信号与系统

第六章 傅里叶变换的应用

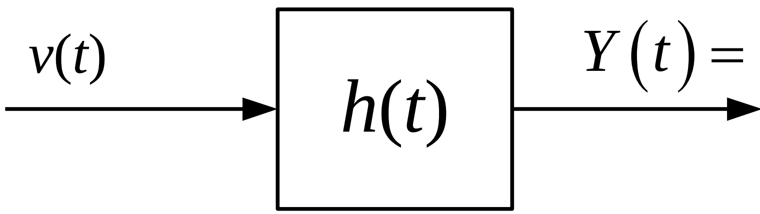
第六章 傅里叶变换的应用

- §6.1 傅里叶系统函数
- §6.2 无失真传输
- §6.3 理想低通滤波器
- §6.4 系统的物理可实现性
- §6.5 希尔伯特变换
- §6.6 带通信号通过带通系统

§6.1 傅里叶系统函数

- 1.定义：
  -

适用范围



$$Y(t)=h(t)*v(t)$$

零状态，因果/非因果

冲激响应

§6.1 傅里叶系统函数

一

适用范围

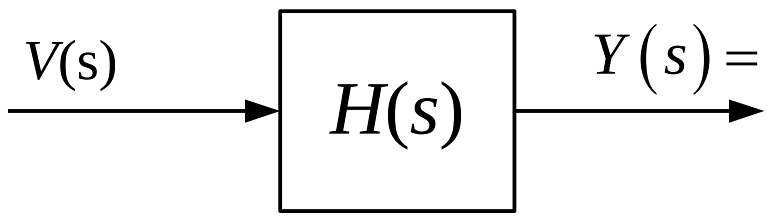
$$v(t) \longrightarrow \boxed{H(p)} \longrightarrow Y(t)=H(p)v(t)$$

零状态，因果/非因果

系统算子

$$\frac{1}{p+\alpha}v(t)=e^{-\alpha t}*v(t),t>0$$

§6.1 傅里叶系统函数



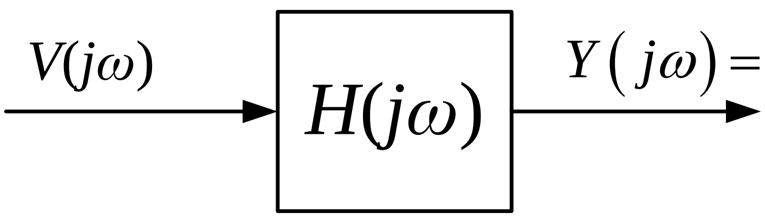
$$Y(s)=H(s)V(s)$$

系统函数

适用范围

零状态，因果系统、因果信号

§ 6.1 傅里叶系统函数



$$Y(j\omega)=H(j\omega)V(j\omega)$$

$$y(t)=\mathcal{F}^{-1}\left\{H(\mathrm{j}\omega)V(\mathrm{j}\omega)\right\}$$

系统函数

– 傅里叶系统函数：$H(\mathrm{j}\omega)=\mathcal{F}\left\{h(t)\right\}$
– 适用范围：零状态，$v(t)$是稳定信号，$h(t)\in \mathrm{L}^1(-\infty,+\infty)$即BIBO稳定，因果/非因果。

§6.1 傅里叶系统函数

– 微分方程：由 $H(p)=\dfrac{N(p)}{D(p)}, y(t)=\dfrac{N(p)}{D(p)}v(t)$

$\Rightarrow D(p)y(t)=N(p)v(t)$

$y(0_-),\cdots,y^{(n-1)}(0_-)$在零状态时为0,

$y(0_+),\cdots,y^{(n-1)}(0_+)$在零状态时不为0

§6.1 傅里叶系统函数

- 2.矩阵 A_{n*n}， $\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \lambda_1, \cdots, \lambda_n$特征根

  $A\xi_i = \lambda_i \xi_i, \mathbf{0} \neq \xi_i \in R^n, i \in \{1, 2, \cdots, n\}$， ξ_i为n个

  线性无关的特征向量。

$$\operatorname{span}\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}, \forall \boldsymbol{X} \in R^n, \boldsymbol{X} \equiv \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \cdots + \alpha_n \xi_n$$

$$A\boldsymbol{X} \equiv A \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \xi_i \ldots\ldots \text{谱方法}$$

§6.1 傅里叶系统函数

$$v(t) \longrightarrow \boxed{\mathrm{T}:H(s)} \longrightarrow Y(t)$$

$$-\text{若}\, v(t) \in \mathrm{L}^1\left[-\frac{T_1}{2}, +\frac{T_1}{2}\right], \text{则}\, v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n e^{jn\omega_1 t}, t \in \left[-\frac{T_1}{2}, +\frac{T_1}{2}\right],$$

$$y(t) = Tv(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n T e^{jn\omega_1 t} \overset{BIBO\text{稳定}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n \underbrace{H(jn\omega_1)}_{\text{算子谱（特征根）}} \underbrace{e^{jn\omega_1 t}}_{\text{特征函数}}$$

与线性代数中的谱方法相对应。

§6.1 傅里叶系统函数

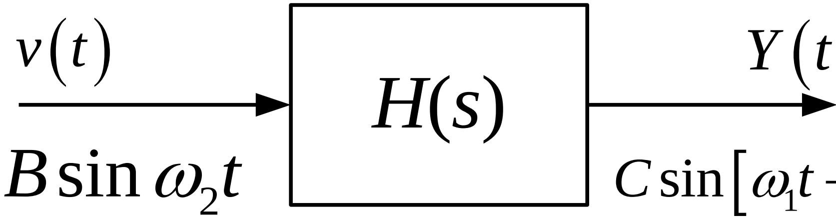
- 若$v(t)\in \mathrm{L}^1(-\infty,+\infty)$,则$v(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} V(\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}f$,

$$y(t)=Tv(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} V(\omega)\left\{Te^{\mathrm{j}\omega t}\right\}\mathrm{d}f$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} V(\omega)H(\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}f=h(t)*v(t)$$

§ 6.2 无失真传输

- 1.



$$A\sin\omega_1 t + B\sin\omega_2 t$$

$$C\sin\left[\omega_1 t+\phi_1\right]+D\sin\left[\omega_2 t+\phi_2\right]$$

$$=C\sin\left[\omega_1\left(t+\frac{\phi_1}{\omega_1}\right)\right]+D\sin\left[\omega_2\left(t+\frac{\phi_2}{\omega_2}\right)\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{– 若 } C/A\neq D/B\text{ ，则产生幅度失真;}\\ \text{– 若 }\phi_1/\omega_1\neq\phi_2/\omega_2\text{，则产生相位失真;}\end{array}\right\}\text{线性失真}$$

– 若产生新的频率则称为非线性失真。

§6.2 无失真传输

- 2.无失真传输

  输出克隆输入

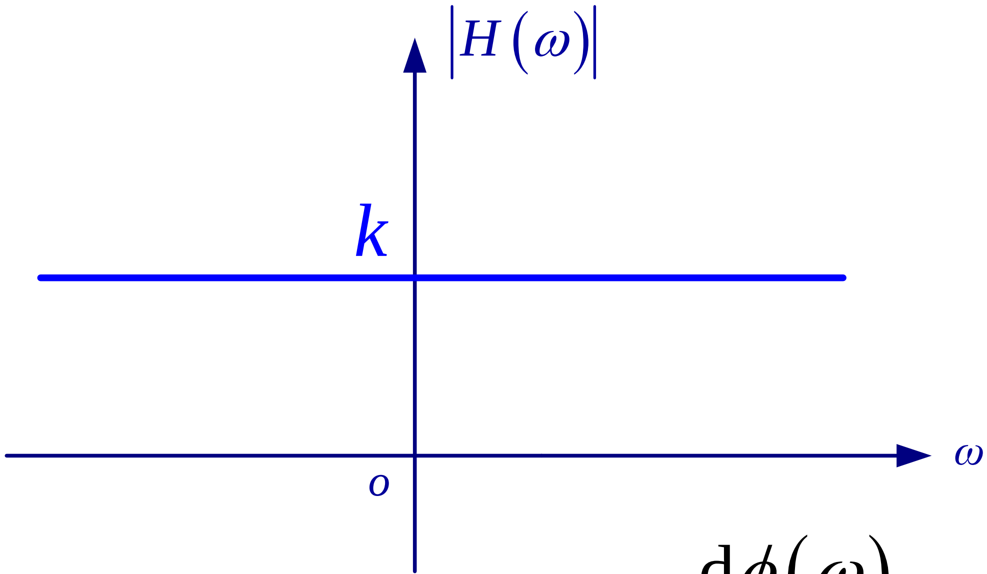
$$Y(t) = kx(t - t_0)$$

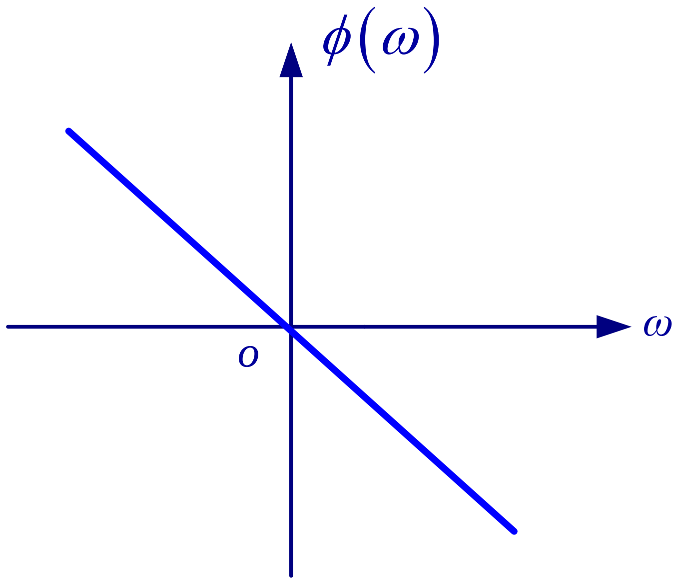
$$h(t) = k\delta(t - t_0)$$

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = ke^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

$$|H(\omega)| = k, \phi(\omega) = -\omega t_0$$

§6.2 无失真传输





– (1)群延迟：$\tau = -\dfrac{\mathrm{d}\phi(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = t_0 =$时间延迟

– (2)无失真传输系统 $\Rightarrow$全通。

– (3)无失真传输系统 $\Rightarrow$BIBO稳定。

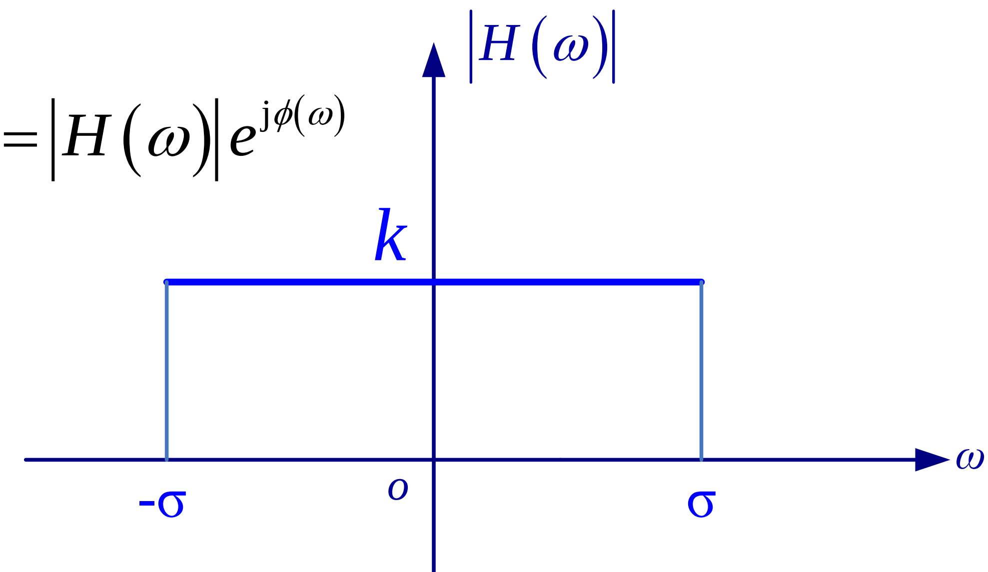
§ 6.3 理想低通滤波器

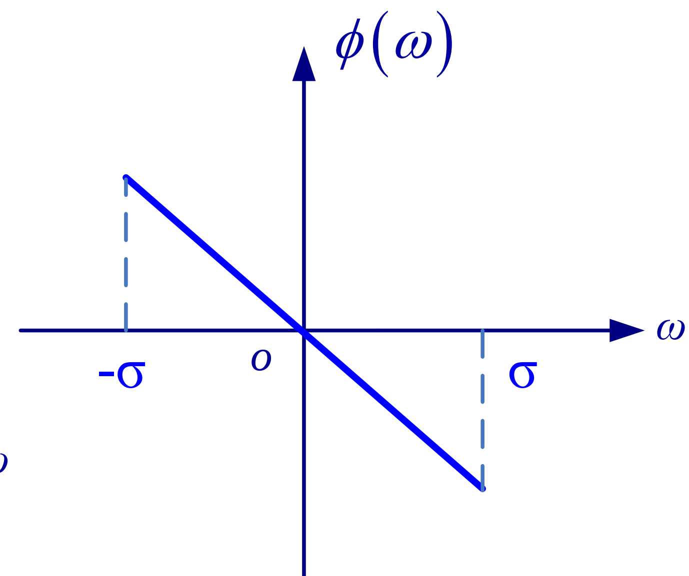
- 定义：对σ带限信号

$$\left\{F(\omega)=F(\omega)\left[u(\omega+\sigma)-u(\omega-\sigma)\right]\right\}$$

能无失真传输的系统。

$$H(\omega)=\left|H(\omega)\right|e^{j\phi(\omega)}$$





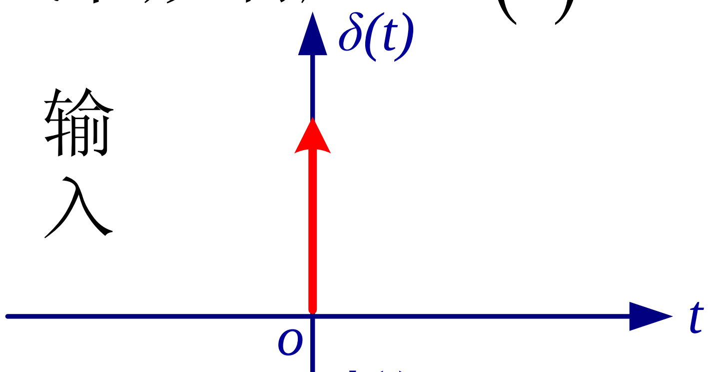
$$\left|H(\omega)\right|=K\left[u(\omega+\sigma)-u(\omega-\sigma)\right]$$

$$\phi(\omega)=-\omega t_0\left[u(\omega+\sigma)-u(\omega-\sigma)\right]$$

§ 6.3 理想低通滤波器

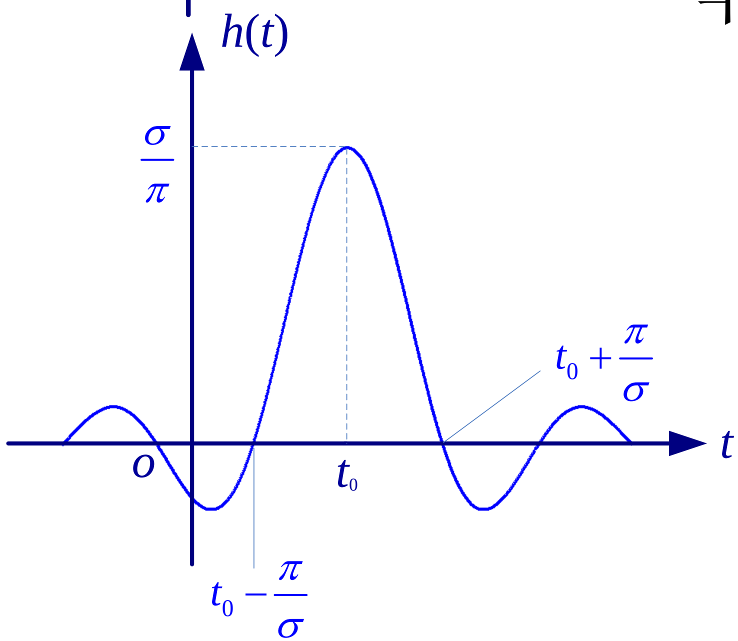
- 冲激响应：$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \dfrac{\sigma}{\pi}\mathrm{Sa}\left[\sigma(t - t_0)\right]$

输入



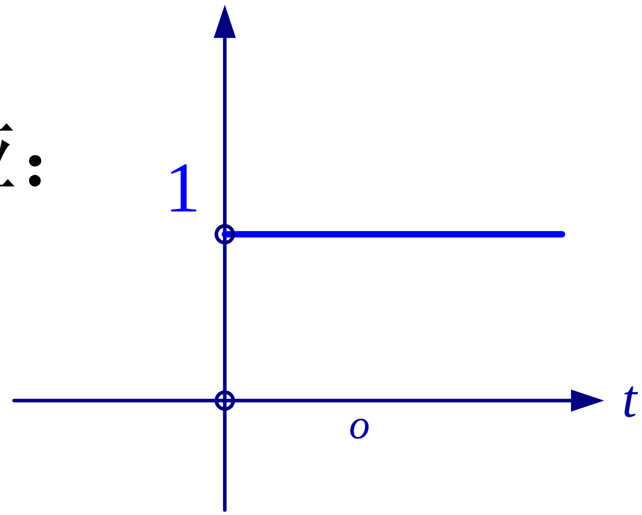
非因果

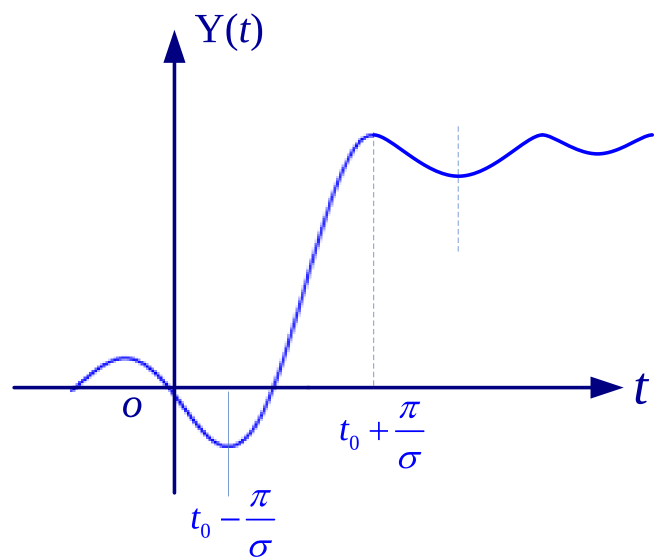
非BIBO稳定



§ 6.3 理想低通滤波器

- 阶跃响应：





$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{\sigma}{\pi}\mathrm{Sa}\left[\sigma\left(\tau-t_0\right)\right]\mathrm{d}\tau$$

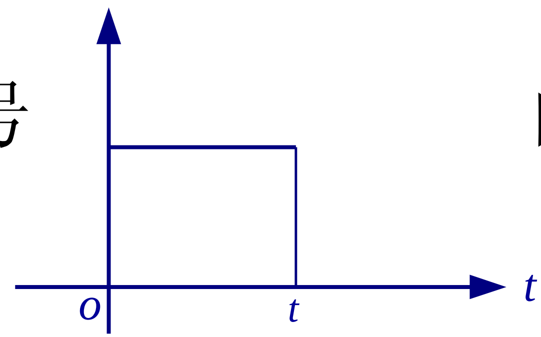
– $B_\omega = 2\sigma$ 等效带宽

– t_r 上升时间，$\min y(t)$ □ $\max y(t), t_r = 2\pi/\sigma$

– $B_\omega t_r = 4\pi$

§6.3 理想低通滤波器

– t_r也可有其他定义：t_r : 0□1或t_r : 0.1□ 0.9 level(电平), 但无论怎样定义总有 $B_\omega t_r \geq C$（常数）。

– 为实现脉冲信号  的传输，

需满足 $2t_r B_\omega \geq C$,即$\tau \geq C/B_\omega$。

§6.3 理想低通滤波器

- $$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{\sigma}{\pi}\mathrm{Sa}\left[\sigma\left(\tau-t_0\right)\right]\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\sigma(t-t_0)}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\sigma(t-t_0)}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}\left[\sigma\left(\tau-t_0\right)\right]$$

正弦积分

$$\max y(t)=y(t)\big|_{t=t_0+\pi/\sigma}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}(\pi)=1.0895$$

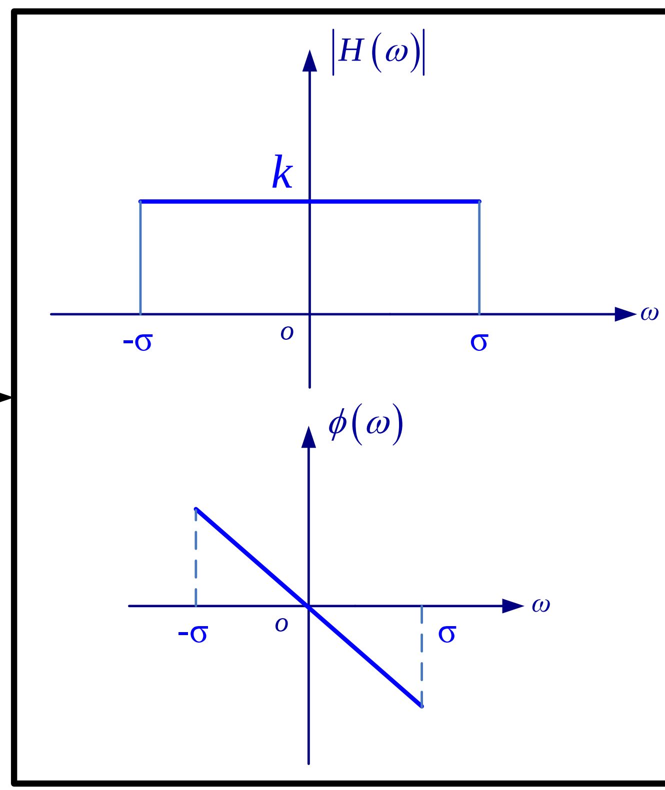
$$\min y(t)=y(t)\big|_{t=t_0-\pi/\sigma}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}(-\pi)=-0.0895$$

当$\sigma\to\infty$时,阶跃响应的峰起:$\max y(t)=1.0895$是不变的。

§ 6.3 理想低通滤波器

- Gibbs现象
  - 有第一类间断点的信号通过理想低通产生的现象。

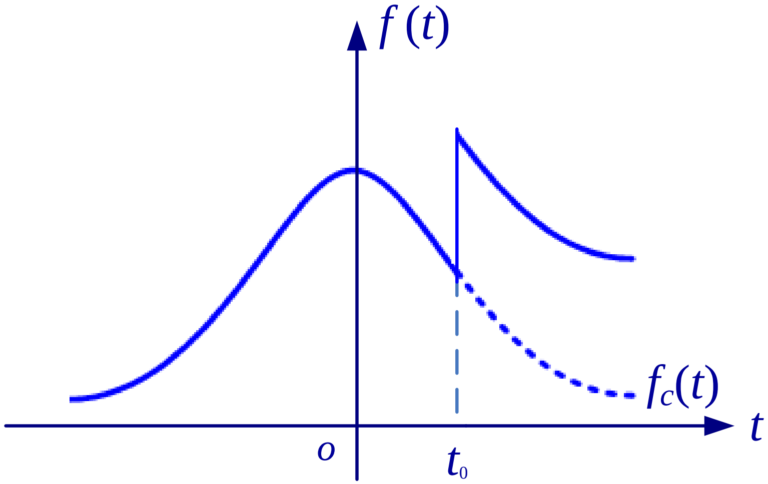
$u(t)$



σ截断

$$\mathbf{F}\left\{u(t)\right\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

§6.3 理想低通滤波器



$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

$$F_\sigma(\omega) = F(\omega)\left[u(\omega+\sigma) - u(\omega-\sigma)\right]$$

$$\lim_{\sigma\to\infty} f_\sigma(t) = \lim_{\sigma\to\infty} \mathcal{F}^{-1}\{F_\sigma(\omega)\} = \begin{cases} f(t)\text{的连续点，得到原信号}f(t) \\ \text{Gibbs现象，第一类间断点} \end{cases}$$

- Gibbs现象：第一类间断点的不一致收敛现象
- 当$\sigma\to\infty$时，相对峰起为9%不变量；
- 当 $t = t_0$ 时，$\frac{1}{2}\left[y(t_{0_-}) + y(t_{0_+})\right]$。

§6.4 系统的物理可实现性

－Paley-Wiener准则

- 物理可实现 $\Rightarrow h(t)=h(t)u(t)$ 因果
- Paley－Wiener定理：

对$\forall f(t)\in \mathrm{L}^2(-\infty,+\infty)$,若满足$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|\ln\left|F(\omega)\right|\right|}{1+\omega^2}\mathrm{d}\omega<\infty$,

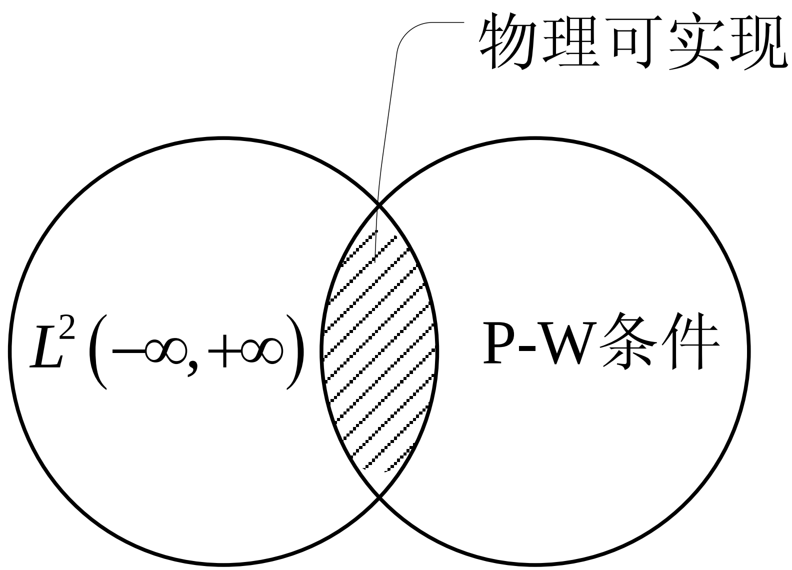
则存在$\Rightarrow h(t)=h(t)u(t)\in \mathrm{L}^2(0,+\infty)\subset \mathrm{L}^2(-\infty,+\infty)$,

其$\left|H(\omega)\right|=\left|F(\omega)\right|$。

§6.4 系统的物理可实现性

- $f(t) \in \mathrm{L}^2(-\infty, +\infty)$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 \mathrm{d}f$

- L^2空间中，满足Paley－Wiener定理的幅度谱才可能有因果实现，不满足则不能实现。



§ 6.4 系统的物理可实现性

- $H(\omega)=K$，物理可实现，$h(t)=K\delta(t)\notin \mathrm{L}^2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|h(t)\right|^2 \mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|K\right|^2 \mathrm{d}f=\infty$$

- 任意有限频段为零的$f(t)$，不可实现。

- $f(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)\Leftrightarrow F(\omega)=e^{-\omega^2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2}{1+\omega^2}\mathrm{d}f\overset{\omega\gg 1}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2}{\omega^2}\mathrm{d}f=\infty$$

物理不可实现,但 $f(t)\in \mathrm{L}^2(-\infty,+\infty)$

§6.4 系统的物理可实现性

– $f(t)$满足Paley－Wiener定理，由$|F(\omega)|$如何构造 $h(t)=h(t)u(t)$?

(1) $F(\mathrm{j}\omega)F(-\mathrm{j}\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|^2$ 已知

(2)令$s=\mathrm{j}\omega$，构造 $F(s)F(-s)$，零点 / 极点分布在 s 全平面；

(3)取 $F(s)F(-s)$ 在左半开平面的零 / 极点构造$H(s)$， $H(s)$即为所求。由此方法得到的$H(s)$是严格最小相位的，在不考虑比例因子的差别时$H(s)$是唯一的。

§ 6.5 希尔伯特变换

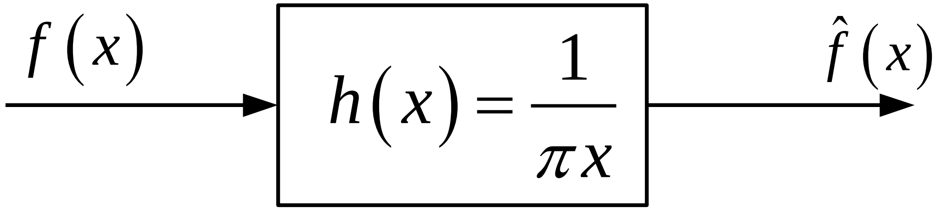
- 定义：实信号$f(x)$的Hilbert变换$\hat{f}(x)$定义为：

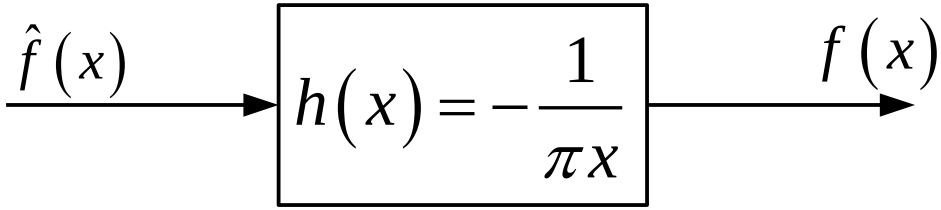
$$\hat{f}(x) \triangleq \frac{1}{\pi} f(x) * \frac{1}{x} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\lambda)}{x-\lambda} \mathrm{d}\lambda$$

- $\hat{f}(x)$的逆Hilbert变换$f(x)$：

$$f(x) \triangleq -\frac{1}{\pi} \hat{f}(x) * \frac{1}{x} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(\lambda)}{x-\lambda} \mathrm{d}\lambda$$

§6.5 希尔伯特变换

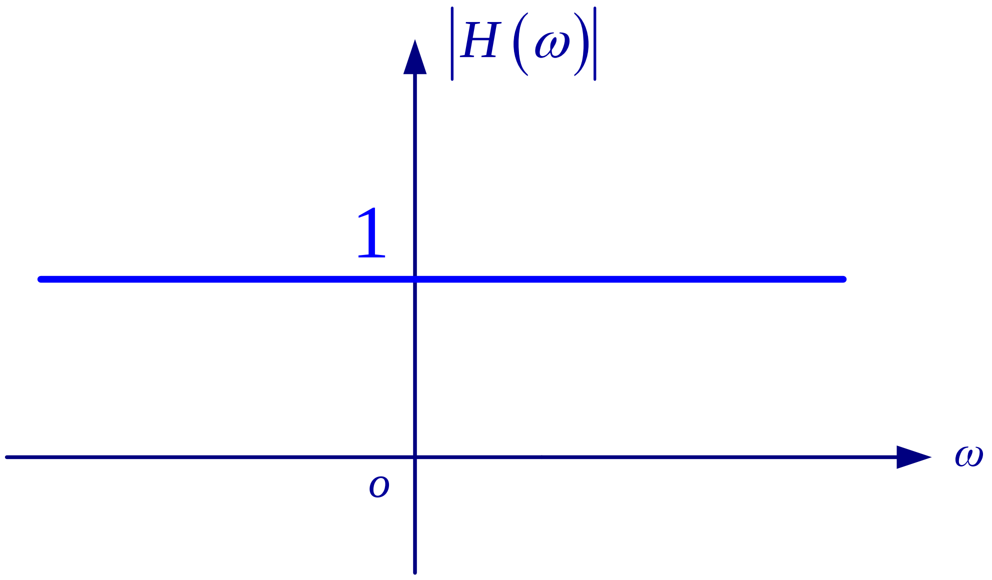


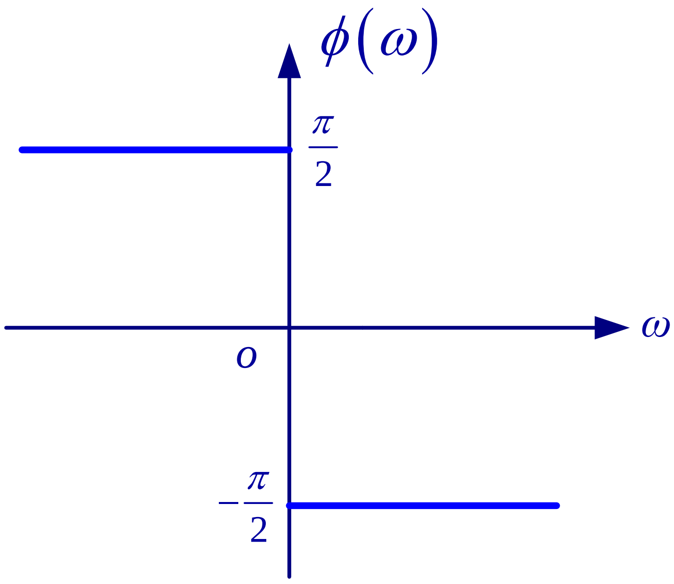


- 非BIBO稳定
- 非因果

§ 6.5 希尔伯特变换

- $\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = -\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(\omega) = e^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\,\omega}$，相当于$\frac{\pi}{2}$移相器。





§6.5 希尔伯特变换

- Hilbert变换器对$\hat{f}(t)$存在的信号构成全通系统；
- $\left\langle f(t),\hat{f}(t)\right\rangle = 0$

- $R_{ff}(\tau) = R_{\hat{f}\hat{f}}(\tau)$
- 复信号没有定义Hilbert变换
- 一个实信号$f(t)$, 若$F(\omega)=0$,当$|\omega|<\delta,\delta>0$,

  则 $\hat{f}(t) = \mathrm{F}\ \left\{f(t)\right\}$存在。

§6.5 希尔伯特变换

- 2.应用
  - 一个实信号$f(t)$的解析信号$z(t)=f(t)+\mathrm{j}\hat{f}(t)$
  - $\mathcal{F}\{z(t)\}=\mathcal{F}\{f(t)\}+\mathrm{j}\mathcal{F}\{\hat{f}(t)\}$

$$=F(\omega)+\mathrm{j}\left[-\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}\,\omega F(\omega)\right]$$

$$=2F(\omega)U(\omega)$$

解析信号$f(t)$的$F(\omega)$在ω域为因果信号(右边信号)

§ 6.5 希尔伯特变换

– $f(t)=f(t)u(t)$因果信号

$\mathcal{F}\{f(t)\}=\mathcal{F}\{f(t)u(t)\}$

$$F(\omega)=R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)$$

$$=\left[R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)\right]*\frac{1}{2\pi}\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]$$

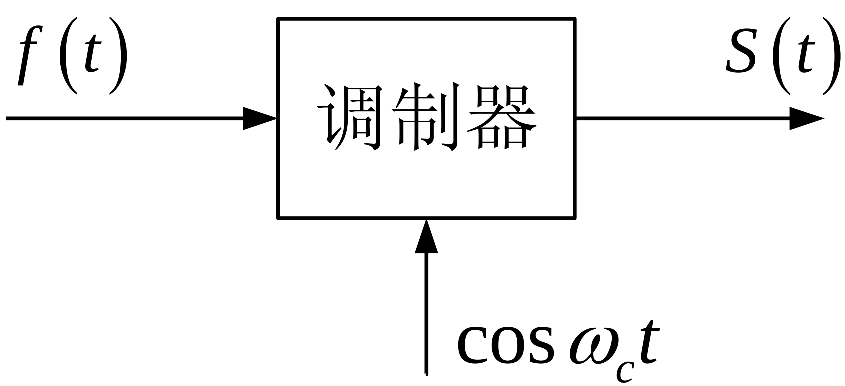
$$=\frac{1}{2\pi}\left[\pi R(\omega)+X(\omega)*\frac{1}{\omega}\right]+\frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{j}\pi X(\omega)-\mathrm{j}R(\omega)*\frac{1}{\omega}\right]$$

$$\Rightarrow R(\omega)=\frac{1}{\pi}X(\omega)*\frac{1}{\omega}$$

$$X(\omega)=-\frac{1}{\pi}R(\omega)*\frac{1}{\omega}$$

§6.6带通信号通过带通系统 ——复包络方法

- 1.带通信号
  - 基带信号：未经调制，等效带宽有限的信号。
  - 带通信号：基带信号经调制即成为带通信号。
  -



$$s(t)=a(t)\cos\left[\omega_c t+\phi(t)\right]$$

载波角频率

§6.6带通信号通过带通系统

- (1) 若$a(t)=A+Bf(t),\phi(t)=$常数,调幅$\rightarrow$线性调制
- (2) 若$a(t)=$常数,$\omega(t)=F\{f(t)\},\rightarrow$非线性调制

  $\phi(t)=\int_{-\infty}^{t}\omega(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}F\{f(\tau)\}\mathrm{d}\tau$,为调频,特别的,

  $\omega(t)=Kf(t),\phi(t)=K\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau\rightarrow$线性调频
- (3) 若$a(t)=$常数,$\phi(t)=Kf(t)$为调相$\rightarrow$非线性调制
- (4) 若$f(t)$含于$a(t)$和$\phi(t)$中,则为幅相联合调制

  幅相联合调制$\rightarrow$非线性调制

§6.6带通信号通过带通系统

- 2.复包络

$$s(t)=a(t)\cos\left[\omega_c t+\phi(t)\right] \qquad a(t)\text{和}\phi(t)\text{都是实函数}$$

$$=\frac{1}{2}a(t)\left[e^{\mathrm{j}\left[\omega_c t+\phi(t)\right]}+e^{-\mathrm{j}\left[\omega_c t+\phi(t)\right]}\right]$$

$$=\frac{1}{2}a(t)e^{\mathrm{j}\phi(t)}e^{\mathrm{j}\omega_c t}+\frac{1}{2}a(t)e^{-\mathrm{j}\phi(t)}e^{-\mathrm{j}\omega_c t}$$

$$=\frac{1}{2}x(t)e^{\mathrm{j}\omega_c t}+\frac{1}{2}\left[x(t)e^{\mathrm{j}\omega_c t}\right]^*$$

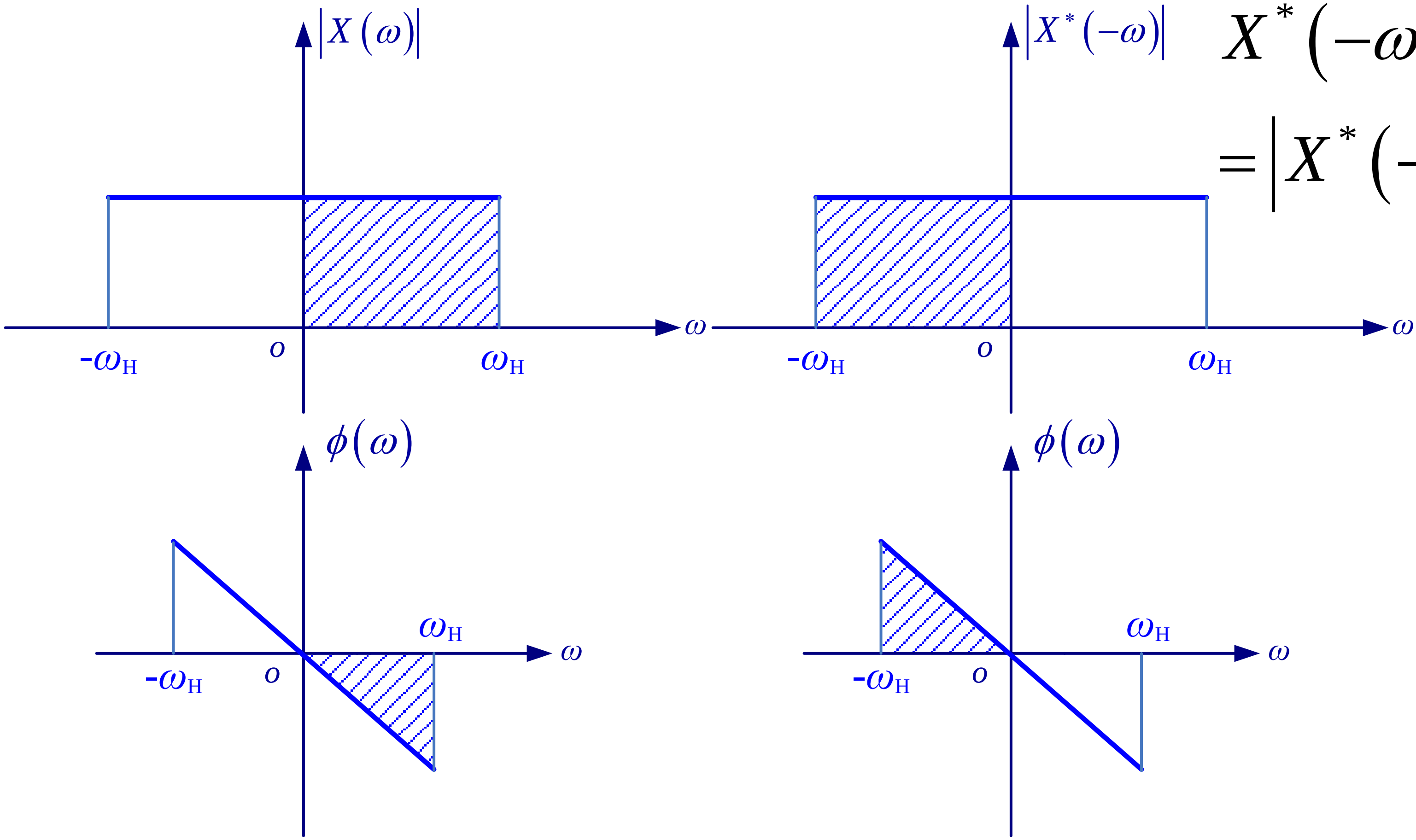
§6.6带通信号通过带通系统

- 定义：带通信号的复包络为$x(t)=a(t)e^{\mathrm{j}\phi(t)}$

$x(t)$为基带带限信号$\Leftrightarrow s(t)$为带通带限信号

§6.6带通信号通过带通系统

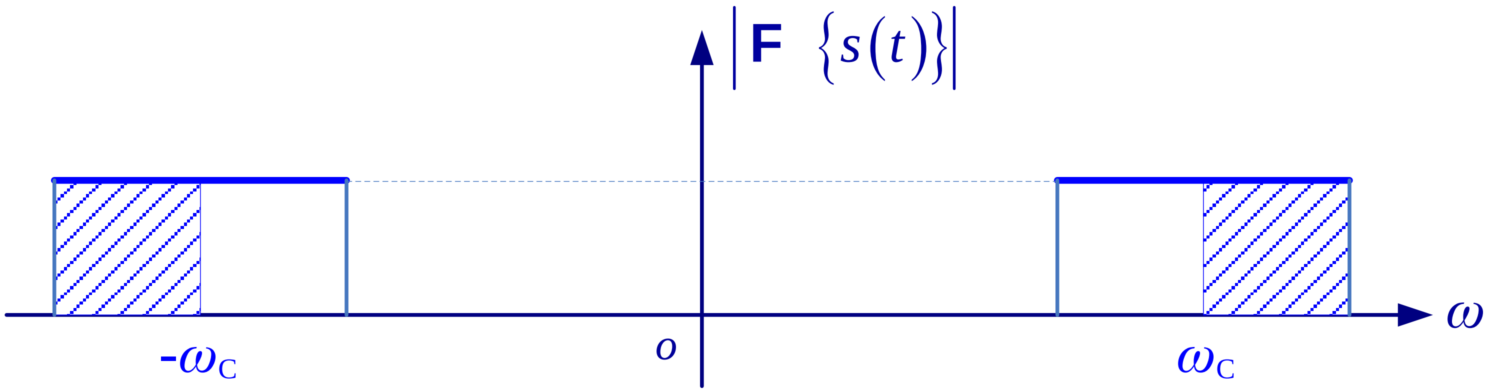
$$\text{令}\mathcal{F}\left\{x(t)\right\}=X(\omega)\Leftrightarrow \mathcal{F}\left\{x^*(t)\right\}=X^*(-\omega)$$

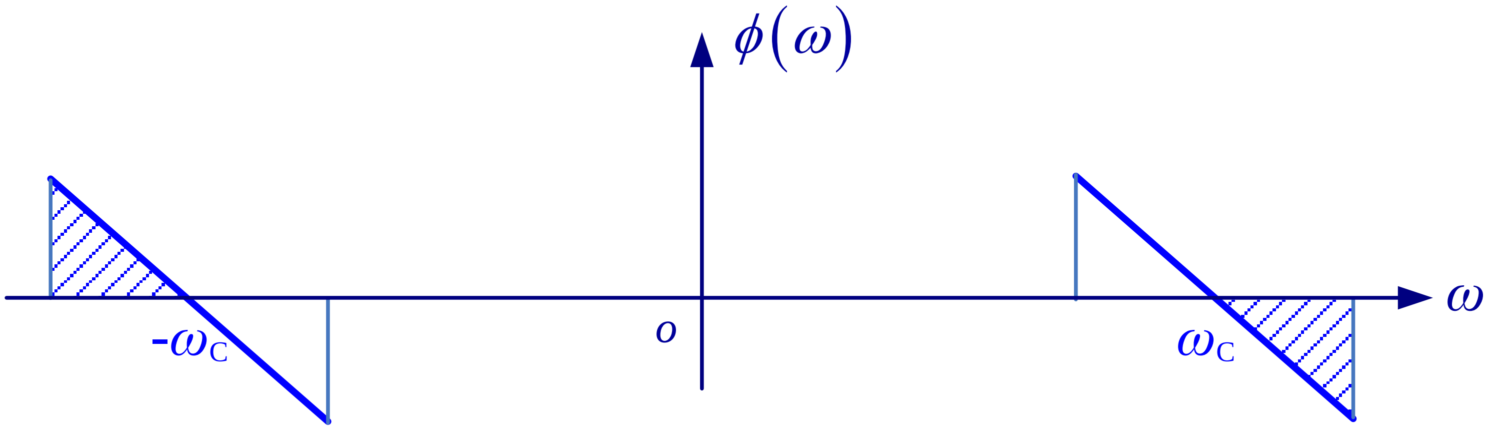


$$X^*(-\omega)$$
$$=\left|X^*(-\omega)\right|e^{-j\phi(-\omega)}$$

§6.6带通信号通过带通系统

$$\mathcal{F}\{s(t)\} = \frac{1}{2}\{X(\omega-\omega_c) + X^*[-(\omega+\omega_c)]\}$$





§6.6带通信号通过带通系统

- 3.带通系统

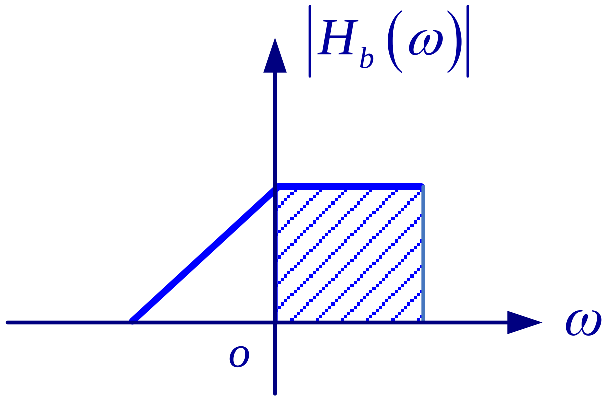
$$h(t)=h_0(t)\cos\left[\omega_c t+\theta(t)\right]=\frac{1}{2}h_b(t)e^{\mathrm{j}\omega_c t}+\frac{1}{2}h_b{}^*(t)e^{-\mathrm{j}\omega_c t}$$

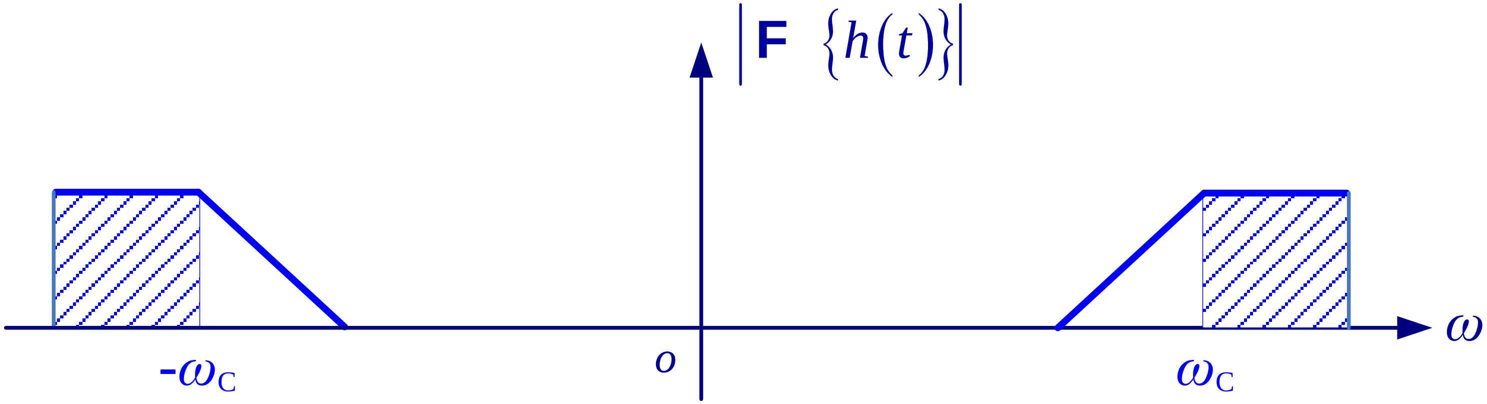
为带通系统的冲激响应

$$h_b(t)=h_0(t)e^{\mathrm{j}\theta(t)}$$

为带通系统的冲激响应的复包络

§6.6带通信号通过带通系统





§6.6带通信号通过带通系统

- 4.带通信号通过带通系统

$s(t) = a(t)\cos\left[\omega_c t + \phi(t)\right]$

$h(t) = h_0(t)\cos\left[\omega_c t + \theta(t)\right]$

$Y(t)$

$$Y(t) = s(t) * h(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\tilde{Y}(t)e^{\mathrm{j}\omega_c t}\right\}$$

零状态响应

$$\tilde{Y}(t) = h_b(t) * s(t)$$

带通信号的复包络

带通系统的冲激响应的复包络

输出信号的复包络