与  $-j1.5\Omega$  的容抗串联，其等效电路如图 10-37(e) 所示。

例10-18 单口网络如图10-38所示，已知 $\omega=100\text{rad/s}$ 。

试计算该单口网络相量模型等效阻抗和相应的等效电路。

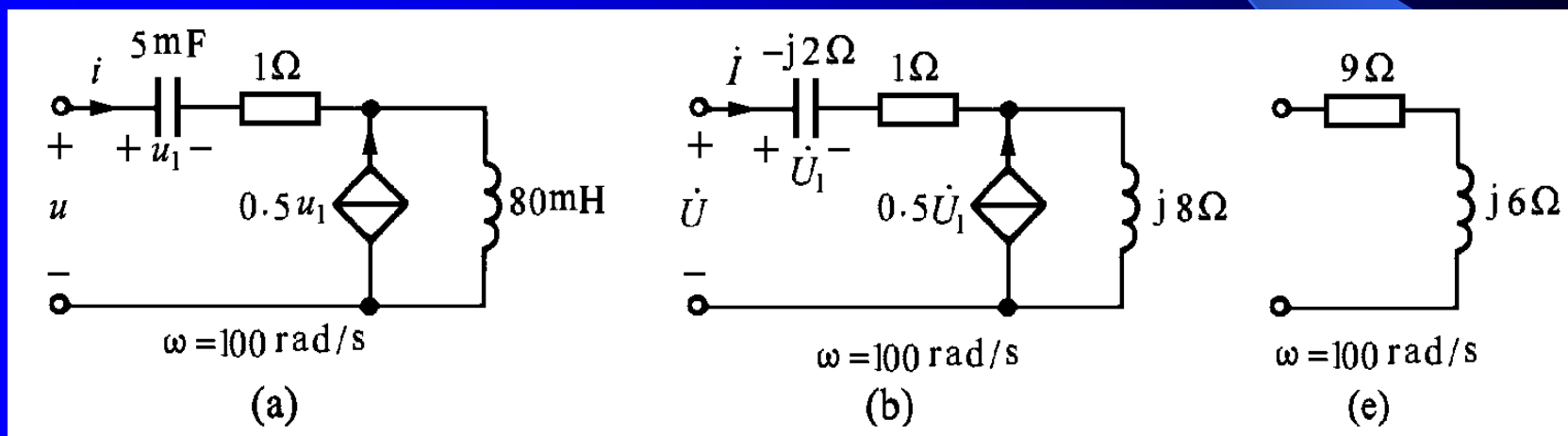
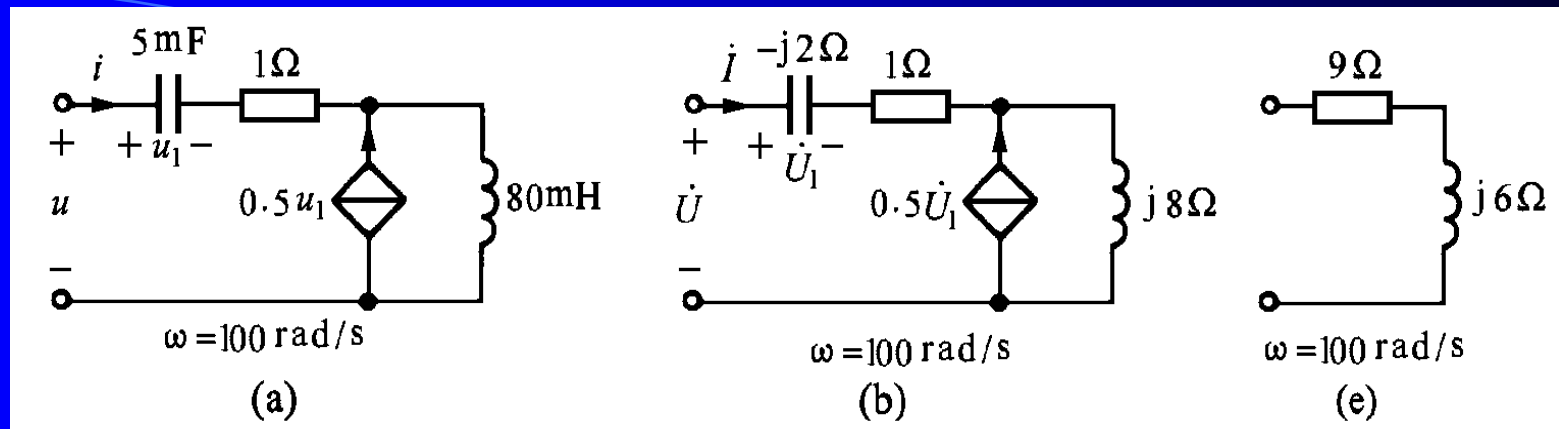


图 10-38



解：相量模型如图10-38(b)所示。在端口外加电流源，用相量形式KVL方程计算端口电压相量

$$\begin{aligned} \dot{U} &= -j2\dot{I} + 1\dot{I} + j8(\dot{I} + 0.5\dot{U}_1) \\ &= -j2\dot{I} + 1\dot{I} + j8\dot{I} + j8 \times 0.5 \times (-j2\dot{I}) = (9 + j6)\dot{I} \end{aligned}$$

求得等效阻抗为

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = (9 + j6)\Omega$$

其等效电路为一个电阻和电感的串联，如图(c)所示。

例10-19 试求图10-39(a)所示单口网络在 $\omega=1\text{rad/s}$ 和 $\omega=2\text{rad/s}$ 时的等效导纳。

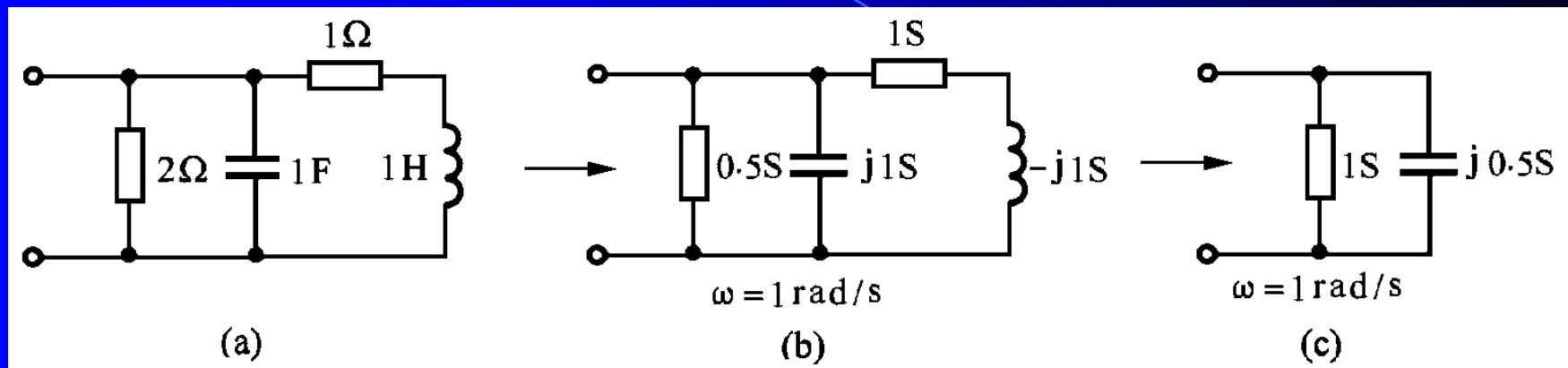


图 10-39

解：由图(b)所示相量模型求出相应的等效导纳

$$\begin{aligned}
 Y(j1) &= 0.5 + j1 + \frac{1 \times (-j1)}{1 - j1} = 0.5 + j1 + 0.5 - j0.5 \\
 &= (1 + j0.5)\text{S}
 \end{aligned}$$

由等效导纳得到的等效电路如图(c)所示。

试求图(a)所示单口网络在 $\omega=2\text{rad/s}$ 时的等效导纳。

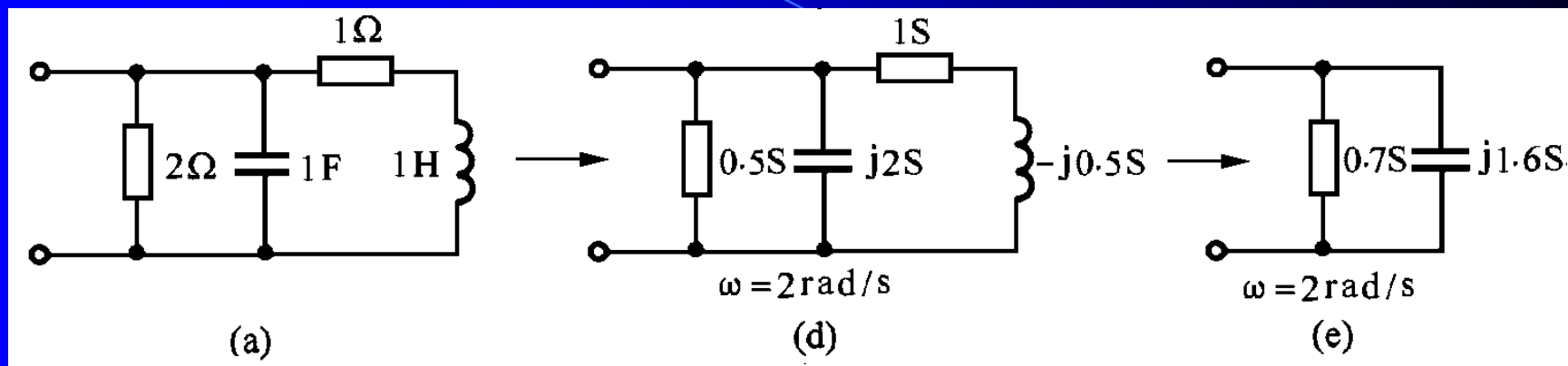


图 10-39

解：由图d)所示相量模型求出相应的等效导纳

$$\begin{aligned}
 Y(j2) &= 0.5 + j2 + \frac{1 \times (-j0.5)}{1 - j0.5} \\
 &= 0.5 + j2 + 0.2 - j0.4 = (0.7 + j1.6)\text{S}
 \end{aligned}$$

由等效导纳得到的等效电路如图(e)所示。

## 二、阻抗和导纳的等效变换

无源单口网络相量模型有两种等效电路，如[图10-40(c)]和[图10-40(e)]所示。这两种等效电路之间也可以进行等效变换。

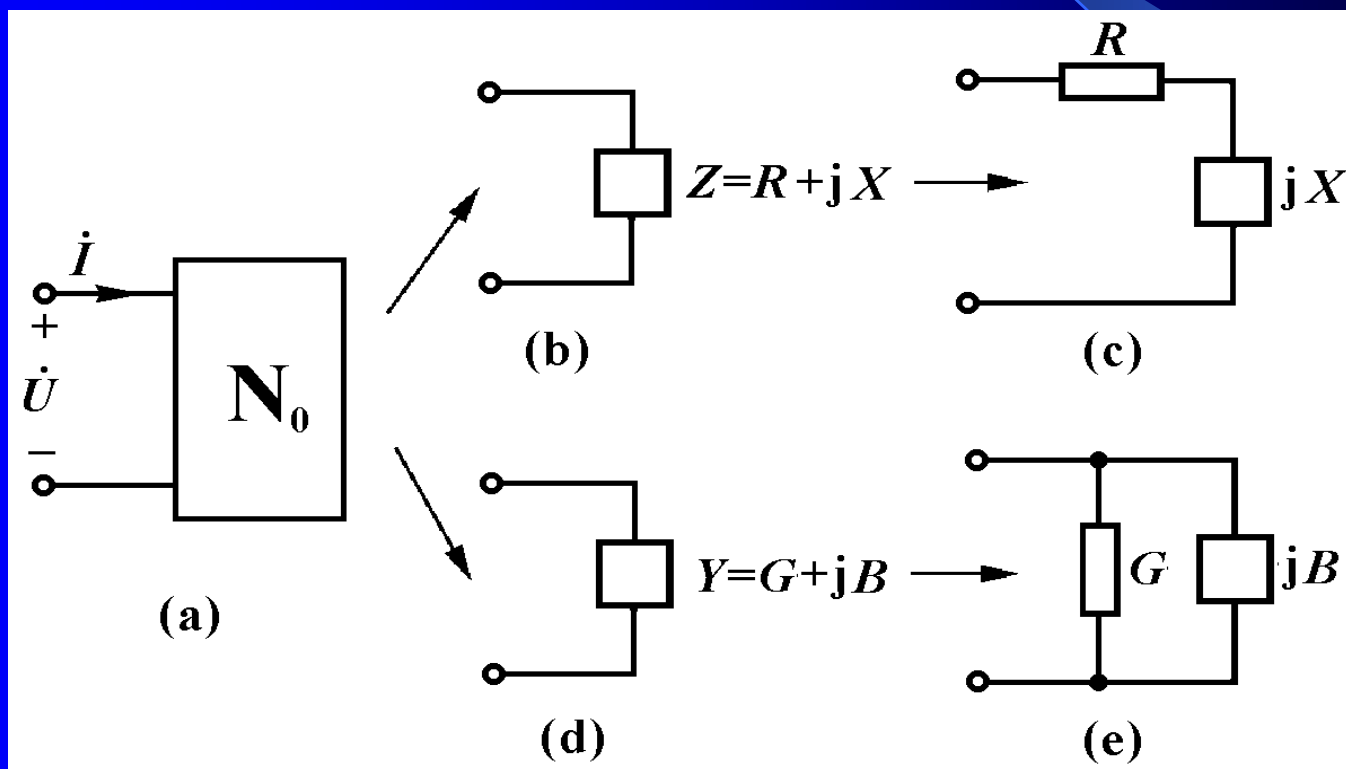


图 10-40

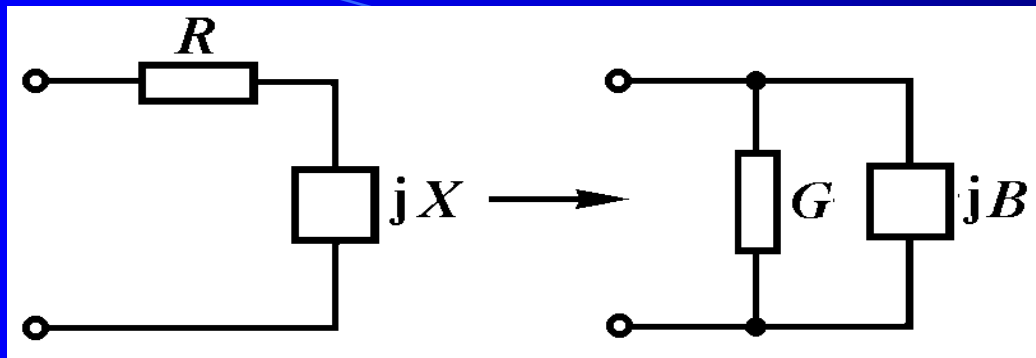


图 10-40

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}$$

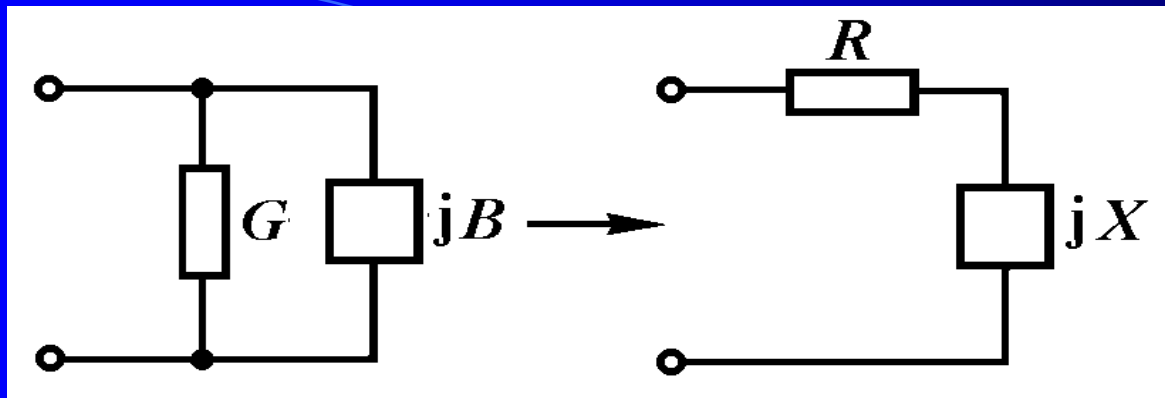
$$B = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

已知单口网络的阻抗和串联等效电路，求其导纳和并联等效电路。根据阻抗和导纳的倒数关系可以得到

$$\begin{aligned} Y = G + jB &= \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{1}{R + jX} \times \frac{R - jX}{R - jX} \\ &= \frac{R}{R^2 + X^2} + \frac{-jX}{R^2 + X^2} \end{aligned}$$

由此得到由阻抗变换为导纳的公式

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \quad (10-49)$$



$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}$$

$$X = \frac{-B}{G^2 + B^2}$$

图 10-40

已知单口网络的导纳和并联等效电路，求其阻抗和串联等效电路。根据阻抗和导纳的倒数关系可以得到

$$Z = R + jX = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G}{G^2 + B^2} + \frac{-jB}{G^2 + B^2}$$

由此得到由导纳变换为阻抗的公式

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \quad X = \frac{-B}{G^2 + B^2} \quad (10-50)$$

应该注意，电阻 $R$ 与电导 $G$ 之间并不是简单的倒数关系；电抗 $jX$ 与电纳 $jB$ 之间也不是简单的倒数关系



例10-20 电路如图4-41(a)所示。(1) 根据图(a)所示电阻和电抗串联单口网络, 求图(b)所示电导和电纳并联的等效电路。(2) 根据图(b)所示电导和电纳并联单口网络, 求图(a)所示电阻和电抗串联等效电路。

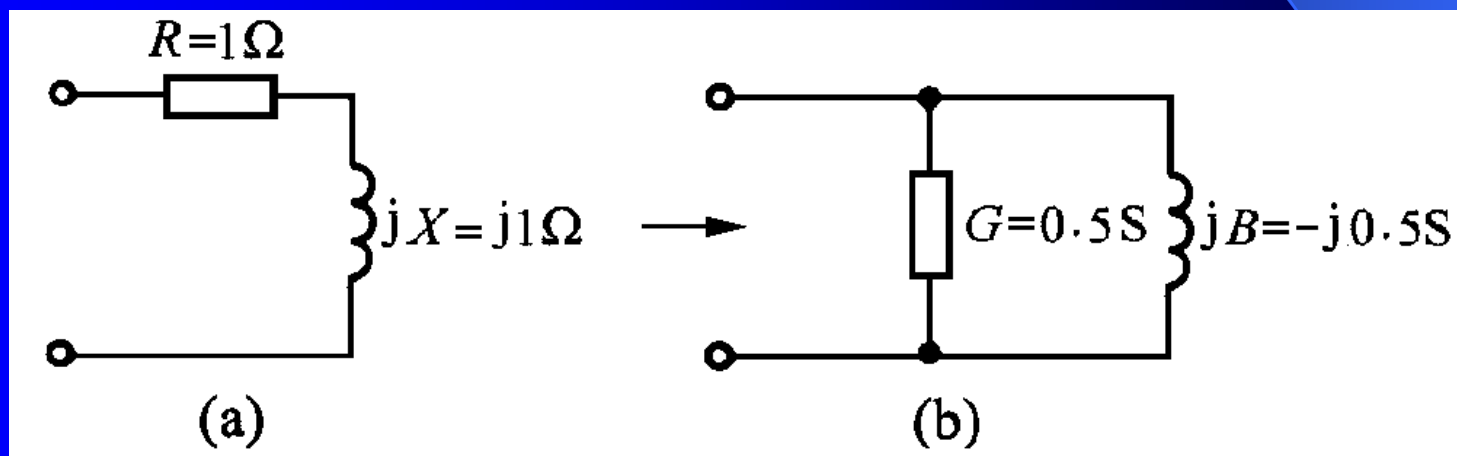


图 10-41

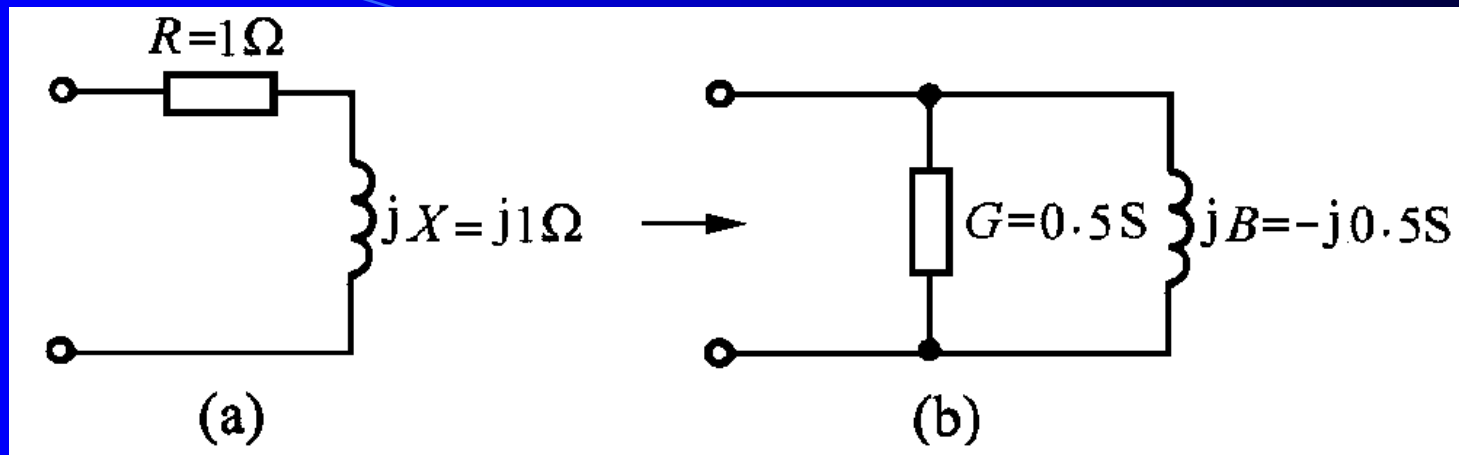


图 10-41

解： 并联等效电路的电导 $G$ 与电纳 $jB$ 如下：

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{1}{1+1} = 0.5S$$

$$B = \frac{-X}{R^2 + X^2} = \frac{-1}{1+1} = -0.5S$$

由此可以得到图(b)所示的并联等效电路。

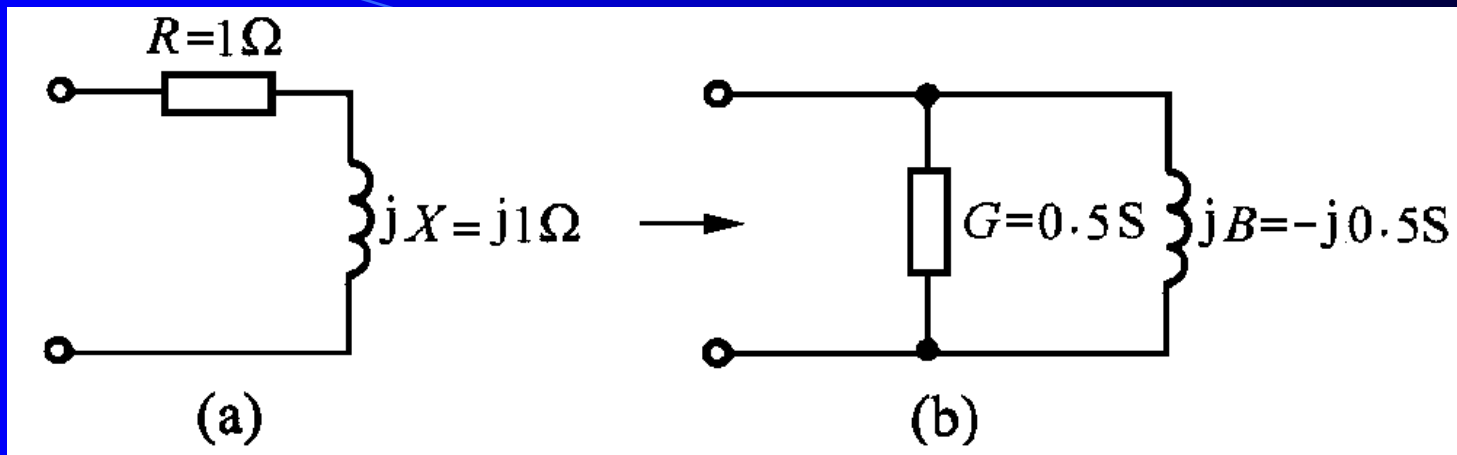
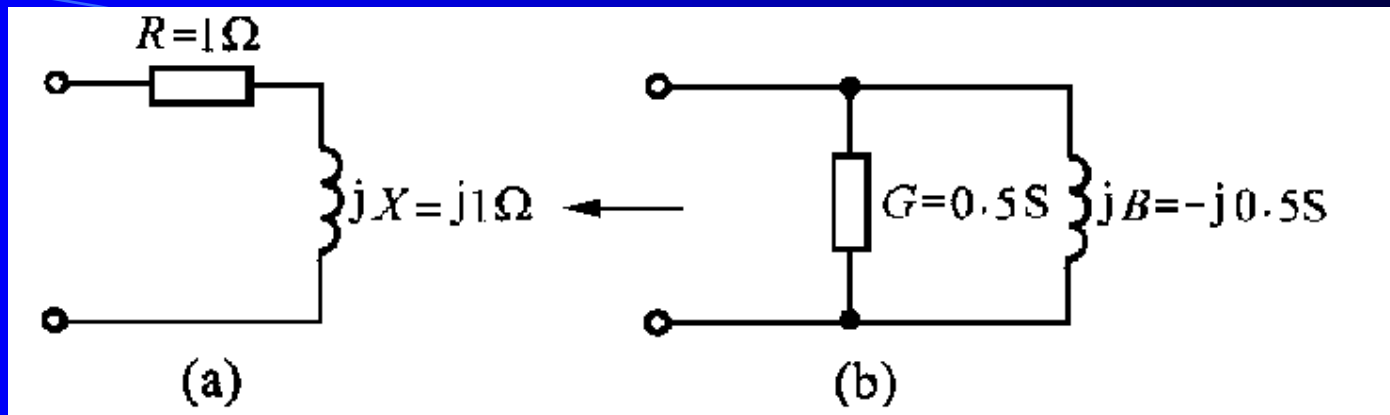


图 10-41

串联等效电路的电阻 $R$ 与电抗 $jX$ 如下:

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{0.5}{0.5^2 + (-0.5)^2} = 1\Omega$$

$$X = \frac{-B}{G^2 + B^2} = \frac{0.5}{0.5^2 + (-0.5)^2} = 1\Omega$$



串联等效电路的电阻 $R$ 与电抗 $jX$ 如下:

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{0.5}{0.5^2 + (-0.5)^2} = 1\Omega \quad X = \frac{-B}{G^2 + B^2} = \frac{0.5}{0.5^2 + (-0.5)^2} = 1\Omega$$

由此可以得到图(a)所示的串联等效电路。

从以上计算中也可以看出, 电阻 $R$ 与电导 $G$ 以及电抗 $jX$ 与电纳 $jB$ 不是倒数关系, 即

$$R = 1 \neq \frac{1}{G} = \frac{1}{0.5} = 2$$

$$jX = j1 \neq \frac{1}{jB} = \frac{1}{-j0.5} = j2$$

例10-21 将图10-42(a)所示电阻 $R=100\Omega$ 和电感 $L$ 串联单口网络，等效变换为图(b)所示电阻 $R'=1000\Omega$ 和电感 $L'$ 并联单口网络，试求电感 $L$ 之值。

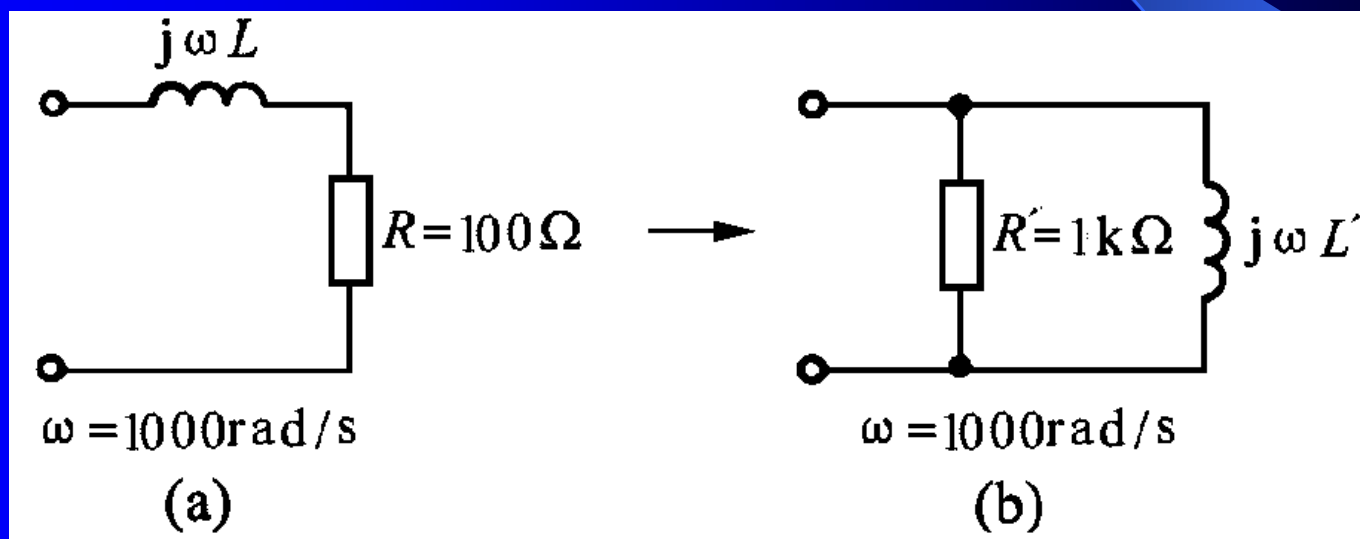
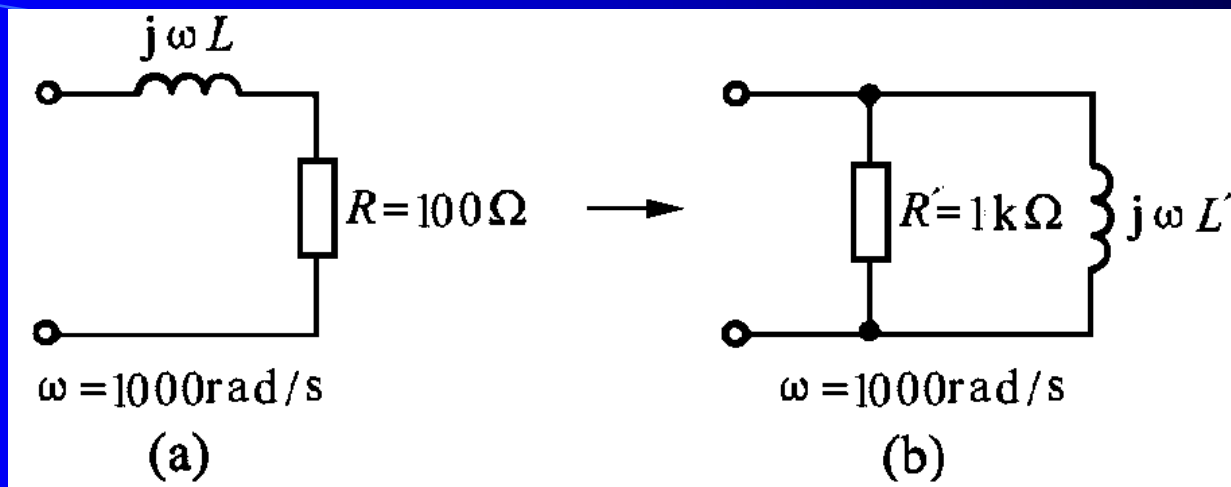


图 10-42



解：用阻抗等效变换为导纳的公式

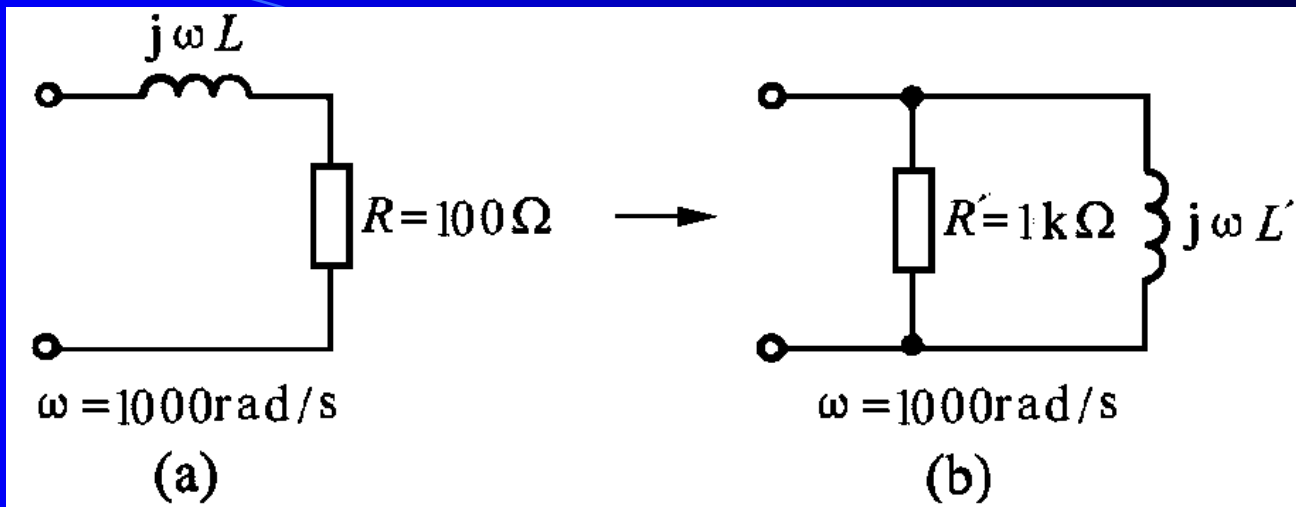
$$Y = \frac{1}{R'} + \frac{1}{j\omega L'} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + \frac{-j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

令实部相等，可以求得

$$\omega L = \sqrt{RR' - R^2} = \sqrt{10^5 - 10^4} = \sqrt{9 \times 10^4} = 300\Omega$$

最后求得电感值为

$$L = \frac{300}{\omega} = \frac{300}{10^3} = 0.3\text{H}$$



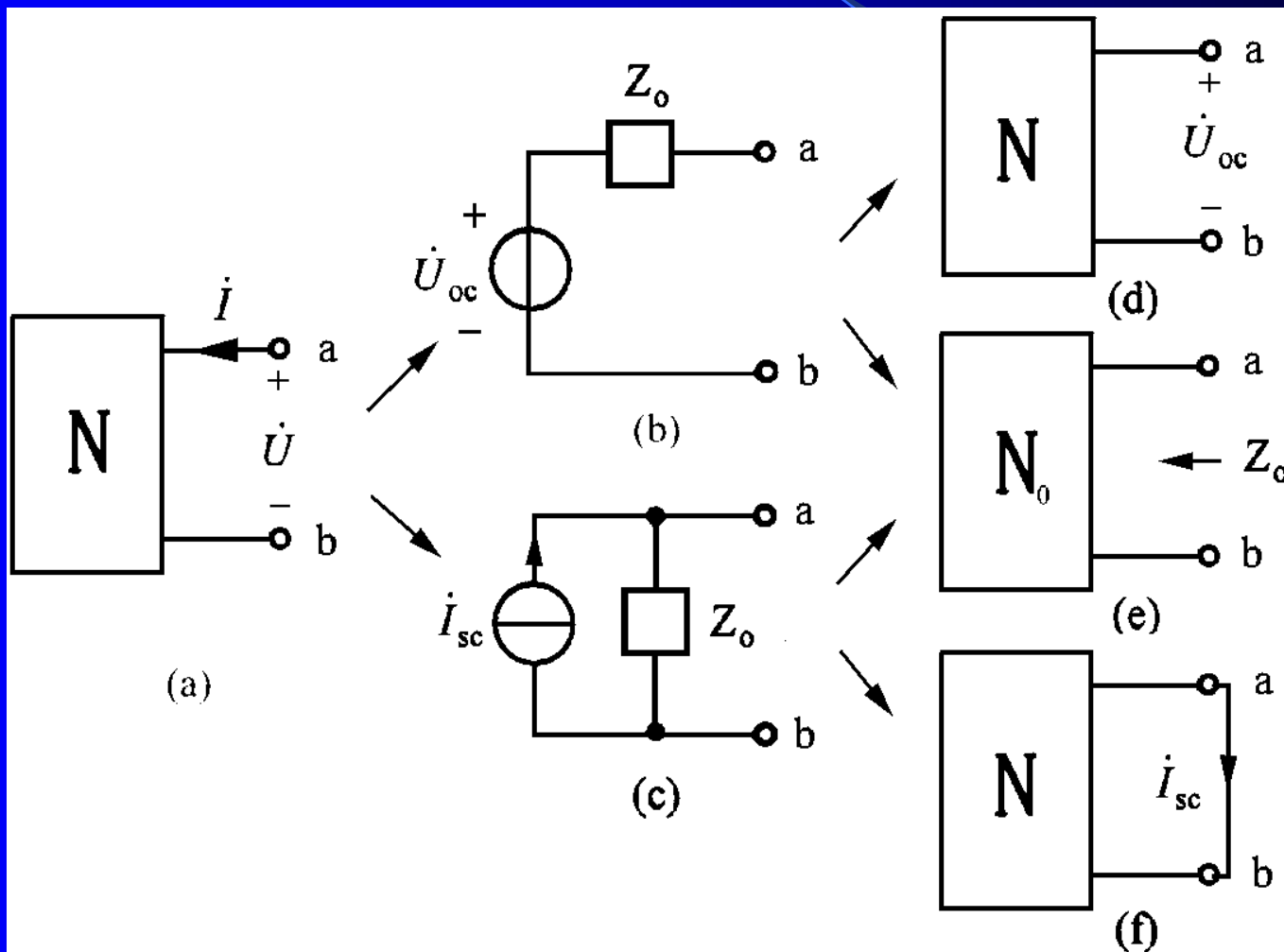
此时的等效导纳为

$$Y = G + jB = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{100 - j300}{10^4 + 9 \times 10^4} = (10^{-3} - j3 \times 10^{-3}) \text{ S}$$

从电导分量来看，说明以上计算结果正确。假如在端口并联一个适当数值的电容( $C = 3 \mu\text{F}$ )来抵销电感的作用，可以使单口网络等效为一个  $1000 \Omega$  的纯电阻。

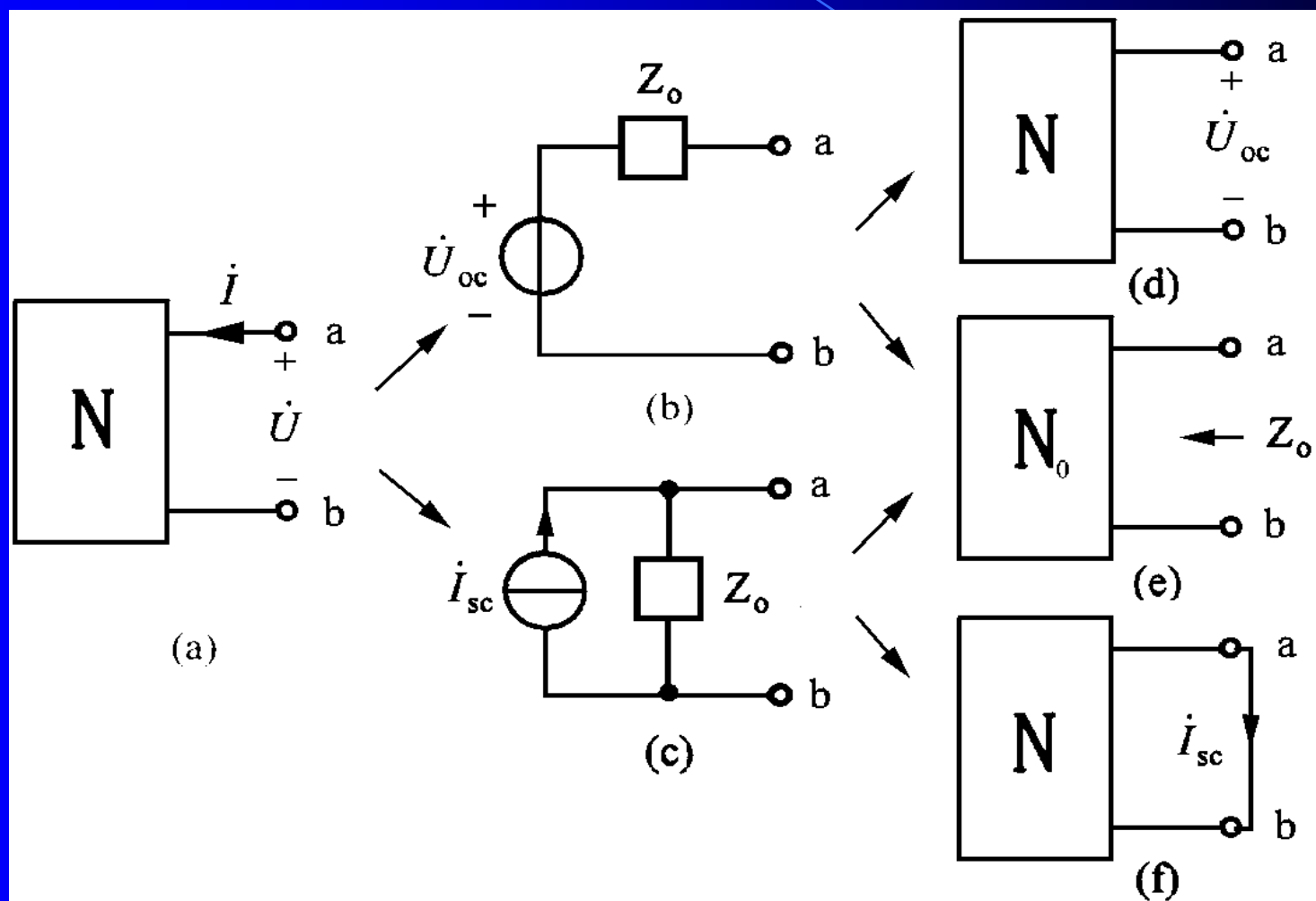
### 三、含源单口网络相量模型的等效电路

含独立电源的线性单口网络相量模型，就其端口特性而言，可以用一个独立电压源  $\dot{U}_{oc}$  与阻抗  $Z_o$  的串联来代替。

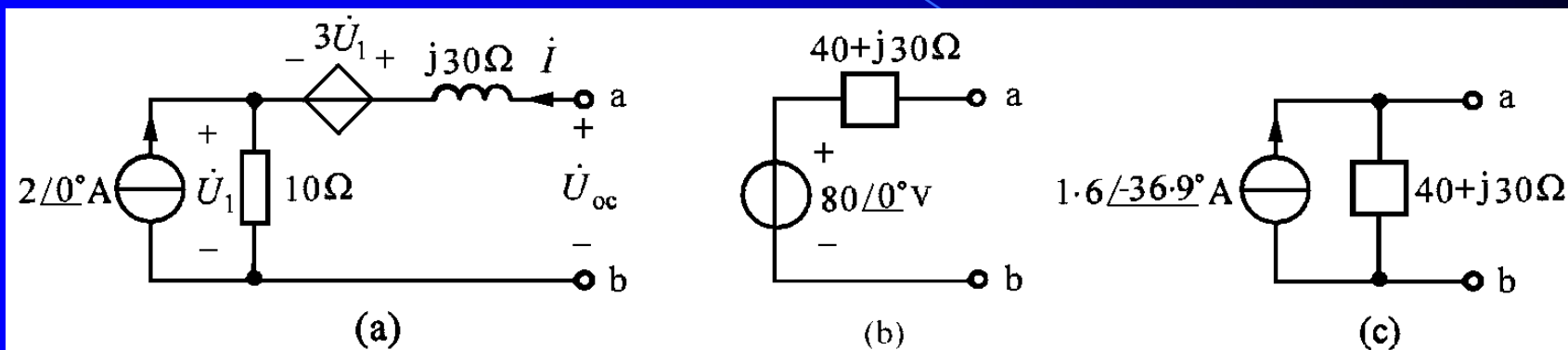




含独立电源的线性单口网络相量模型，就其端口特性而言，可用一个独立电流源  $\dot{I}_{sc}$  与阻抗  $Z_0$  的并联来代替。

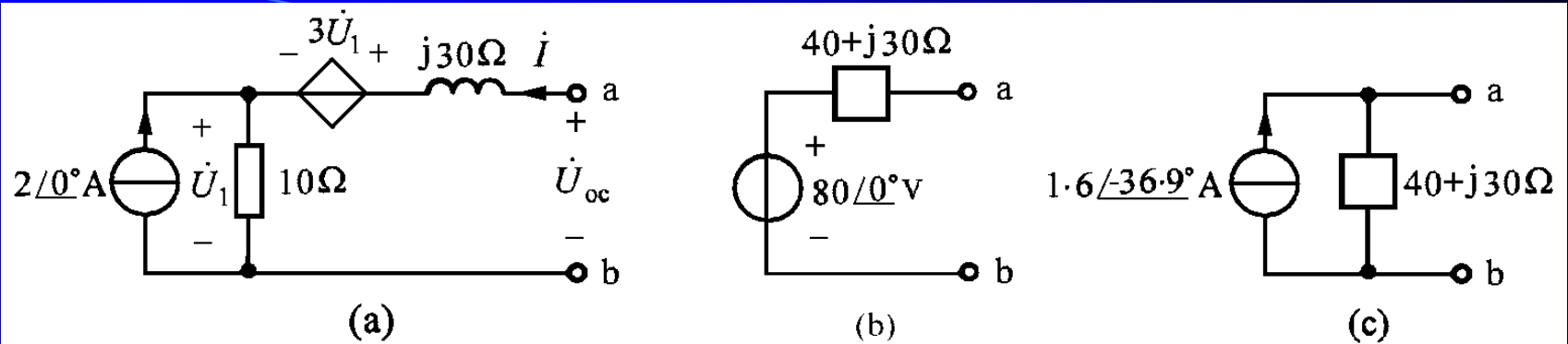


例10-22 求图10-44(a)单口的戴维宁和诺顿等效电路。



解：计算单口网络相量模型端口的开路电压

$$\dot{U}_{oc} = 4\dot{U}_1 = 4 \times 2 \times 10 = 80\angle 0^\circ \text{ V}$$



用外加电流源求端口电压的方法求得输出阻抗

$$Z_o = \frac{j30\dot{I} + 3\dot{U}_1 + 10\dot{I}}{\dot{I}} = \frac{j30\dot{I} + 3 \times 10\dot{I} + 10\dot{I}}{\dot{I}} = (40 + j30)\Omega$$

用开路电压和输出阻抗求得短路电流

$$\dot{I}_{sc} = \frac{\dot{U}_{oc}}{Z_o} = \frac{80\angle 0^\circ}{40 + j30} = \frac{80\angle 0^\circ}{50\angle 36.9^\circ} = 1.6\angle -36.9^\circ \text{ A}$$

作出戴维宁和诺顿等效电路，如图(b)和(c)所示。

例10-23 电路如图10-45(a)所示。问负载阻抗 $Z_C$ 应该为何值时，电流达到最大值。

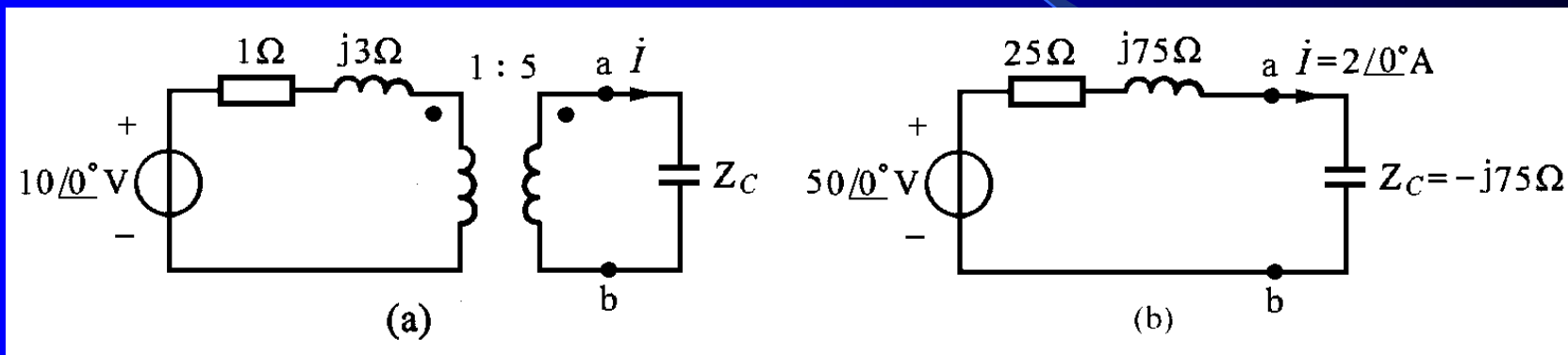
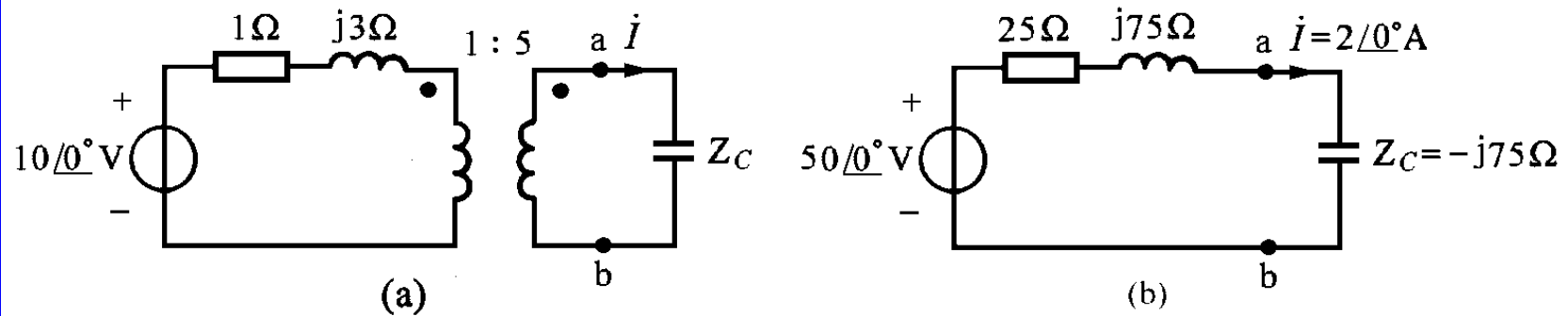


图 10-45

解：将连接负载阻抗 $Z_C$ 的单口网络用戴维宁等效电路代替。

先求开路电压

$$\dot{U}_{oc} = 5 \times 10 \angle 0^\circ \text{ V}$$



求得单口网络的输出阻抗

$$Z_o = 5^2 \times (1 + j3) = (25 + j75)\Omega$$

由图(b)电路看出，当 $Z_C = -j75\Omega$ 时，得到最大电流为

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{50\angle 0^\circ}{25 + \underline{j75 + Z_C}} \\ &= \frac{50\angle 0^\circ}{25 + j75 - j75} = \frac{50\angle 0^\circ}{25} = 2\angle 0^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

## § 10-8 双口网络的相量模型

具有两个端口的双口网络相量模型(图10-46)有两个端口电压相量和两个端口电流相量,其特性由表示电压电流相量关系的一个复系数代数方程描述,由此可以得到相应的等效电路。本节只讨论不含独立电压源和电流源的双口网络,介绍它的六种参数和互易双口网络的等效电路。

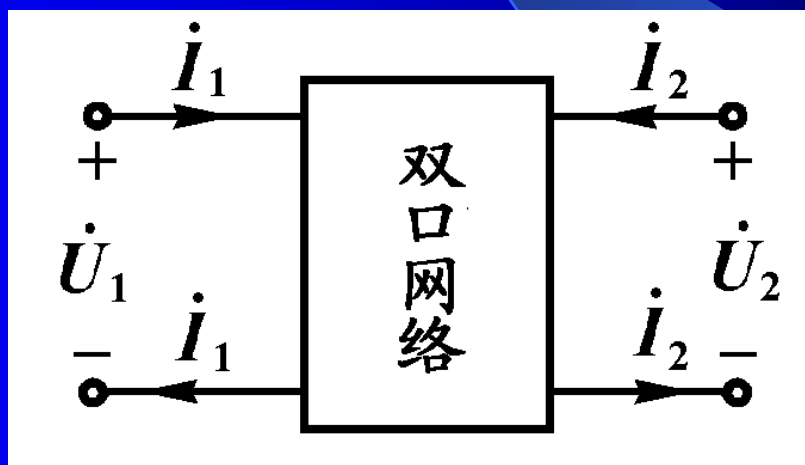


图 10-46

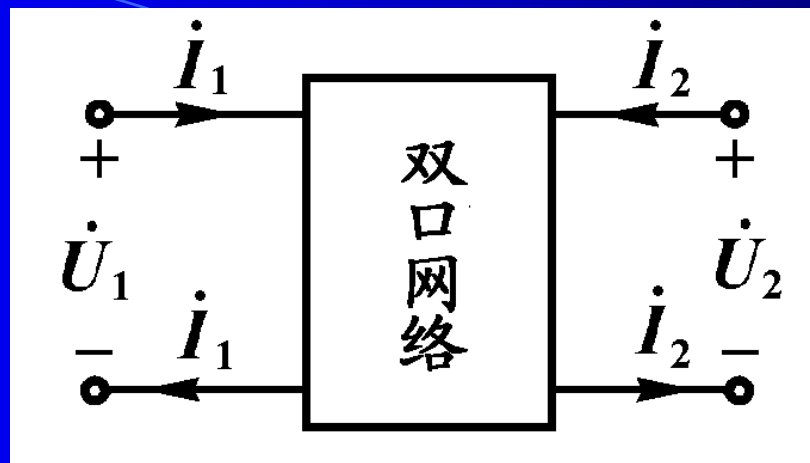


图 10-46

## 一、双口网络相量模型的电压电流关系

图10-46所示双口网络工作于正弦稳态，端口电压相量为  $\dot{U}_1, \dot{U}_2$  端口电流相量为  $\dot{I}_1, \dot{I}_2$  假设双口网络不含独立电源，其端口特性由这四个变量组成的两个方程来描述，共有以下六种形式

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (10-51)$$

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} \quad (10-52)$$

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{I}_2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (10-53)$$

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = H'_{11}\dot{U}_1 + H'_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = H'_{21}\dot{U}_1 + H'_{22}\dot{I}_2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H'_{11} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = H' \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (10-54)$$

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = T_{11}\dot{U}_2 - T_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = T_{21}\dot{U}_2 - T_{22}\dot{I}_2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (10-55)$$

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = T'_{11}\dot{U}_1 + T'_{12}\dot{I}_1 \\ -\dot{I}_2 = T'_{21}\dot{U}_1 + T'_{22}\dot{I}_1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} \\ T'_{21} & T'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = T' \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} \quad (10-56)$$



从这六种电压电流关系中，得到表示双口网络特性的六种参数。这几种参数矩阵之间满足以下关系

$$\left. \begin{aligned} Z &= Y^{-1} & Y &= Z^{-1} \\ H &= H'^{-1} & H' &= H^{-1} \\ T &= T'^{-1} & T' &= T^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (10-57)$$

根据双口网络的电压电流关系可以得到其等效电路，如图10-47(a)和(b)所示。

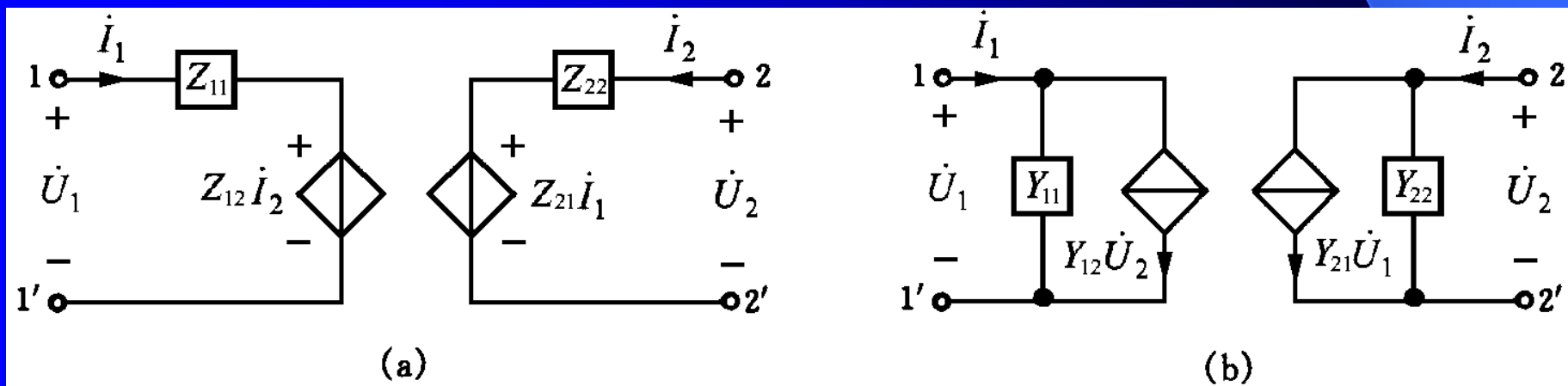


图 10-47

已知双口网络求其参数矩阵的方法，用网络分析的任何一种方法写出双口网络相量模型端口电压电流相量的关系式，从而得到相应的双口网络参数矩阵。

例10-24 图10-48(a)所示双口网络工作于正弦稳态，角频率 $\omega=1\text{rad/s}$ ，求其Z参数矩阵。

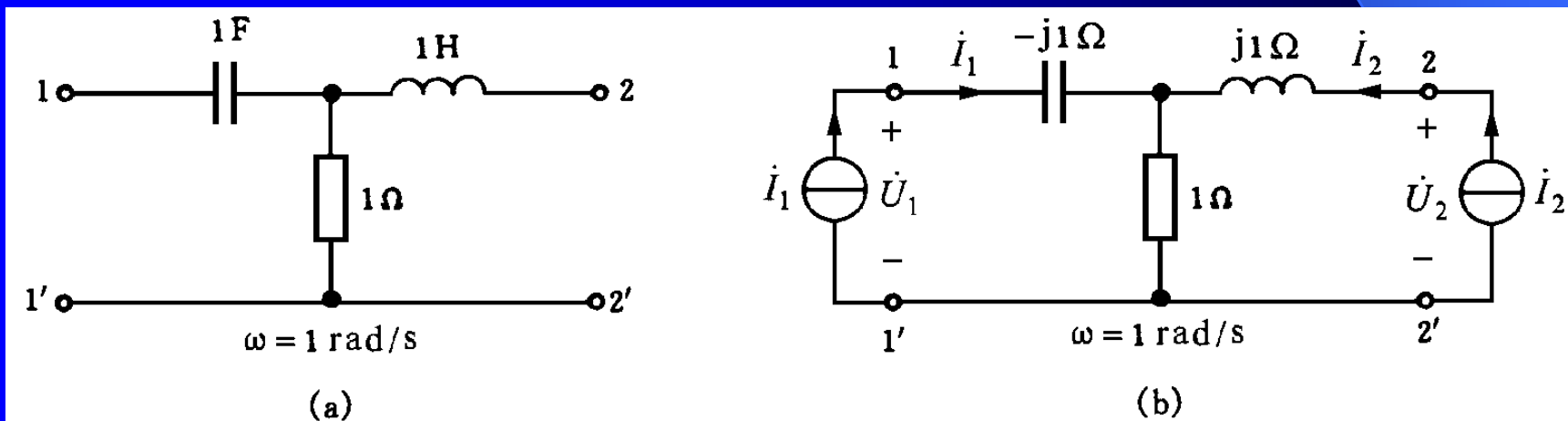
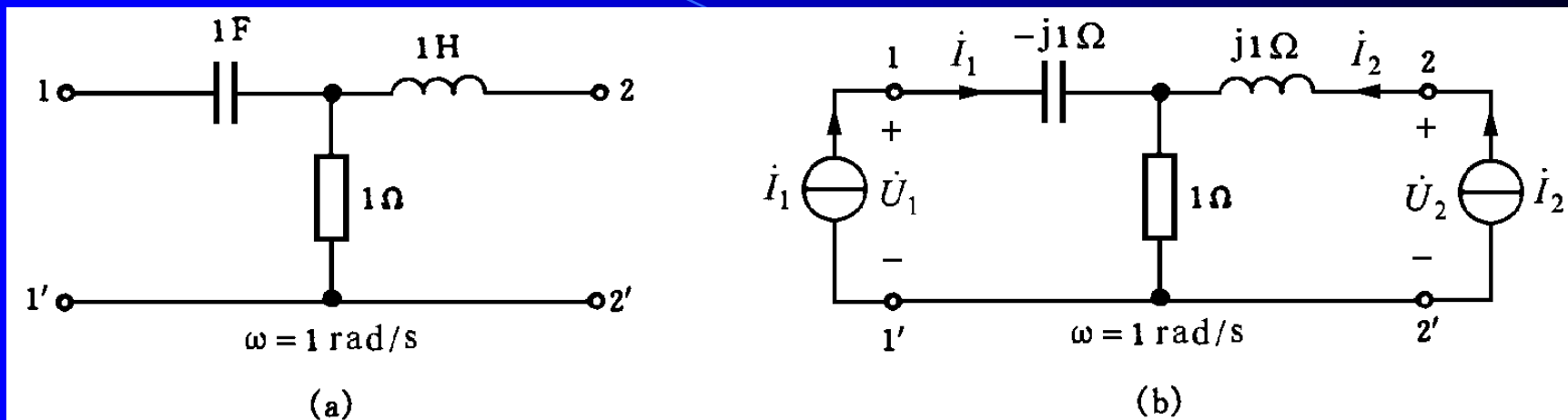
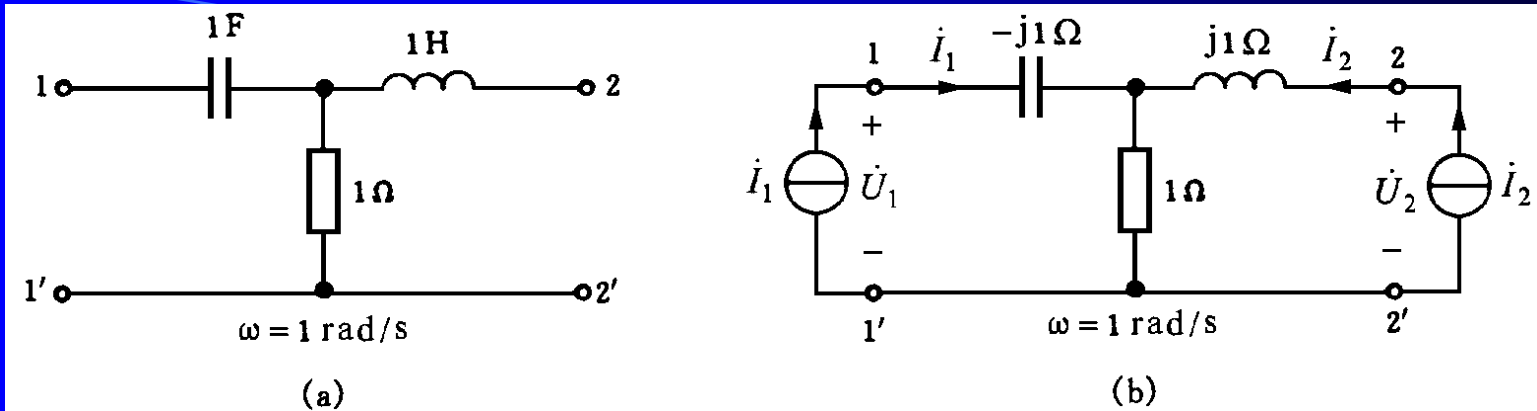


图 10-48



解：画出双口网络的相量模型，如图(b)所示。我们可以在端口上外加两个电流源相量来计算端口电压相量的表达式，从而得到Z参数矩阵。

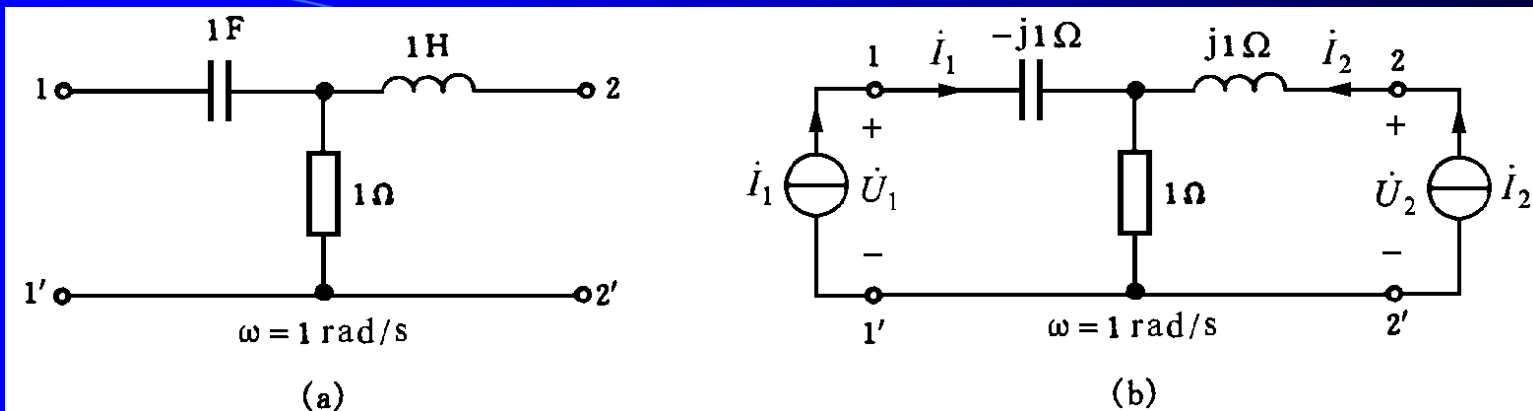


可以列出网孔方程

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (1 - j1)\dot{I}_1 + 1\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = 1\dot{I}_1 + (1 + j1)\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - j1)\Omega & 1\Omega \\ 1\Omega & (1 + j1)\Omega \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - j1 & 1 \\ 1 & 1 + j1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 + j1 & -1 \\ -1 & 1 - j1 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - j1 & 1 \\ 1 & 1 + j1 \end{vmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 + j1 & -1 \\ -1 & 1 - j1 \end{bmatrix} \text{S}$$



也可以用叠加定理分别求出四个Z参数，当  $\dot{I}_1$  单独作用， $\dot{I}_2 = 0$ ，即次级开路时，可以求得  $Z_{11}$  和  $Z_{21}$ 。当  $\dot{I}_2$  单独作用， $\dot{I}_1 = 0$ ，即初级开路时求得可以求得  $Z_{21}$  和  $Z_{22}$ 。

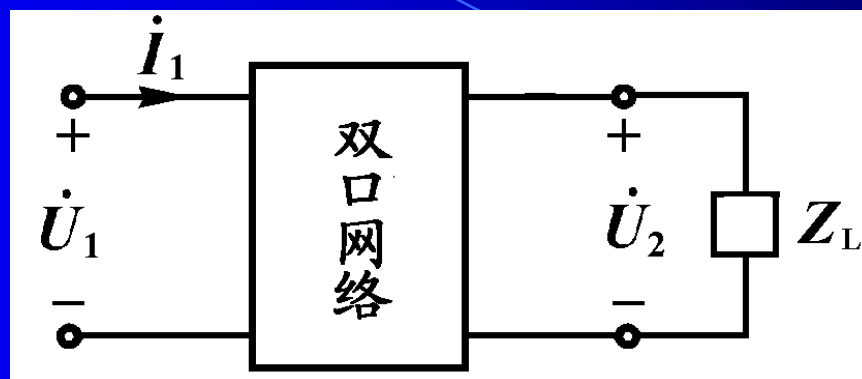
$$Z_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} = (1 - j1)\Omega$$

$$Z_{21} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} = 1\Omega$$

$$Z_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} = 1\Omega$$

$$Z_{22} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} = (1 + j1)\Omega$$

## 二、双口网络端接负载时的输入阻抗



与电阻双口网络相似，当双口网络端接负载 $Z_L=1/Y_L$ 时的输入阻抗和输入导纳为

$$Z_{\text{in}} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} \quad (10-58)$$

$$Y_{\text{in}} = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22} + Y_L} \quad (10-59)$$

例10-25 图10-49(a)所示双口网络的相量模型中，已知双口网络参数为 $Z_{11}=3\Omega$ ， $Z_{12}=-j6\Omega$ ， $Z_{21}=2\Omega$ ， $Z_{22}=-j3\Omega$ 。求电流  $\dot{I}_1$  和电压  $\dot{U}_2$ 。

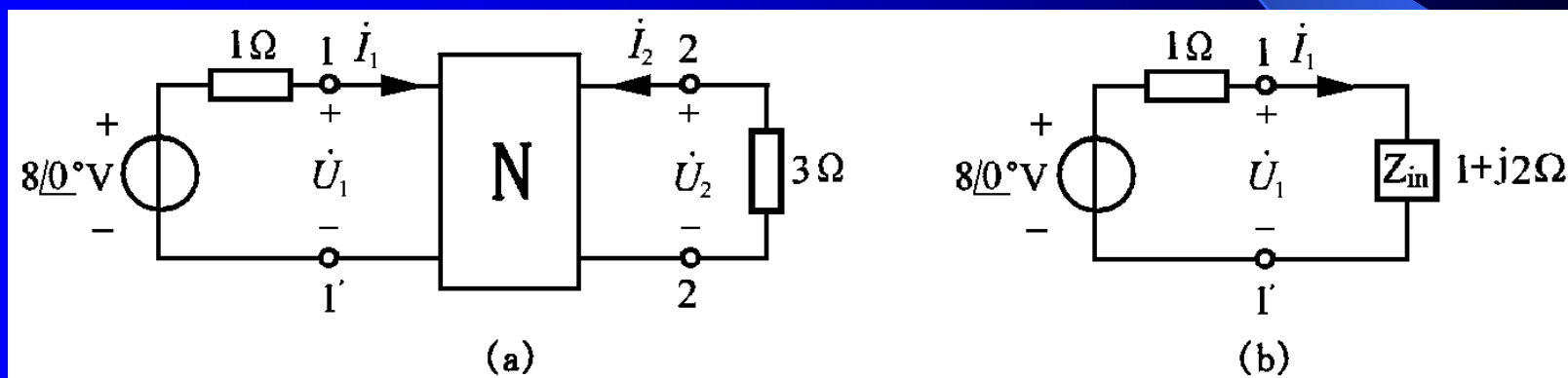
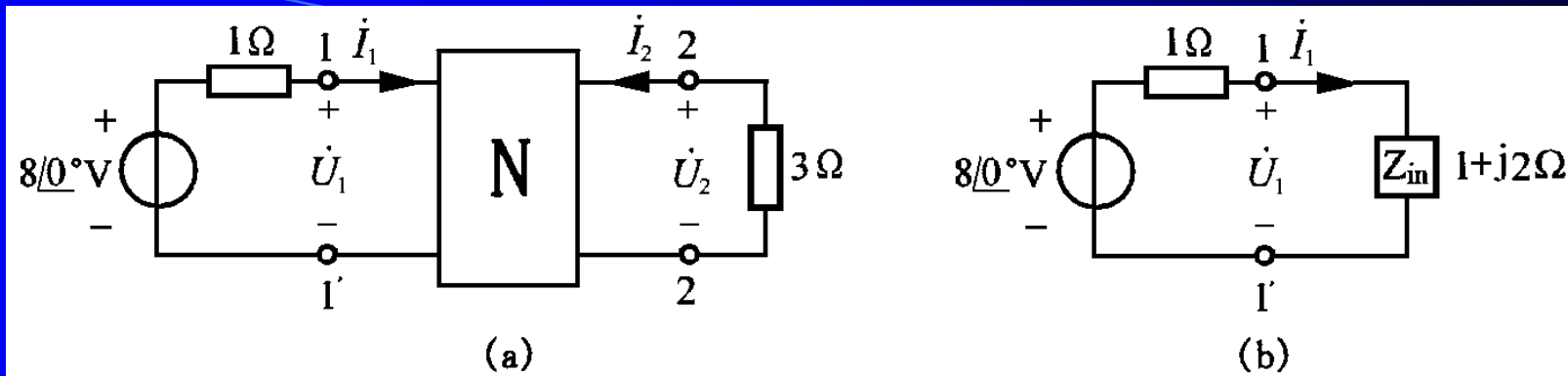


图 10-49



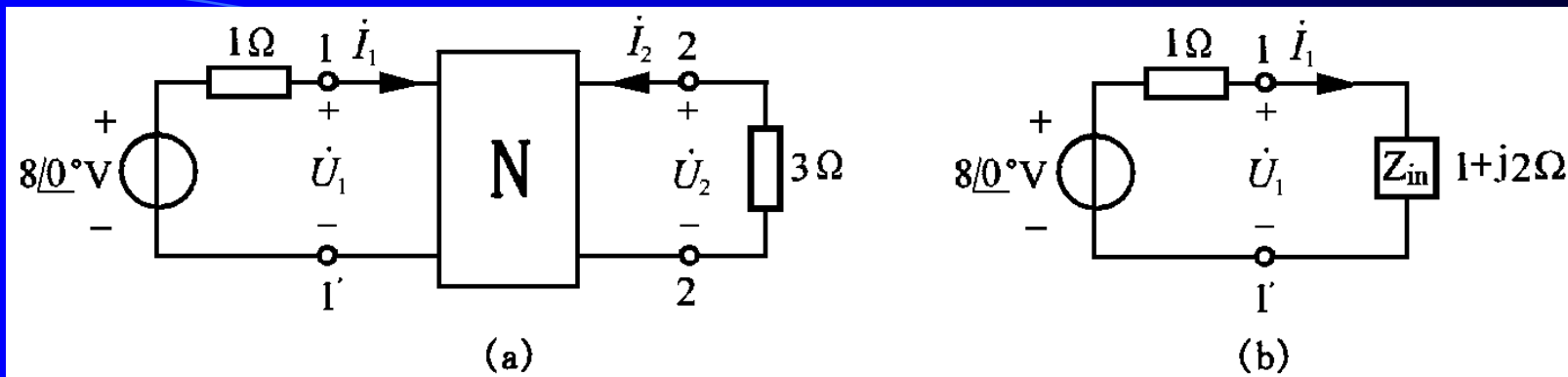
解：计算双口网络端接 $3\Omega$ 负载的输入阻抗

$$\begin{aligned}
 Z_{in} &= Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} \\
 &= 3 - \frac{-j6 \times 2}{-j3 + 3} = 3 - 2 + j2 = (1 + j2)\Omega
 \end{aligned}$$

得到图(b)所示等效电路，由此求得

$$\dot{I}_1 = \frac{8}{1 + 1 + j2} = 2\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A}$$





为了求电压  $\dot{U}_2$ ，可以先求出连接负载电阻的戴维宁等效电路，其开路电压和输出阻抗为

$$\dot{U}_{oc} = \dot{U}_2 \Big|_{i_2=0} = Z_{21} \dot{I}_1 = \frac{2 \times 8 \angle 0^\circ}{1 + 3} = 4 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$Z_o = Z_{22} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{11} + Z_s} = -j3 - \frac{-j6 \times 2}{3 + 1} = 0 \Omega$$

这是一个电压源，最后得到

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{oc} = 4 \angle 0^\circ \text{ V}$$

### 三、互易双口网络相量模型的等效电路

当双口网络由线性时不变电阻、电感、电容和理想变压器组成时，称为互易双口网络，其 $Z$ 参数和 $Y$ 参数存在以下关系

$$Z_{12} = Z_{21} \quad Y_{12} = Y_{21} \quad (10-60)$$

在这种情况下，双口网络存在T型和 $\Pi$ 型等效电路，其参数关系如图10-50所示：

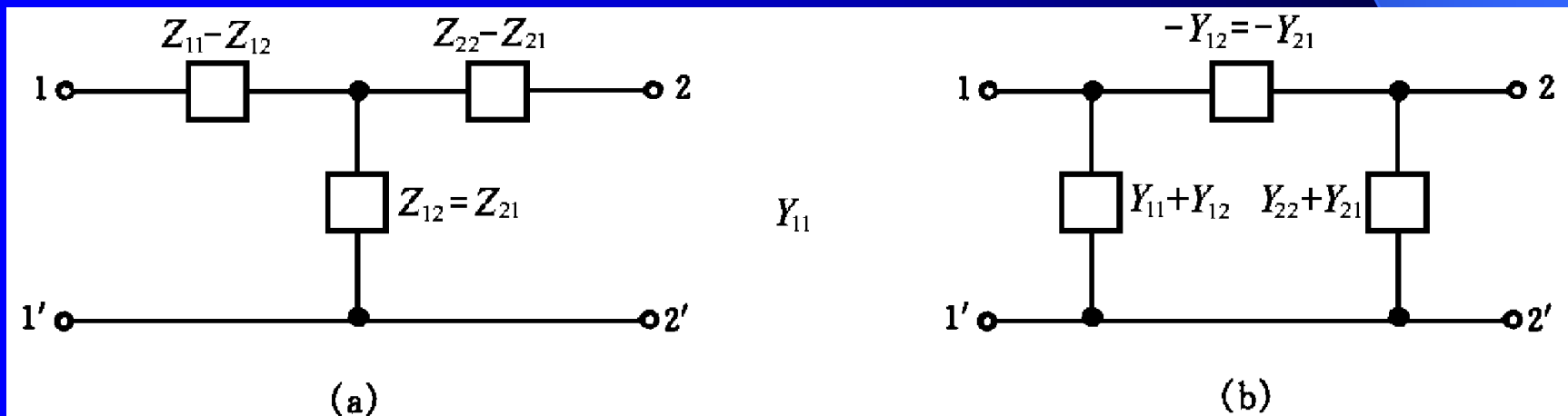


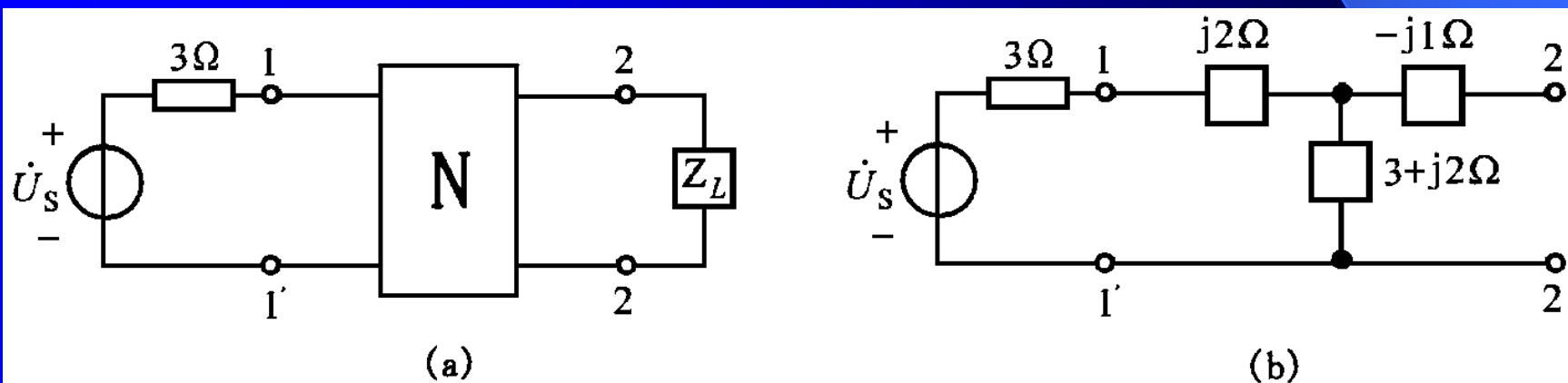
图 10-50

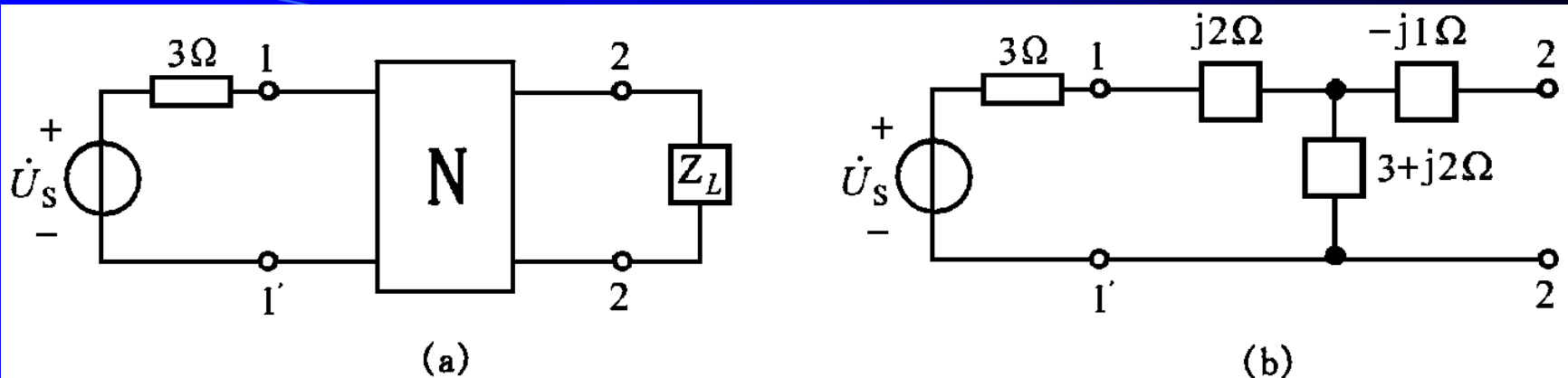
例10-26 图10-51(a)所示双口网络的相量模型中,已知双口网络参数

$$Z_{11} = (3 + j4)\Omega$$

$$Z_{12} = Z_{21} = (3 + j2)\Omega, Z_{22} = (3 + j1)\Omega$$

求负载阻抗为何值时可以获得最大功率。





解：这是一个互易双口网络，用T型等效电路代替双口网络，得到图(b)所示电路，求出其输出阻抗

$$\begin{aligned}
 Z_o &= Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_S} \\
 &= 3 + j1 - \frac{(3 + j2)^2}{3 + j4 + 3} = 3 + j1 - 1.5 - j1 = 1.5\Omega
 \end{aligned}$$

显然当负载阻抗  $Z_L = Z_o^* = 1.5\Omega$  时可以获得最大功率。

## 四、双口网络的级联

图10-52所示三个双口网络的级联。在分析级联双口网络时，传输参数是很有用的。

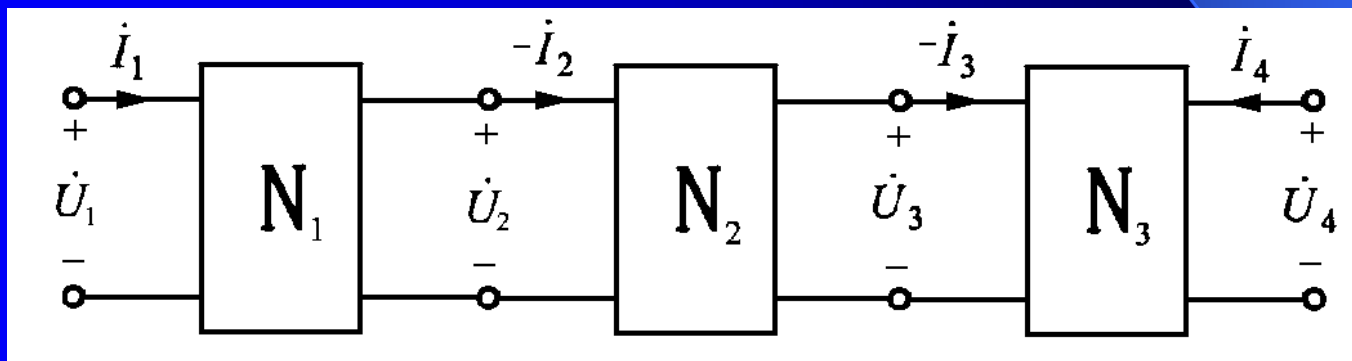
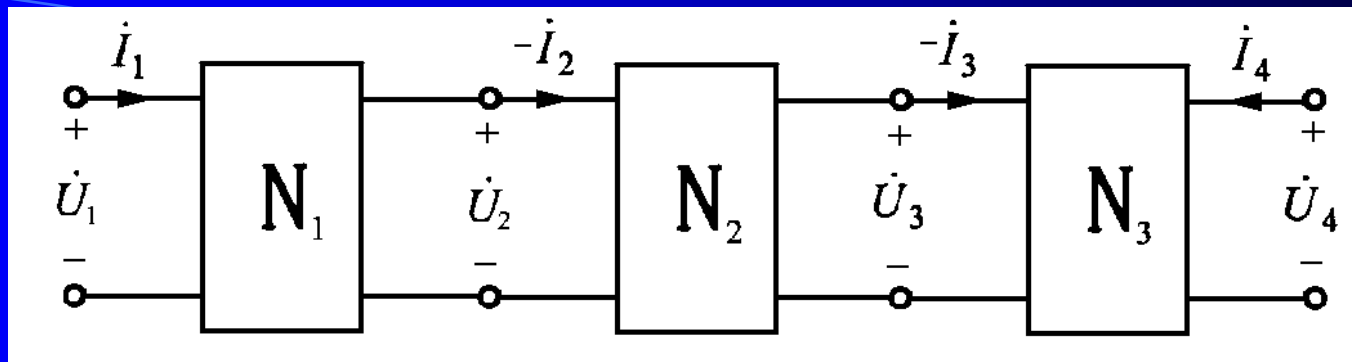


图 10-52



假设每个双口网络的传输参数矩阵用  $\mathbf{T}^{(1)}$ 、 $\mathbf{T}^{(2)}$ 、 $\mathbf{T}^{(3)}$  表示，容易证明级联双口网络的传输参数矩阵等于的  $\mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{T}^{(2)} \cdot \mathbf{T}^{(3)}$ ，证明过程如下：

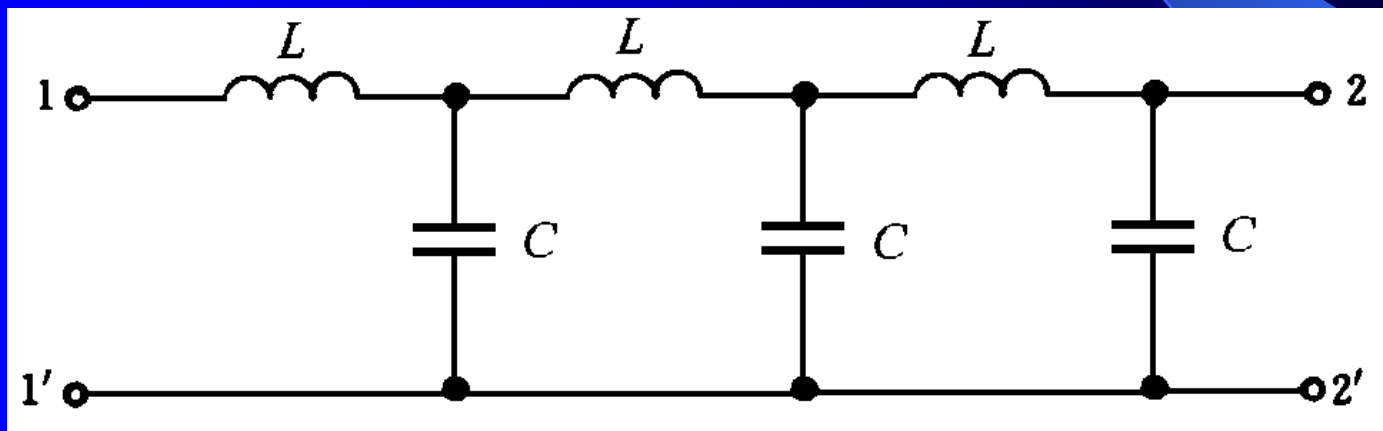
$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \dot{U}_4 \\ -\dot{I}_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{(1)} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{(2)} \begin{bmatrix} \dot{U}_3 \\ -\dot{I}_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_3 \\ -\dot{I}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{(3)} \begin{bmatrix} \dot{U}_4 \\ -\dot{I}_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{(1)} \mathbf{T}^{(2)} \mathbf{T}^{(3)} \quad (10-61)$$

## 思考与练习

10-8-1 利用式(10-61)导出图所示梯形双口网络级联的传输矩阵。



## § 10-9 正弦稳态响应的叠加

本节讨论几个不同频率的正弦激励在线性时不变电路中引起的非正弦稳态响应。

几个频率不同的正弦激励在线性时不变电路中产生的稳态电压和电流，可以利用叠加定理，分别计算每个正弦激励单独作用时产生的正弦电压 $u_k(t)$ 和电流 $i_k(t)$ ，然后相加求得非正弦稳态电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 。

在计算每个正弦激励单独作用引起的电压和电流时，仍然可以使用相量法先计算出电压电流相量，然后得到电压电流的瞬时值 $u_k(t)$ 和 $i_k(t)$ 。

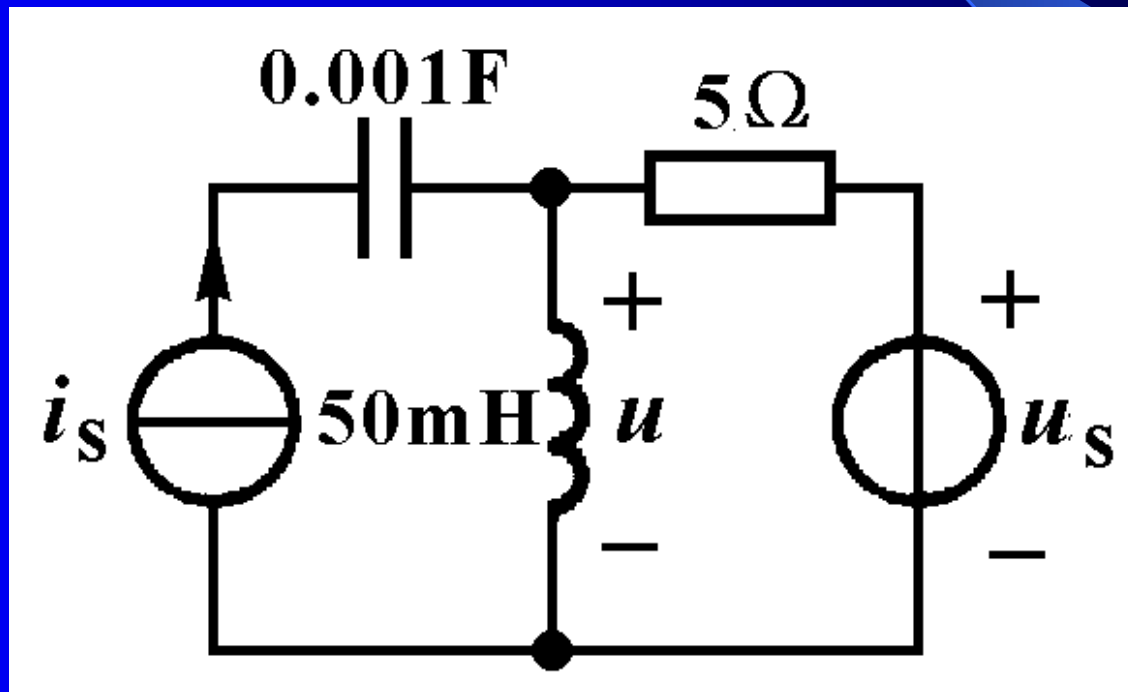


例10-27 图(a)所示电路中，已知

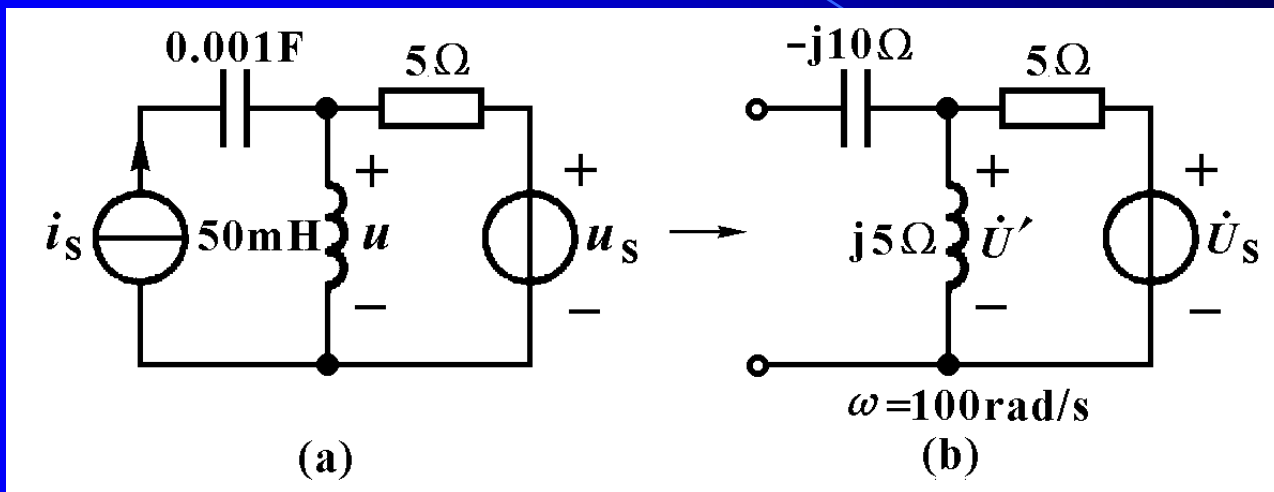
电压源电压  $u_S(t) = 20 \cos(100t + 10^\circ) \text{V}$

电流源电流  $i_S(t) = \sqrt{2} \cos(200t + 50^\circ) \text{A}$

试用叠加定理求稳态电压 $u(t)$ 。



解：1. 计算  $u_s(t) = 20 \cos(100t + 10^\circ) \text{V}$  单独作用时产生的电压  $u'(t)$



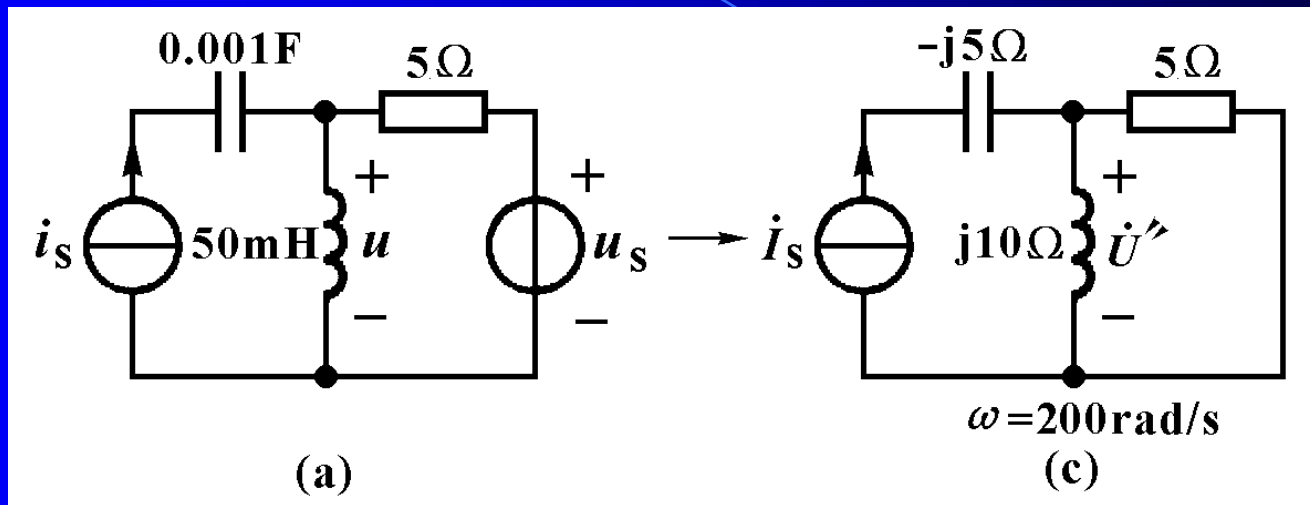
将电流源  $i_s(t)$  以开路代替，得到图(b)所示相量模型，  
由此求得

$$\dot{U}' = \frac{j5}{5 + j5} \dot{U}_s = \frac{j5}{5 + j5} \times 10\sqrt{2} \angle 10^\circ = 10 \angle 55^\circ \text{V}$$

由相量写出相应的瞬时值表达式

$$u'(t) = 10\sqrt{2} \cos(100t + 55^\circ) \text{V}$$

2. 计算  $i_S(t) = \sqrt{2} \cos(200t + 50^\circ) \text{A}$  单独作用时产生的电压  $u''(t)$ 。



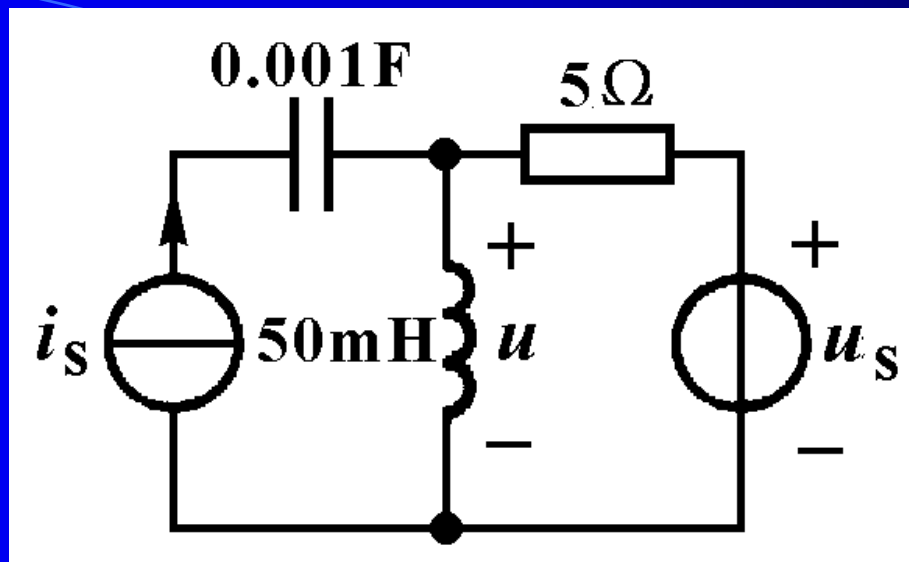
将电压源  $u_S(t)$  用短路代替，得到图(c)所示相量模型，

由此求得

$$\dot{U}'' = \frac{j10 \times 5}{5 + j10} \dot{I}_S = \frac{j50}{5 + j10} \times 1 \angle 50^\circ = 4.47 \angle 76.6^\circ \text{V}$$

由相量写出相应的瞬时值表达式

$$u''(t) = 4.47 \sqrt{2} \cos(200t + 76.6^\circ) \text{V}$$



### 3.根据叠加定理求稳态电压 $u(t)$

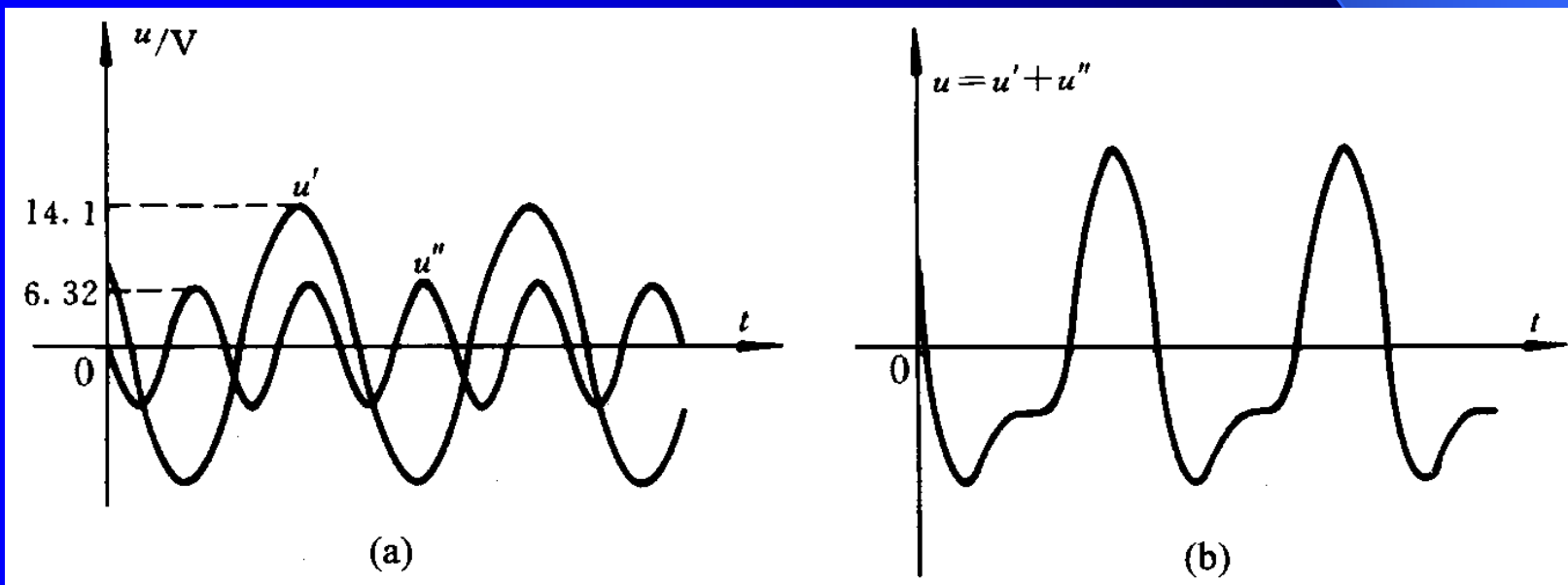
将每个正弦电源单独作用时产生的电压瞬时值相加，  
得到非正弦稳态电压 $u(t)$

$$\begin{aligned}
 u(t) &= u'(t) + u''(t) \\
 &= 10\sqrt{2} \cos(100t + 55^\circ) \text{V} + 4.47\sqrt{2} \cos(200t + 76.6^\circ) \text{V}
 \end{aligned}$$

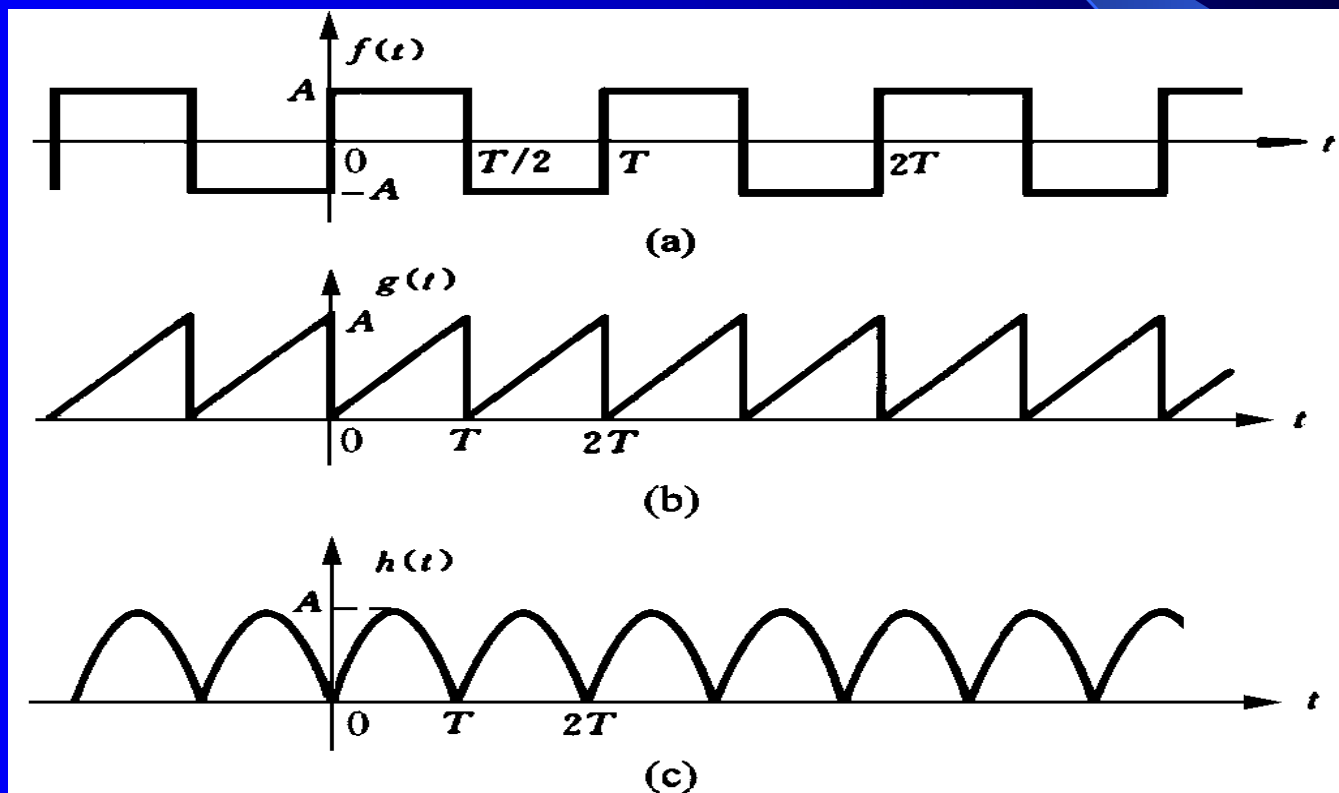
$$u(t) = u'(t) + u''(t)$$

$$= 10\sqrt{2} \cos(100t + 55^\circ) \text{V} + 4.47\sqrt{2} \cos(200t + 76.6^\circ) \text{V}$$

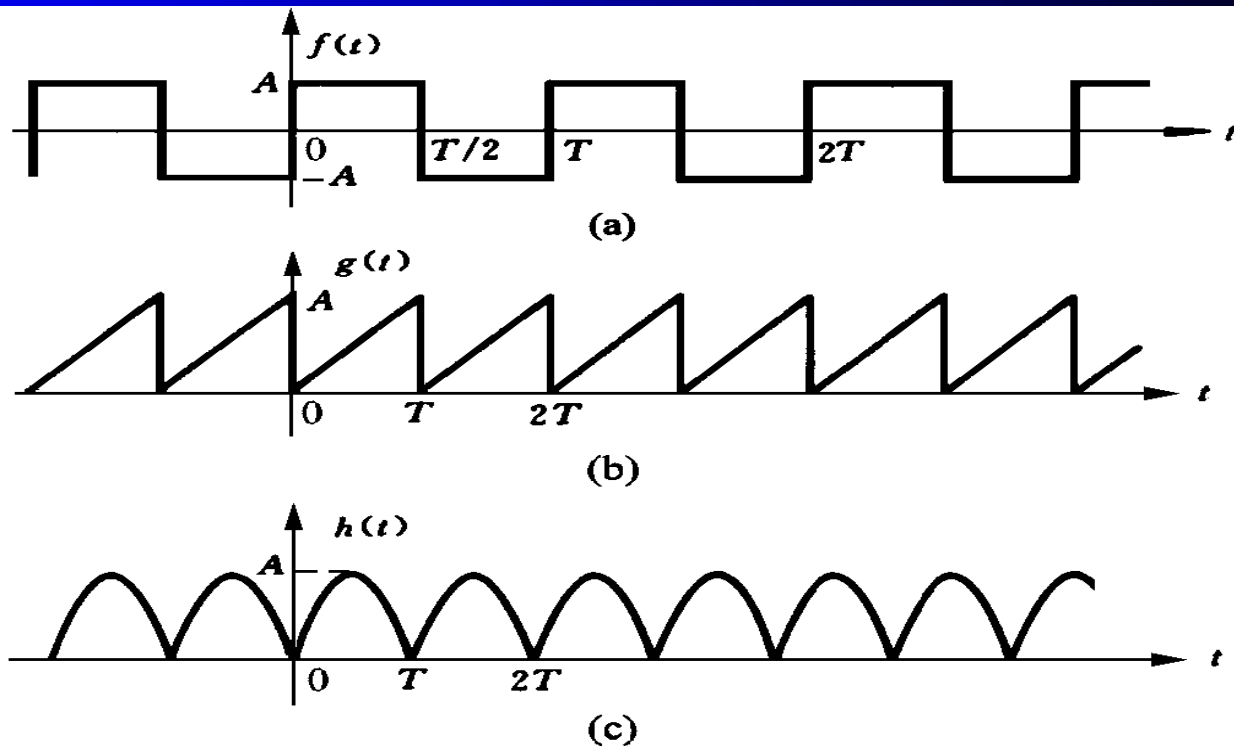
$u'(t)$  和  $u''(t)$  的波形如图(a)所示。  $u(t) = u'(t) + u''(t)$  的波形如图(b)所示，它是一个非正弦周期波形。



对于周期性非正弦信号在线性时不变电路中引起的稳态响应，也可应用叠加定理，按不同频率正弦激励下响应的计算方法求得。为此，先用傅里叶级数把非正弦周期信号分解为直流分量和一系列不同频率正弦分量之和。



图(a),(b),(c)所示三种非正弦周期信号的傅里叶级数分别为:

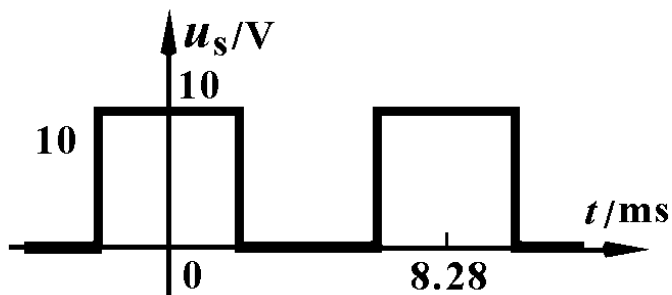


$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \left[ \sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_1 t) + \dots \right]$$

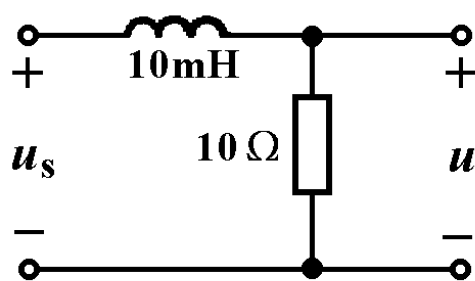
$$g(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \left[ \sin(\omega_1 t) + \frac{1}{2} \sin(2\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) + \dots \right]$$

$$h(t) = \frac{4A}{\pi} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cos(\omega_1 t) - \frac{1}{15} \cos(2\omega_1 t) - \frac{1}{35} \cos(3\omega_1 t) + \dots \right]$$

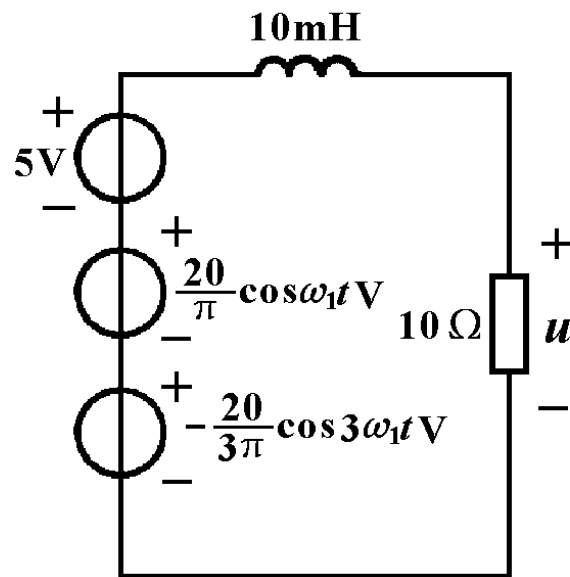
例10-28 图10-56(a)所示幅度 $A=10\text{V}$ ，周期 $T=6.28\text{ms}$ 周期方波电压信号 $u_S(t)$ 作用于图(b)所示电路。试求电阻上的稳态电压 $u(t)$ 。



(a)



(b)



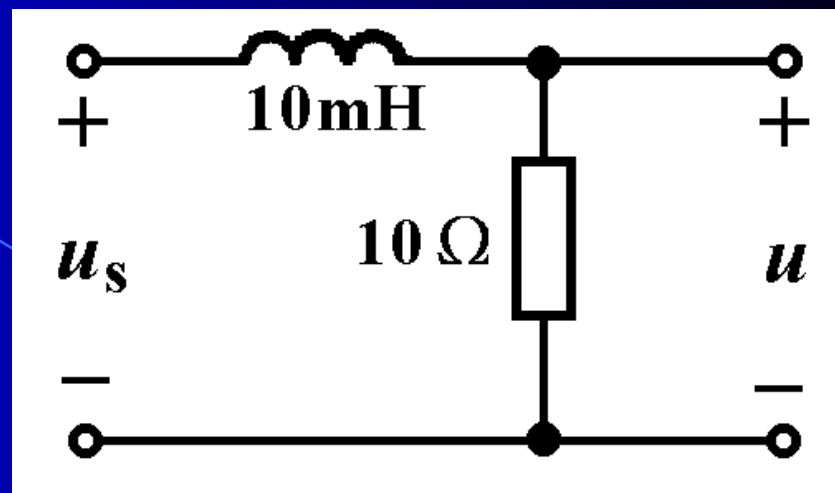
(c)

$$\begin{aligned}
 u_S(t) &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left[ \cos(\omega_1 t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_1 t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_1 t) - \dots \right] \\
 &= \left[ 5 + \frac{20}{\pi} \cos(\omega_1 t) - \frac{20}{3\pi} \cos(3\omega_1 t) + \frac{4}{\pi} \cos(5\omega_1 t) - \dots \right] \text{V}
 \end{aligned}$$



(1) 5V直流电压源作用时，由于 $\omega=0$ ，在直流稳态条件下，电感相当于短路，所以

$$u_0(t) = U_0 = 5\text{V}$$



(2) 基波电压  $(20/\pi)\cos\omega_1 t$  作用时， $\omega_1=2\pi/T=10^3\text{rad/s}$ ，根据相应的相量模型可以计算出相应的相量电压分量

$$\dot{U}_1 = \frac{R}{R + j\omega_1 L} \dot{U}_{s1} = \frac{10}{10 + j10} \times \frac{20}{\pi\sqrt{2}} = 3.183 \angle -45^\circ \text{V}$$

相应的瞬时值表达式为

$$u_1(t) = 4.5 \cos(10^3 t - 45^\circ) \text{V}$$

(3) 三次谐波电压  $(-20/3\pi)\cos(3\omega_1 t)$  作用时,  
 $3\omega_1=3\times 10^3\text{rad/s}$ , 根据相应的相量模型可以计算出相应的  
相量电压分量

$$\begin{aligned}\dot{U}_3 &= \frac{R}{R + \underline{j3\omega_1 L}} \dot{U}_{s3} \\ &= \frac{10}{10 + j30} \times \frac{-20}{3\pi\sqrt{2}} = -0.475 \angle -71.6^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

瞬时值表达式为

$$u_3(t) = -0.671 \cos(3 \times 10^3 t - 71.6^\circ) \text{ V}$$

(4) 五次谐波电压  $(4/\pi)\cos(5\omega_1 t)$  作用时,  
 $5\omega_1=5\times 10^3\text{rad/s}$ , 根据相应的相量模型计算出相应的相量  
电压分量

$$\begin{aligned}\dot{U}_5 &= \frac{R}{R + \underline{j5\omega_1 L}} \dot{U}_{S5} \\ &= \frac{10}{10 + j50} \times \frac{4}{\pi \sqrt{2}} = 0.1766 \angle -78.7^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

瞬时值表达式为

$$u_5(t) = 0.25 \cos(5 \times 10^3 t - 78.7^\circ) \text{ V}$$

(5)其余谐波分量的计算方法相同

最后将直流分量和各次谐波分量的瞬时值相加，就得到电阻上稳态电压的瞬时值

$$\begin{aligned}u(t) &= u_0(t) + u_1(t) + u_3(t) + u_5(t) + \cdots \\ &= [5 + 4.5 \cos(10^3 t - 45^\circ) - 0.67 \cos(3 \times 10^3 t - 71.6^\circ) \\ &\quad + 0.25 \cos(5 \times 10^3 t - 78.7^\circ) + \cdots] \text{V}\end{aligned}$$

注意：在用叠加法计算几个不同频率的正弦激励在电路中引起的非正弦稳态响应时，只能将电压电流的瞬时值相加，绝不能将不同频率正弦电压的相量相加。

本题用计算机程序ACAP求得输出电压前12项的结果  
以及波形如下所示:

$$\begin{aligned} u_3(t) = & 5.00 \cos(0.000 t + 0.00) + 4.50 \cos(1000. t - 45.00) \\ & + .671 \cos(3.000E+03t + 108.43) + .250 \cos(5.000E+03t - 78.69) \\ & + .129 \cos(7.000E+03t + 98.13) + 7.811E-02 \cos(9.000E+03t - 83.66) \\ & + 5.240E-02 \cos(1.100E+04t + 95.19) + 3.756E-02 \cos(1.300E+04t - 85.60) \\ & + 2.823E-02 \cos(1.500E+04t + 93.81) + 2.199E-02 \cos(1.700E+04t - 86.63) \\ & + 1.761E-02 \cos(1.900E+04t + 93.01) + 1.442E-02 \cos(2.100E+04t - 87.27) \end{aligned}$$

