



第6章 平面电磁波

引言

一、平面电磁波的概念

二、均匀平面波的特性

三、平面电磁波在无耗介质中的传播特性

四、均匀平面波在有耗媒质中的传播规律

五、均匀平面波的极化特性

六、均匀平面波对平面边界的垂直入射

七、多层介质分界面上的垂直入射

八、均匀平面波对平面边界的斜入射

九、电磁波的应用



引言 隐身飞机是怎么隐身的？

隐身大体可以分为三种：

1. 视觉隐身（或光学隐身）

光线弯曲，透视等。

2. 红外隐身

红外辐射屏蔽。

3. 电磁隐身（或雷达隐身）

外形整体设计，涂敷吸波材料，面阻抗加载等。



Have Blue HB 1001

This three-view depicts the first of the two Have Blue experimental aircraft, which paved the way for the design of the full-scale 'Stealth Fighter'. It wore this strange scheme to hide its unique faceted surface, although the second Have Blue was finished in an all-over grey. HB 1001 also differed by having a large instrumentation boom attached to its nose.

Pole testing

The flying of the HB 1002 against real radars in an operational environment was the culmination of a long RCS trials programme, which began with the testing of small, third-scale and full-scale models on poles. These tests showed the radar 'flare-spots' - areas of too much radar reflectivity.

Systems

Have Blue utilised many off-the-shelf systems from other aircraft, including the fly-by-wire system from the F-16. The aircraft also had the F-16's sidestick controller, while the undercarriage came from the Northrop F-5. The two engines came from a Rockwell T-28 Buckeye.

Flight control systems

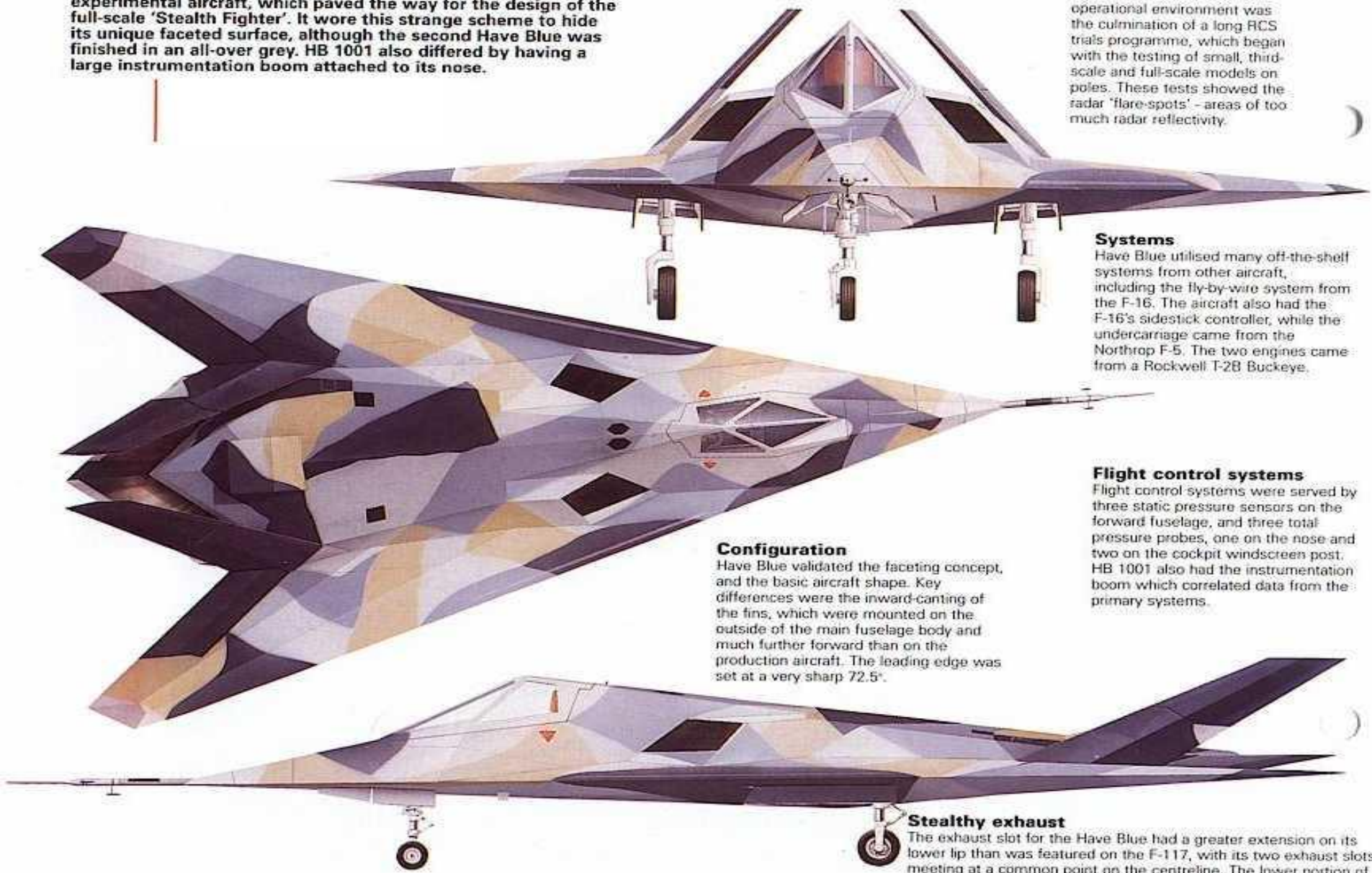
Flight control systems were served by three static pressure sensors on the forward fuselage, and three total pressure probes, one on the nose and two on the cockpit windscreen post. HB 1001 also had the instrumentation boom which correlated data from the primary systems.

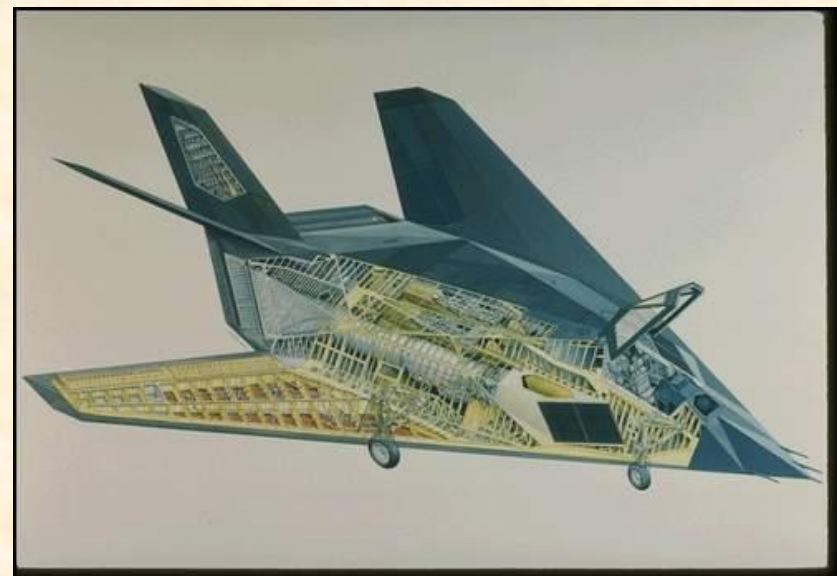
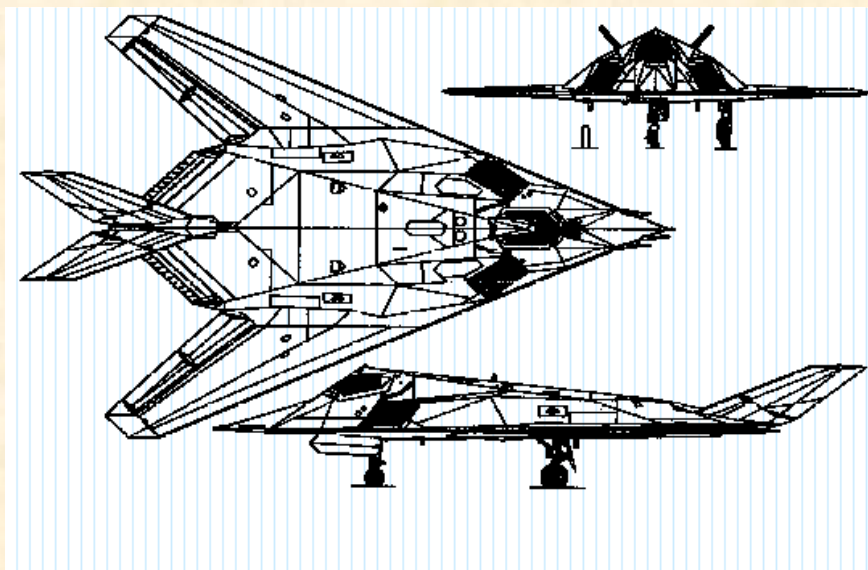
Configuration

Have Blue validated the faceting concept, and the basic aircraft shape. Key differences were the inward-canting of the fins, which were mounted on the outside of the main fuselage body and much further forward than on the production aircraft. The leading edge was set at a very sharp 72.5°.

Stealthy exhaust

The exhaust slot for the Have Blue had a greater extension on its lower lip than was featured on the F-117, with its two exhaust slots meeting at a common point on the centreline. The lower portion of the nozzle formed a two-position plate which automatically





美国 F117 隐形轰炸机 - <http://jsbz.yeah.net>











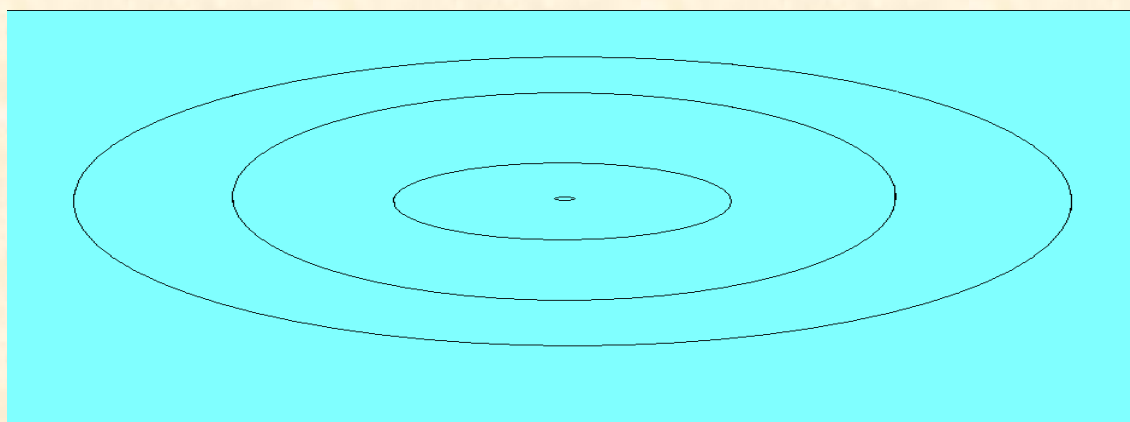
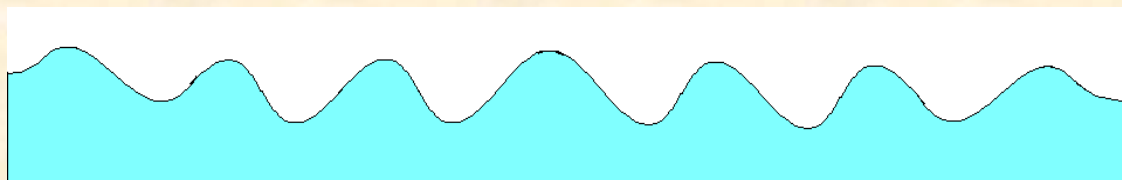
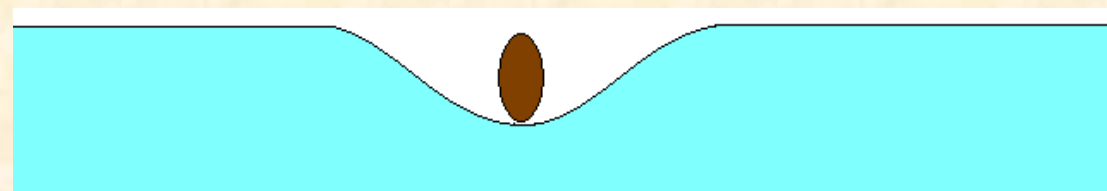


F22隐身战斗机



例如：水波

问题：一个点源所发射的电磁波的等相位面是什么样？





一、平面电磁波的概念

1. 等相位面：

在某一时刻，空间具有相同相位的点构成的面称为等相位面。

等相位面又称为波阵面。

2. 球面波：等相位面是球面的电磁波称为球面波。

3. 平面波：等相位面是平面的电磁波称为平面电磁波。

4. 均匀平面波：

任意时刻，如果在平面等相位面上，每一点的电场强度均相同，这种电磁波称为均匀平面波。



二、均匀平面波的特性

1. 均匀平面波满足一维波动方程

从麦克斯韦方程出发： 在自由空间： $\vec{J}_c = 0, \rho_v = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{array} \right.$$

对第一方程两边取旋度，得： 由此得： $-\nabla^2 \vec{H} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right)$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E})$$

则：

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

根据矢量运算：

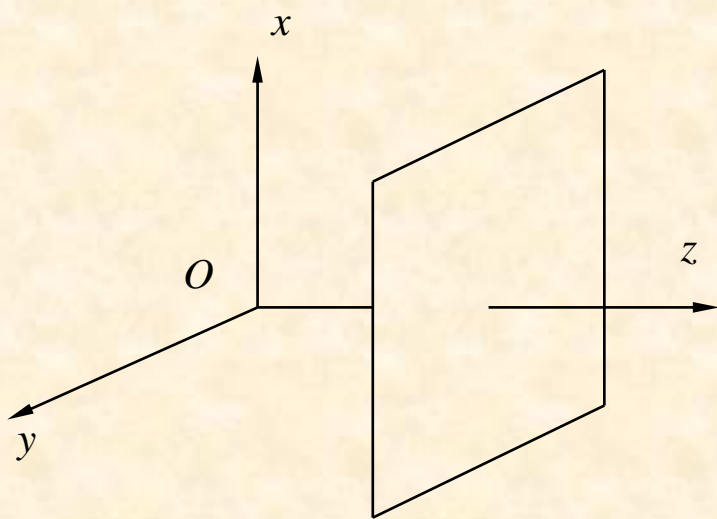
$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H}$$

——磁场的波动方程



同理可得： $\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ ——电场的波动方程

对均匀平面波而言，选直角坐标系，假设电磁波沿 z 方向传播，等相位面平面平行于 xOy 平面。如图所示：



$$\frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

所以：

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

可见：均匀平面波满足一维波动方程。



2. 均匀平面波是横电磁波 (TEM波)

根据麦克斯韦第一方程: $\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \hat{a}_x + \frac{\partial H_x}{\partial z} \hat{a}_y \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ 0 = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \hat{a}_x + \frac{\partial E_y}{\partial t} \hat{a}_y + \frac{\partial E_z}{\partial t} \hat{a}_z \right)$$

可见: E_z 与时间 t 无关, 说明电场中没有 E_z 分量。 $E_z = 0$

结论: 电场只有 E_x 和 E_y 分量, 说明电场矢量位于 xOy 平面上。

电场强度可表示为: $\vec{E} = \hat{a}_x E_x + \hat{a}_y E_y$



根据麦克斯韦尔第二方程: $\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\hat{a}_x \frac{\partial E_y}{\partial z} + \hat{a}_y \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$= -\mu \left(\hat{a}_x \frac{\partial H_x}{\partial t} + \hat{a}_y \frac{\partial H_y}{\partial t} + \hat{a}_z \frac{\partial H_z}{\partial t} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

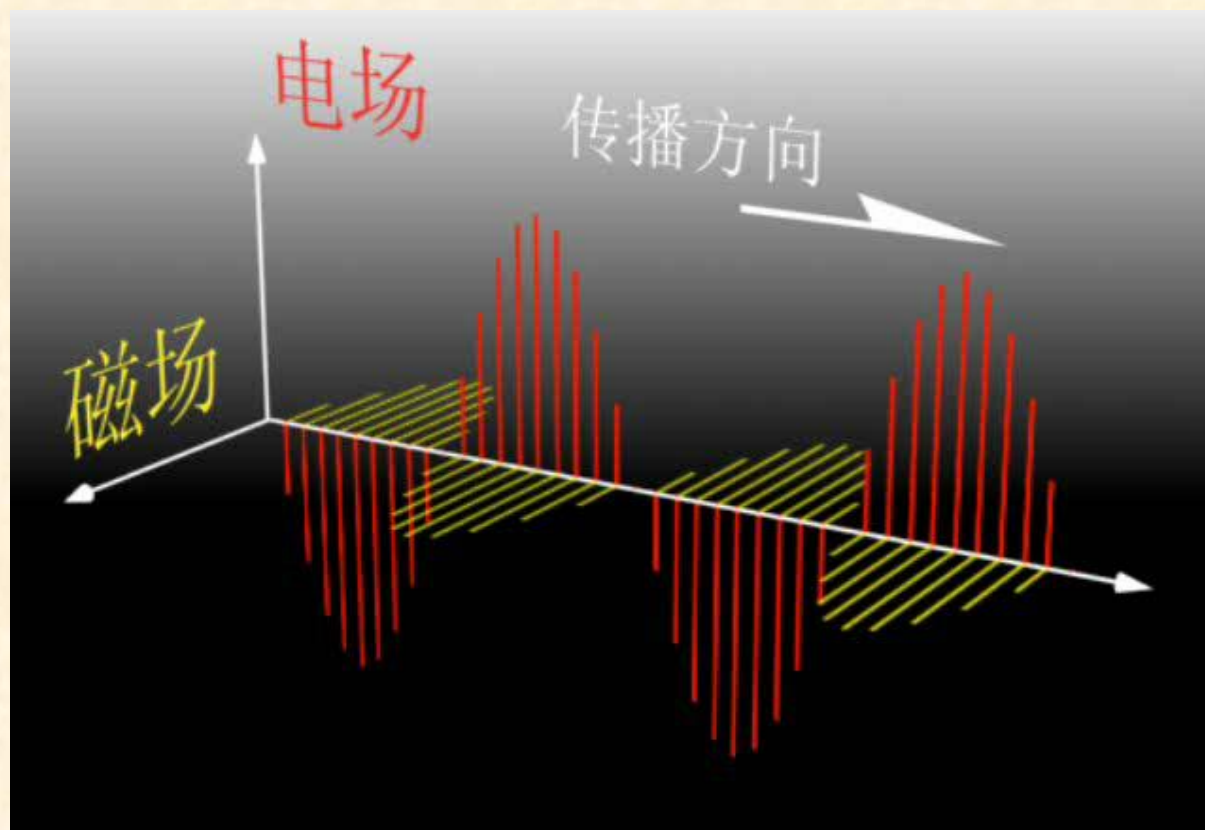
可见: H_z 与时间 t 无关, 不属于时变场部分。 $H_z = 0$

磁场强度可表示为: $\vec{H} = \hat{a}_x H_x + \hat{a}_y H_y$

结论:

对传播方向而言, 电场和磁场只有横向分量, 没有纵向分量, 这种电磁波称为横电磁波, 简称为TEM波。

横电磁波





三、平面电磁波在无耗介质中的传播特性

1. 波动方程的解

已知电场的波动方程为：

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

分解为标量方程：

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

对于随时间按正弦变化的电磁场，因子为 $e^{j\omega t}$ ，因此：

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu\varepsilon E_x$$

其中： $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ 称为角频率。

令：

$$k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$$

得到：

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -k^2 E_x$$



方程：
$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -k^2 E_x$$

该方程的解为：
$$E_x = A_1 e^{-jkz} + A_2 e^{jkz}$$

式中： A_1 和 A_2 为复常数。 $A_1 = A_{1m} e^{j\theta_{x1}}$ $A_2 = A_{2m} e^{j\theta_{x2}}$

$$E_x = A_{1m} e^{-j(kz - \theta_{x1})} + A_{2m} e^{j(kz + \theta_{x2})}$$

前向行波 \rightarrow

\leftarrow 后向行波

同理：
$$E_y = A'_{1m} e^{-j(kz - \theta_{y1})} + A'_{2m} e^{j(kz + \theta_{y2})}$$



2. 相位常数 k

$$\text{电场: } E_x = A_{1m} e^{-j(kz - \theta_{x1})} + A_{2m} e^{j(kz + \theta_{x2})}$$

可见： k 反映的是随着波传播距离 z 的增加，波的相位的变化情况，所以 k 称为相位常数。

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad \text{已知: } v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \text{ 为波的传播速度。}$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{\lambda f} = \frac{2\pi}{\lambda} \longrightarrow k \text{ 又称为波数。}$$

若只考虑前向的单行波，即： $E_x = E_{xm} e^{-j(kz - \theta_x)}$
——复数表示形式

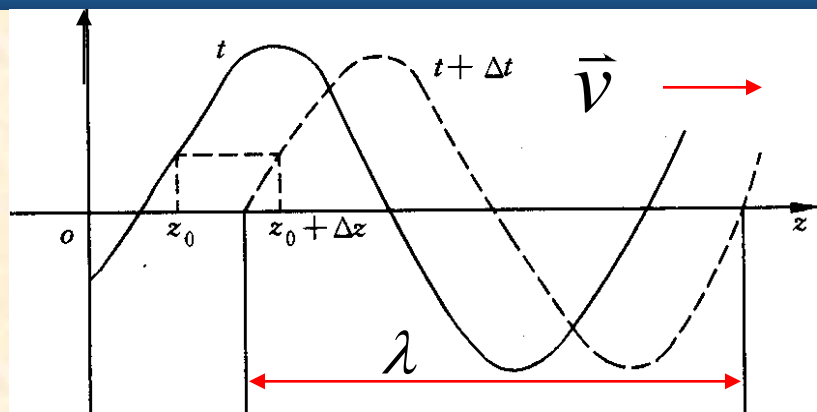
在这种表达形式中隐含了时间因子 $e^{j\omega t}$ 。



3. 相速 v_p

相速：等相位面运动的速度。

电场的另一种表示形式为：



$$E_x = \text{Re}(E_{xm} e^{-j(kz - \theta_x)} e^{j\omega t}) = E_{xm} \cos(\omega t - kz + \theta_x)$$

——瞬时表示形式

等相位面方程为： $\omega t - kz + \theta_x = C$ (常数)

$$\frac{d}{dt}(\omega t - kz + \theta_x) = 0 \longrightarrow \omega - \frac{dz}{dt} = 0 \longrightarrow v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

所以： $v_p = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$ 真空中的光速

对于无限大、均匀、理想介质中的均匀平面波，相速 v_p 等于波速 v 。



4. 介质的本质阻抗

磁场可由麦克斯韦方程求得：

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu \vec{H}$$

若： $E_x = E_{xm} e^{-j(kz - \theta_x)}$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{a}_y = -j\omega\mu (H_x \hat{a}_x + H_y \hat{a}_y + H_z \hat{a}_z)$$

$$H_y = j \frac{1}{\omega\mu} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z} = j \frac{-jk}{\omega\mu} E_{xm} e^{-j(kz - \theta_x)} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_x$$

令： $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ \longrightarrow 称为介质的本质阻，有阻抗的量纲。

可见： $\eta = \frac{E_x}{H_y}$ 在真空中： $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \Omega \approx 377 \Omega$



根据：
$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu\vec{H}$$

若：
$$E_x = E_{xm} e^{-j(kz - \theta_x)}$$

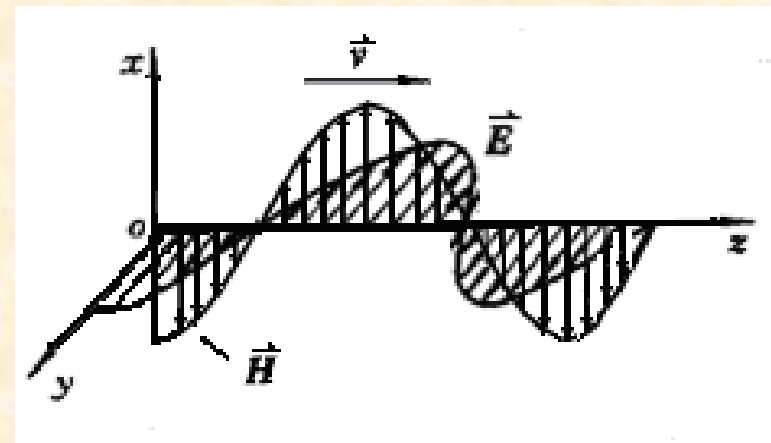
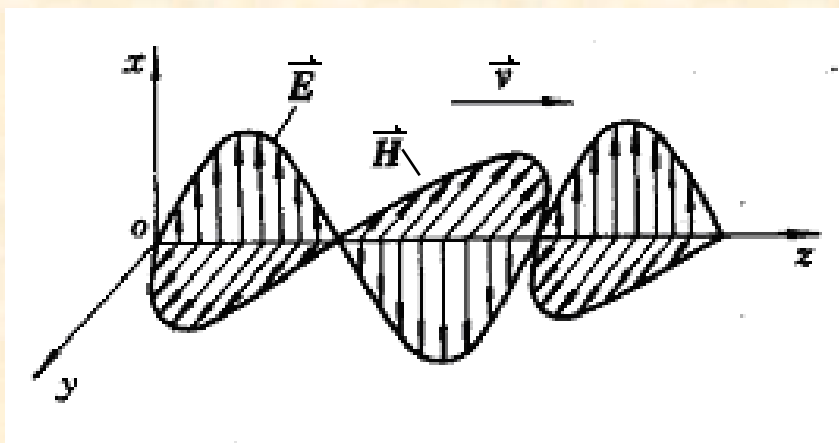
↓

$$H_y = \frac{E_{xm}}{\eta} e^{-j(kz - \theta_x)}$$

若：
$$E_y = E_{ym} e^{-j(kz - \theta_y)}$$

↓

$$H_x = -\frac{E_{ym}}{\eta} e^{-j(kz - \theta_y)}$$



结论： \vec{E} 与 \vec{H} 在空间是相互垂直的，在时间上是同相的，振幅之比为本质阻抗。

[平面波动态演示1](#) [点的振动演示2](#) [平面电场演示3](#)



5. 坡印廷矢量

(1) 坡印廷矢量的概念

$$\text{电场能量密度: } w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \quad \text{磁场能量密度: } w_m = \frac{1}{2} \mu H^2$$

电磁场中任意体积 V 内储存的总电磁能量为：

$$W = \int_V (w_e + w_m) dV = \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dV$$

设空间某点的电磁能量密度随时间的变化率为：

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) = \varepsilon E \frac{\partial E}{\partial t} + \mu H \frac{\partial H}{\partial t} = \varepsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$



$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) = \varepsilon E \frac{\partial E}{\partial t} + \mu H \frac{\partial H}{\partial t} = \varepsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

由麦克斯韦方程:

$$\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} = \vec{E} \cdot \vec{J}_c + \varepsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} = -\mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

可得:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) = \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{E} \cdot \vec{J}_c - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E}$$

运用矢量恒等式: $\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) = \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{E} \cdot \vec{J}_c - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{J}_c \cdot \vec{E}$$

上式两边在给定的体积V内积分,有

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dV = \int_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV + \int_V \vec{J}_c \cdot \vec{E} dV$$



由高斯定律得：

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dV = \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} + \int_V \vec{J}_c \cdot \vec{E} dV$$

欧姆功率损耗

——坡印廷定理

坡印廷矢量：流出单位面积的功率密度。

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

(2) 瞬时坡印廷矢量

电磁场的瞬时形式为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kz + \theta_e) \\ \vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t - kz + \theta_m) \end{array} \right.$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$= \vec{E}_m \times \vec{H}_m \cos(\omega t - kz + \theta_e) \cos(\omega t - kz + \theta_m)$$

$$= \frac{1}{2} \vec{E}_m \times \vec{H}_m [\cos(\theta_e - \theta_m) + \cos(2\omega t - 2kz + \theta_e + \theta_m)]$$



(3) 平均坡印廷矢量

$$\begin{aligned}
 \vec{S}_{\text{av}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \vec{E}_m \times \vec{H}_m [\cos(\theta_e - \theta_m) + \cos(2\omega t - 2kz + \theta_e + \theta_m)] dt \\
 &= \frac{1}{2} \vec{E}_m \times \vec{H}_m \cos(\theta_e - \theta_m)
 \end{aligned}$$

电磁场的复数形式为： $\vec{E} = \vec{E}_m e^{-jkz} e^{j\theta_e}$ $\vec{H} = \vec{H}_m e^{-jkz} e^{j\theta_m}$

$$\vec{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{1}{2} \vec{E}_m \times \vec{H}_m \cos(\theta_e - \theta_m)$$

式中 \vec{H}^* 表示 \vec{H} 的共轭。 $\vec{H}^* = \vec{H}_m e^{jkz} e^{-j\theta_m}$



例1: 在介质 ($\mu = \mu_0, \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$) 中沿 y 方向传播的均匀平面波电场强度为 $\vec{E} = 377 \cos(10^9 t - 5y) \hat{a}_z$ V/m, 求(1)相对介电常数; (2)传播速度; (3)本质阻抗; (4)波长; (5)磁场强度; (6)电场强度和磁场强度的复数表示形式; (7)波的平均功率密度。

解 (1)相对介电常数

由电场 \vec{E} 强度的表达式可知: $\omega = 10^9$ rad/s, $k = 5$ rad/m

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \rightarrow \varepsilon_r = \frac{25 \times 10^{-18}}{\mu_0 \varepsilon_0} = 25 \times 10^{-18} \times (3 \times 10^8)^2 = 2.25$$

(2)传播速度为
$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{10^9}{5} \text{ m/s} = 2 \times 10^8 \text{ m/s}$$

(3)本质阻抗为
$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} = \frac{120\pi}{\sqrt{2.25}} \Omega = 251.33 \Omega$$

(4)波长为
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{5} \text{ m} = 1.257 \text{ m}$$



(5) 根据均匀平面波的电场、磁场和传播方向满足右手螺旋法则的规律，及电场强度和磁场强度的关系，可得

$$\vec{H} = \hat{a}_y \times \frac{1}{\eta} \vec{E} = 1.5 \cos(10^9 t - 5y) \hat{a}_x \quad \text{A/m}$$

(6) 电场强度和磁场强度的复数形式为

$$\vec{E} = 377 \cos(10^9 t - 5y) \hat{a}_z \quad \text{V/m} \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = 377 e^{-j5y} \hat{a}_z \quad \text{V/m}$$

$$\vec{H} = 1.5 \cos(10^9 t - 5y) \hat{a}_x \quad \text{A/m} \quad \longrightarrow \quad \vec{H} = 1.5 e^{-j5y} \hat{a}_x \quad \text{A/m}$$

(7) 媒质中的平均功率密度是

$$\vec{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] \quad \longleftarrow \quad \vec{H}^* = 1.5 e^{j5y} \hat{a}_x \quad \text{A/m}$$

$$\vec{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \times 377 \times 1.5 [\hat{a}_z \times \hat{a}_x] = 282.75 \hat{a}_y \quad \text{W/m}^2$$



四、均匀平面波在有耗媒质中的传播规律

有耗媒质 ($\sigma \neq 0$) 也称为导电媒质。

1. 复介电常数和复本质阻抗

在理想介质中: $\sigma = 0$ $\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E}$

在有耗媒质中: $\sigma \neq 0$ $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + j\omega\epsilon\vec{E} = \sigma\vec{E} + j\omega\epsilon\vec{E}$

↓

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\left(\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)\vec{E} = j\omega\tilde{\epsilon}\vec{E}$$

$\tilde{\epsilon}$ 称为复介电常数。 $\tilde{\epsilon} = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$

损耗正切: 复介电常数虚部和实部的比。 $\tan \delta_c = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ 损耗角

$$\vec{J}_c = \sigma\vec{E}$$

$$\vec{J}_d = j\omega\epsilon\vec{E}$$

} 损耗正切代表传导电流密度和位移电流密度的大小之比。

有耗媒质中的本质阻抗为: $\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\epsilon}}} = |\tilde{\eta}|e^{j\theta_\eta}$ ——复本质阻抗



2. 相位常数和衰减系数

有耗媒质中的均匀平面波波动方程为：
$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} = -\omega^2 \mu \tilde{\epsilon} E_x = -\tilde{k}^2 E_x$$

式中 \tilde{k} 称为复波数。
$$\tilde{k} = \omega \sqrt{\mu \tilde{\epsilon}} = \omega \sqrt{\mu \left(\epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right)}$$

令：
$$\gamma = j\tilde{k} = \alpha + j\beta$$
 γ 为传播常数

$$-\omega^2 \mu \epsilon + j\omega \mu \sigma = \alpha^2 - \beta^2 + j2\alpha\beta \longrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2 \mu \epsilon \\ 2\alpha\beta = \omega \mu \sigma \end{cases}$$

得：

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} - 1 \right]} \quad \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} + 1 \right]}$$

电场强度：

$$\vec{E} = E_m e^{-j\tilde{k}z} \hat{a}_x = E_m e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z} \hat{a}_x$$

$\begin{cases} \alpha \text{ 为衰减系数} \\ \beta \text{ 为相位常数} \end{cases}$



3. 相速和色散现象

电场强度：
$$\vec{E} = E_m e^{-j\tilde{k}z} = E_m e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z} \hat{a}_x$$

有耗媒质中，波传播的相速为：

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1}}$$

可以看出：
$$v_p < \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

结论：

- a. 由于媒质的损耗使波的传播速度变慢，波长变短。
- b. 相速与频率有关。

色散现象：

在有耗媒质中，不同频率的波以不同的相速传播的现象。

色散媒质：能发生色散现象的媒质。有耗媒质为色散媒质。

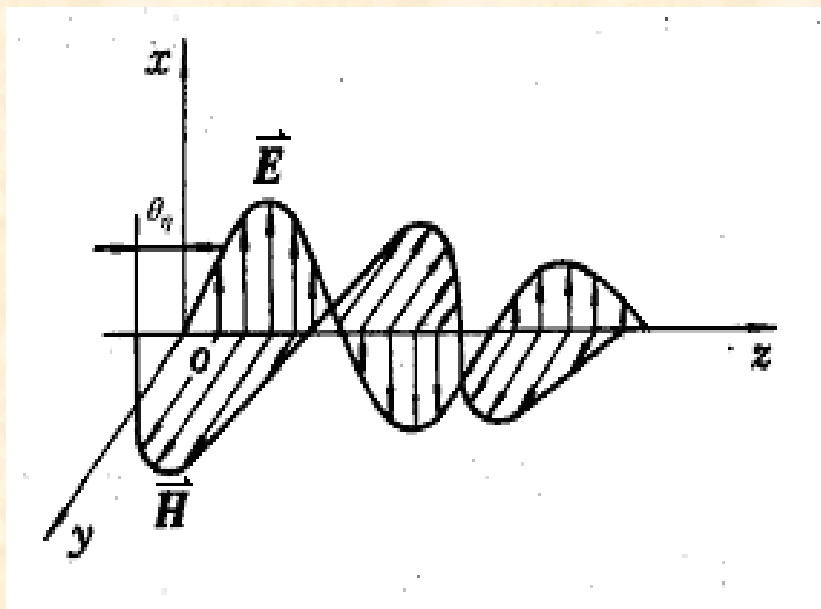


4. 有耗媒质中电磁场的表示

$$\text{电场强度: } \vec{E} = E_m e^{-\gamma z} \hat{a}_x = E_m e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z} \hat{a}_x$$

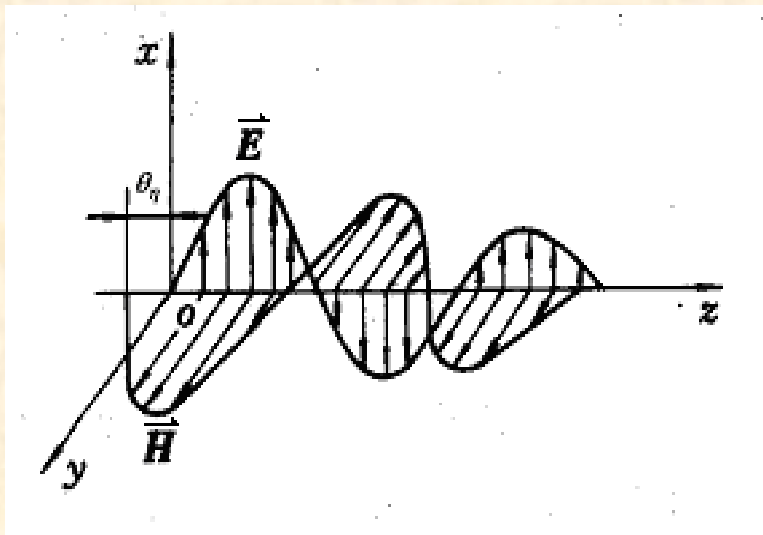
其对应的磁场强度为:

$$\vec{H} = \frac{E_m}{\tilde{\eta}} e^{-\gamma z} \hat{a}_y = \frac{E_m}{|\tilde{\eta}|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\theta_\eta} \hat{a}_y$$



特点:

- (1) 电场强度和磁电场强度的振幅以 $e^{-\alpha z}$ 因子衰减。
- (2) 电场相位超前磁 θ_η 场。



平面波在有耗媒质中的传播

瞬时表达式分别为：

$$\vec{E} = E_m \cdot e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \hat{a}_x$$

$$\vec{H} = \frac{E_m}{|\tilde{\eta}|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \hat{a}_y$$



5. 有耗媒质中的坡印廷矢量

瞬时坡印廷矢量为：

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{E_m^2}{|\tilde{\eta}|} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \hat{a}_z \\ &= \left[\frac{E_m^2}{2|\tilde{\eta}|} e^{-2\alpha z} \cos \theta_\eta + \frac{E_m^2}{2|\tilde{\eta}|} e^{-2\alpha z} \cos(2\omega t - 2\beta z - \theta_\eta) \right] \hat{a}_z\end{aligned}$$

平均坡印廷矢量为：

$$\vec{S}_{av} = \frac{E_m^2}{2|\tilde{\eta}|} e^{-2\alpha z} \cos \theta_\eta \hat{a}_z$$

可见：在有耗媒质中，随着传播距离的增加，平均坡印廷矢量也呈指数规律下降。



6. 有耗媒质的讨论

(1) 低损耗媒质

低损耗媒质又称良介质，条件为： $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1$

$$\text{得：} \quad \alpha \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad \beta \approx \omega \sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\tilde{\eta} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon} \right) \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

在低损耗媒质中的相位常数和相速与无耗介质中的近似相同。但确实存在衰减，而且电场强度和磁场强度存在微小的相位差。



(2) 高损耗媒质

高损耗媒质也称为良导体。 $(\sigma \gg \omega\varepsilon)$ $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \geq 100$

复介电常数为： $\tilde{\varepsilon} \approx -j\frac{\sigma}{\omega}$

衰减系数和相位常数分别为： $\alpha \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$ $\beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$

复本质阻抗为： $\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\varepsilon}}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{-j\sigma/\omega}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} e^{j\frac{\pi}{4}}$

若将复本质阻抗表示为： $\tilde{\eta} = R_s + jX_s$

则： $R_s = X_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$ R_s 称为表面电阻， X_s 为表面电抗

相速为： $v_p = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$



电场强度和磁场强度分别为：

$$\vec{E} = E_m e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \vec{a}_x \quad \vec{H} = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} E_m e^{-\alpha z} e^{-j(\beta z + \frac{\pi}{4})} \vec{a}_y$$

传导电流密度为： $\vec{J}_c = \sigma \vec{E} = \sigma E_m e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \vec{a}_x$

趋肤深度： 电流密度幅值衰减为导体表面上幅值的 e^{-1} 倍，
电磁波所传输的距离 δ ， 即

$$J_{\max} e^{-\alpha\delta} = J_{\max} e^{-1} \longrightarrow \delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

趋肤效应： 高频条件下，良导体中的电流绝大部分集中在导体表面附近，这种现象称为趋肤效应。

电磁屏蔽原理： 根据趋肤效应，利用一定厚度的导体板作成屏蔽罩，将电子设备保护起来。



五、均匀平面波的极化特性

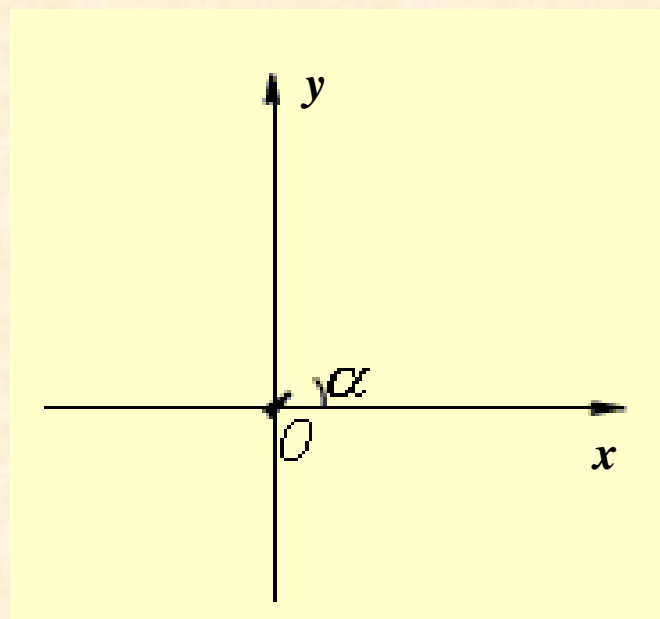
1. 波的极化定义

波的极化是指空间某点的电场强度矢量随时间的变化规律。

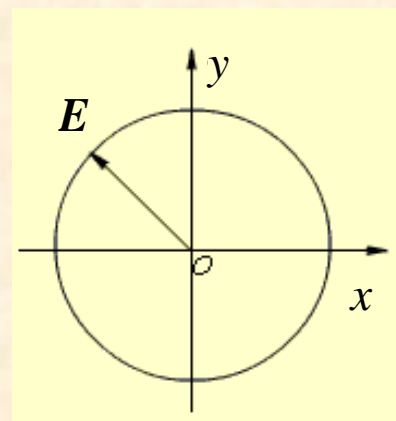
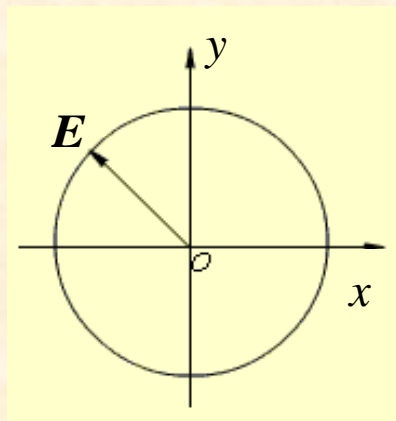
波的极化用电场强度矢量的端点在空间随时间变化所画的轨迹来表示。

2. 极化的形式

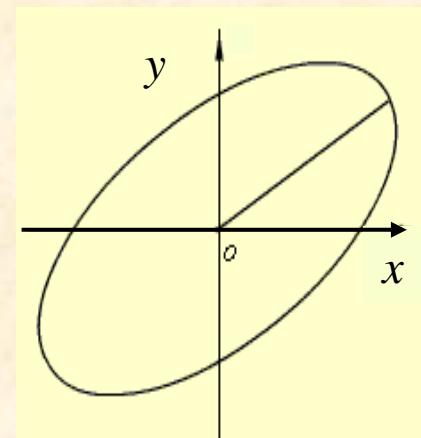
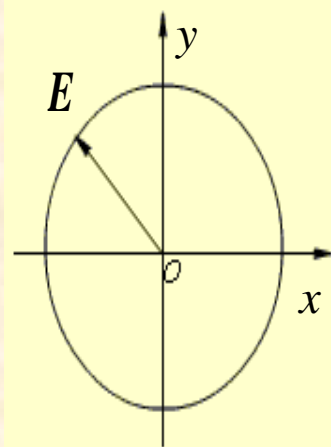
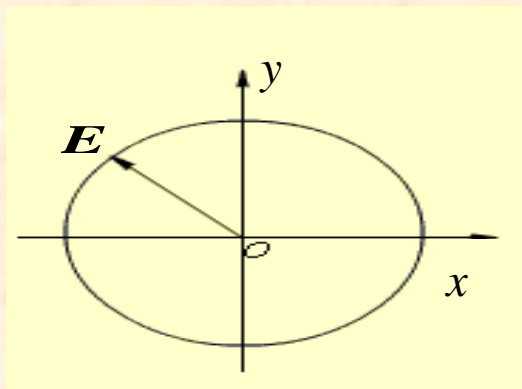
(1) 线极化：电场强度矢量端点随时间变化的轨迹是一条直线。



(2) **圆极化**: 电场强度矢量端点随时间变化的轨迹是圆。



(3) **椭圆极化**: 电场强度矢量端点随时间变化的轨迹是椭圆。





(1) 线极化:

若电场表示为: $\vec{E} = E_{mx} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \hat{a}_x$ ——x方向的线极化波
演示1

$\vec{E} = E_{my} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \hat{a}_y$ ——y方向的线极化波
演示2

假设空间任意一个平面波:

$$\vec{E} = E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y \quad \text{其中: } \begin{cases} E_x = E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y = E_{ym} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \end{cases}$$

条件: $\varphi_x = \varphi_y = \varphi$ $|\vec{E}| = \sqrt{E_{xm}^2 + E_{ym}^2} \cos(\omega t - kz + \varphi)$

\vec{E} 与 x 轴的夹角为 θ : $\theta = \arctan \frac{E_y}{E_x} = \arctan \frac{E_{ym}}{E_{xm}}$

可见: θ 是不随时间变化的。那么合成电场端点的轨迹位于与 x 轴夹角为 θ 的直线上, 构成线极化。演示3



(2) 圆极化：由两个相互垂直的线极化叠加而成。

$$\text{电场表示为: } \vec{E} = E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x = E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y = E_{ym} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \end{array} \right.$$

条件: $E_{xm} = E_{ym} = E_m$ 且: $\varphi_x - \varphi_y = \pm \frac{\pi}{2}$

则: $E_x = E_m \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kz + \varphi_y) = \pm E_m \sin(\omega t - kz + \varphi_x)$$

$$|E| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_m$$

$$\vec{E} \text{ 与 } x \text{ 轴的夹角为 } \theta: \quad \tan \theta = \frac{E_y}{E_x} = \pm \tan(\omega t - kz + \varphi_x)$$

可得: $\theta = \pm(\omega t - kz + \varphi_x)$

右旋圆极化波 [演示1](#)

左旋圆极化波 [演示2](#)

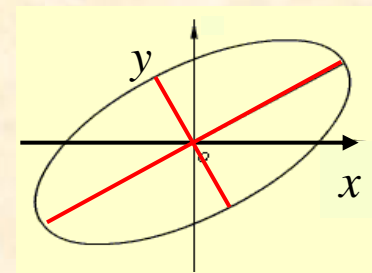
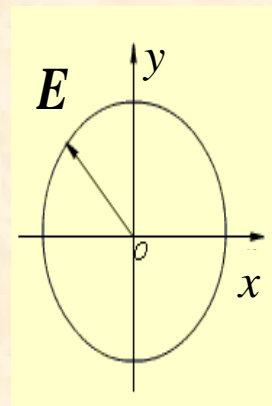
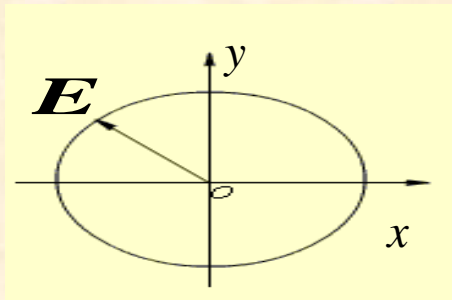
(3) 椭圆极化波

电场表示为： $\vec{E} = E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y$ $\left\{ \begin{array}{l} E_x = E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y = E_{ym} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \end{array} \right.$

对于一般情况：

$$\left(\frac{E_x}{E_{xm}}\right)^2 - \frac{2E_x E_y}{E_{xm} E_{ym}} \cos(\varphi_x - \varphi_y) + \left(\frac{E_y}{E_{ym}}\right)^2 = \sin^2(\varphi_x - \varphi_y)$$

——椭圆方程



右旋椭圆极化波

左旋椭圆极化波

长短轴相等

短轴缩为零

长短轴相等

右旋圆极化波

线极化波

左旋圆极化波



3. 极化的分解

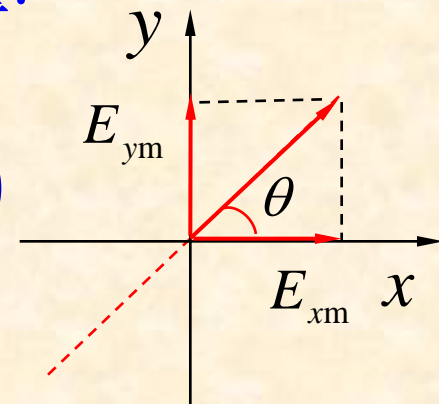
对任一线极化波，将 \vec{E} 分解为 E_x 和 E_y 两个分量：

$$E_x = E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

$$E_y = E_{ym} \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

$$E_{xm} = E_m \cos \theta$$

$$E_{ym} = E_m \sin \theta$$



$$E_x = E_m \cos \theta \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

$$= \frac{E_m}{2} \cos(\omega t - kz + \varphi + \theta) + \frac{E_m}{2} \cos(\omega t - kz + \varphi - \theta) = E_x' + E_x''$$

$$E_y = E_m \sin \theta \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

$$= \frac{E_m}{2} \sin(\omega t - kz + \varphi + \theta) - \frac{E_m}{2} \sin(\omega t - kz + \varphi - \theta) = E_y' + E_y''$$

任一线极化波均可分解为两个幅值相等，但旋转方向相反的圆极化波。



六、均匀平面波对平面边界的垂直入射

1. 概念

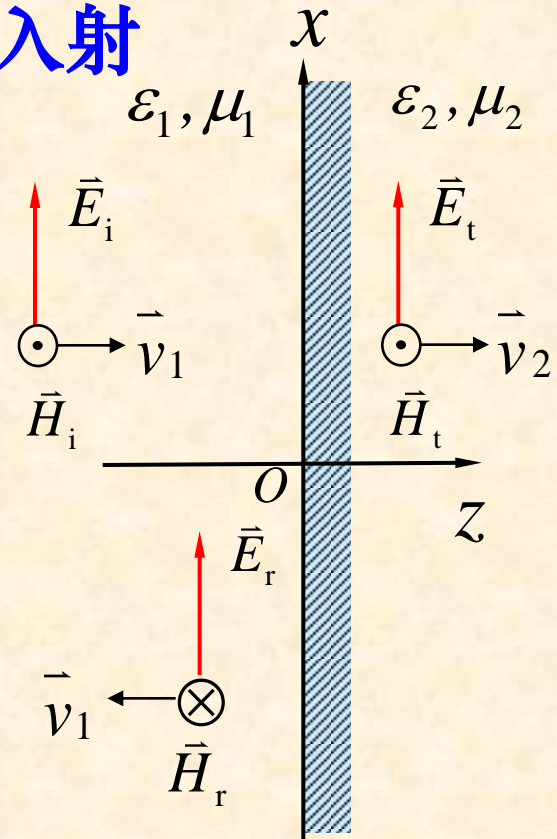
入射波：投射到分界面上的波。

反射波：从分界面返回，与入射波在同一媒质中传播的波。

透射波：进入分界面另一侧传播的波。

垂直入射：入射波的传播方向与分界面的法线平行。

反射波与折射波的特性由分界面两侧媒质的参数确定。



2. 对理想导体表面的垂直入射

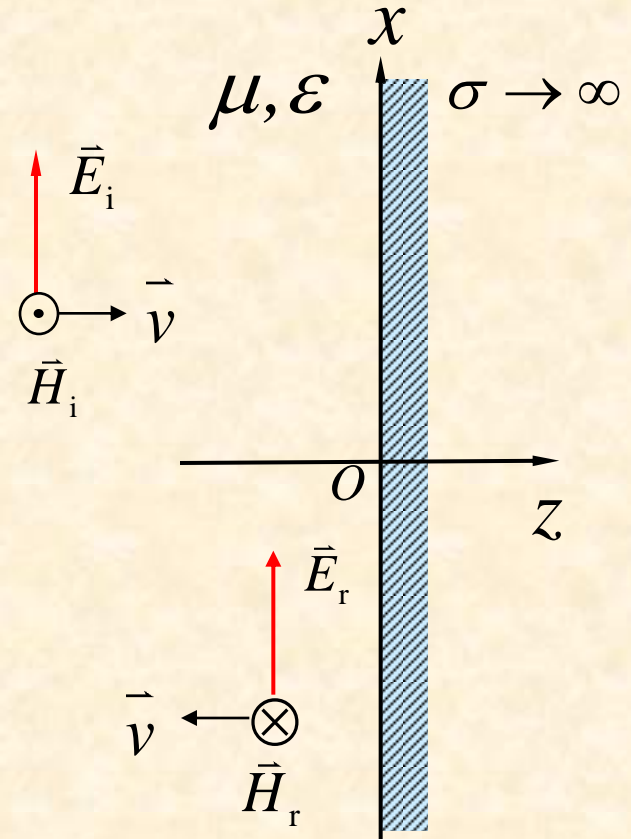
(1) 线极化波的垂直入射

入射波表示为:

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{E}_i &= E_{i0} e^{-jkz} \hat{a}_x \\ \vec{H}_i &= \frac{E_{i0}}{\eta} e^{-jkz} \hat{a}_y \end{aligned} \right.$$

反射波表示为:

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{E}_r &= E_{r0} e^{jkz} \hat{a}_x \\ \vec{H}_r &= -\frac{E_{r0}}{\eta} e^{jkz} \hat{a}_y \end{aligned} \right.$$



在介质空间内任一点的电场: $\vec{E} = (E_{i0} e^{-jkz} + E_{r0} e^{jkz}) \hat{a}_x$

边界条件: 理想导体表面上电场强度切向分量为零。

$$z=0 \text{ 时} \quad E_{i0} + E_{r0} = 0 \quad \longrightarrow \quad E_{r0} = -E_{i0}$$



反射波电场可表示为：
$$\bar{E}_r = -E_{i0} e^{jkz} \hat{a}_x$$

相应的反射波磁场为：
$$\bar{H}_r = -\frac{E_{r0}}{\eta} e^{jkz} \hat{a}_y = \frac{E_{i0}}{\eta} e^{jkz} \hat{a}_y$$

在 $z < 0$ 的空间内，合成电场强度和磁场强度分别为：

$$\bar{E} = E_{i0} (e^{-jkz} - e^{jkz}) \hat{a}_x = -j2E_{i0} \sin kz \hat{a}_x$$

$$\bar{H} = \frac{E_{i0}}{\eta} (e^{-jkz} + e^{jkz}) \hat{a}_y = \frac{2E_{i0}}{\eta} \cos kz \hat{a}_y$$

瞬时形式为：

$$\bar{E} = 2E_{i0} \sin(kz) \sin \omega t \bar{a}_x$$

$$\bar{H} = \frac{2E_{i0}}{\eta} \cos(kz) \cos \omega t \bar{a}_y$$



当 $kz = -n\pi$ 时，即 $z = -\frac{n\lambda}{2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) $\rightarrow \sin kz = 0$

波节点： 在任意时刻，电场强度的值总为零的点。

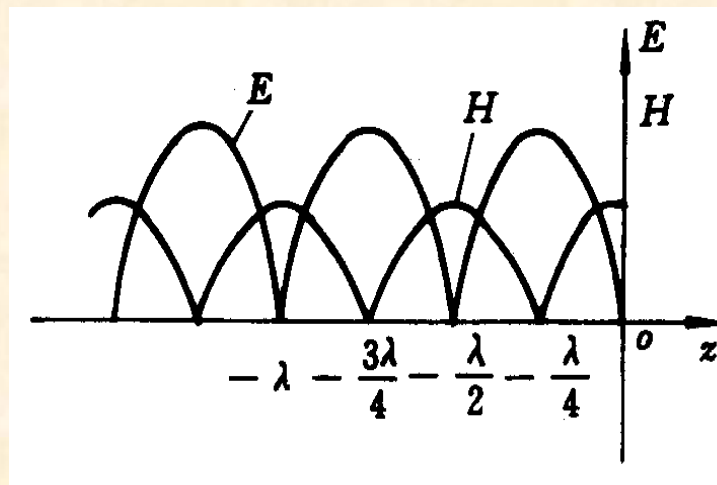
当 $kz = -\frac{\pi}{2}(2n+1)$ 时，即 $z = -\frac{\lambda}{4}(2n+1)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$\rightarrow |\sin kz| = 1$$

波腹点： 任意时刻，电场强度的值为最大的点。

驻波： 这种波节点和波腹点位置固定的波称为驻波。

纯驻波： 节点处值为零的驻波称为纯驻波。 **演示**





平均坡印廷矢量

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\vec{E} \times \vec{H}^* \right]$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -j2E_{i0} \sin kz \hat{a}_x \\ \vec{H} &= \frac{2E_{i0}}{\eta} \cos kz \hat{a}_y \end{aligned}$$

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[-4j \frac{E_{i0}^2}{\eta} \sin kz \cos kz \right] \hat{a}_z = 0$$

在纯驻波情况下，只有电能和磁能的相互交换而无能量传输。

(2) 圆极化波的垂直入射

入射波电场: $\vec{E}_i = E_{i0} e^{-jkz} (\hat{a}_x - j\hat{a}_y)$ 右旋圆极化波

反射波电场: $\vec{E}_r = -E_{i0} e^{jkz} (\hat{a}_x - j\hat{a}_y)$ 左旋圆极化波

合成波电场为: $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = -j2E_{i0} \sin kz (\hat{a}_x - j\hat{a}_y)$ 纯驻波



例 2: 有一频率 $f = 100\text{MHz}$, x 方向极化的均匀平面波, 从空气垂直入射到 $z = 0$ 的理想导体表面上, 设入射波电场强度振幅为 6mV/m , 试写出: (1) 入射波电场强度 \vec{E}_i 和磁场强度 \vec{H}_i 的复数和瞬时表达式; (2) 反射波电场强度 \vec{E}_r 和磁场强度 \vec{H}_r 的复数和瞬时表达式; (3) 空气中的合成场 \vec{E} 和 \vec{H} ; (4) 空气中离界面第一个电场强度波腹点的位置; (5) 理想导体表面的感应电流密度。

解: (1) 入射波电场强度复数形式 $\vec{E}_i = E_{i0} e^{-jkz} \hat{a}_x$

$$E_{i0} = 6 \times 10^{-3} \quad \text{V/m}$$

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{2\pi \times 100 \times 10^6}{3 \times 10^8} = \frac{2}{3} \pi \quad \text{rad/m}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$



复数表达式为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_i = 6 \times 10^{-3} \times e^{-j\frac{2}{3}\pi z} \hat{a}_x \\ \bar{H}_i = \frac{1}{\eta} \hat{a}_z \times \bar{E}_i = \frac{10^{-4}}{2\pi} e^{-j\frac{2}{3}\pi z} \hat{a}_y \end{array} \right.$$

瞬时表达式为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_i(z, t) = \text{Re}[\bar{E}_i e^{j\omega t}] = 6 \times 10^{-3} \cos(2\pi \times 10^8 t - \frac{2}{3} \pi z) \hat{a}_x \\ \bar{H}_i(z, t) = \frac{10^{-4}}{2\pi} \cos(2\pi \times 10^8 t - \frac{2}{3} \pi z) \hat{a}_y \end{array} \right.$$

(2) 反射波电磁场复数形式

$$E_{r0} = -E_{i0} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_r = -6 \times 10^{-3} e^{j\frac{2}{3}\pi z} \hat{a}_x \\ \bar{H}_r = \frac{10^{-4}}{2\pi} e^{j\frac{2}{3}\pi z} \hat{a}_y \end{array} \right.$$

瞬时表达式为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_r(z, t) = -6 \times 10^{-3} \cos(2\pi \times 10^8 t + \frac{2}{3} \pi z) \hat{a}_x \\ \bar{H}_r = \frac{10^{-4}}{2\pi} \cos(2\pi \times 10^8 t + \frac{2}{3} \pi z) \hat{a}_y \end{array} \right.$$



(3) 空气中的合成场复数形式

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = -j12 \times 10^{-3} \sin\left(\frac{2}{3}\pi z\right) \hat{a}_x$$

$$\vec{H} = \vec{H}_i + \vec{H}_r = \frac{10^{-4}}{\pi} \cos\left(\frac{2}{3}\pi z\right) \hat{a}_y$$

瞬时表达式为：

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= \text{Re}(\vec{E} e^{j\omega t}) \\ &= 12 \times 10^{-3} \sin\left(\frac{2}{3}\pi z\right) \sin(2\pi \times 10^8 t) \hat{a}_x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{H}(z, t) &= \text{Re}(\vec{H} e^{j\omega t}) \\ &= \frac{10^{-4}}{\pi} \cos\left(\frac{2}{3}\pi z\right) \cos(2\pi \times 10^8 t) \hat{a}_y\end{aligned}$$



(4) 在空气中离开界面第一个电场强度波腹点位于

$$\sin\left(\frac{2}{3}\pi z\right) = 1 \quad \text{即:} \quad \frac{2}{3}\pi z = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{得: } z = -0.75 \quad \text{m}$$

(5) 在 $z=0$ 的理想导体边界上感应电流密度为

$$\vec{H}(z, t) = \frac{10^{-4}}{\pi} \cos\left(\frac{2}{3}\pi z\right) \cos(2\pi \times 10^8 t) \hat{a}_y$$

$$\begin{aligned} \vec{J}_s &= \vec{n} \times \vec{H} \Big|_{z=0} \\ &= (-\hat{a}_z) \times \frac{10^{-4}}{\pi} \cos(2\pi \times 10^8 t) \hat{a}_y \\ &= \frac{10^{-4}}{\pi} \cos(2\pi \times 10^8 t) \hat{a}_x \quad \text{A/m} \end{aligned}$$



3. 对无限大理想介质分界面的垂直入射

入射波表示为:

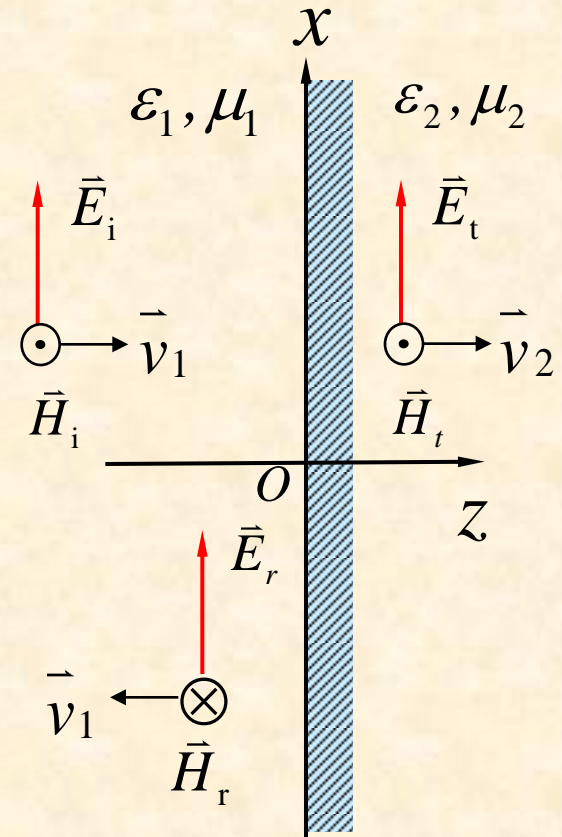
$$\begin{cases} \vec{E}_i = E_{i0} e^{-jk_1 z} \hat{a}_x \\ \vec{H}_i = \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-jk_1 z} \hat{a}_y \end{cases}$$

反射波表示为:

$$\begin{cases} \vec{E}_r = E_{r0} e^{jk_1 z} \hat{a}_x \\ \vec{H}_r = -\frac{E_{r0}}{\eta_1} e^{jk_1 z} \hat{a}_y \end{cases}$$

透射波表示为:

$$\begin{cases} \vec{E}_t = E_{t0} e^{-jk_2 z} \hat{a}_x \\ \vec{H}_t = \frac{E_{t0}}{\eta_2} e^{-jk_2 z} \hat{a}_y \end{cases}$$



根据边界条件: 在 $z=0$ 处有: $E_{1t} = E_{2t}$ $H_{1t} = H_{2t}$



则：

$$\begin{cases} E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \\ \frac{E_{i0} - E_{r0}}{\eta_1} = \frac{E_{t0}}{\eta_2} \end{cases} \xrightarrow{\text{解得：}} \begin{cases} E_{r0} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_{i0} \\ E_{t0} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{i0} \end{cases}$$

令：

$$\Gamma = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

反射系数 Γ ：分界面上反射波电场强度与入射波电场强度之比。

$$T = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

透射系数 T ：分界面上透射波电场强度与入射波电场强度之比。

Γ 与 T 之间的关系为： $T = 1 + \Gamma$

反射波为：

$$\begin{cases} \vec{E}_r = \Gamma E_{i0} e^{jk_1 z} \hat{a}_x \\ \vec{H}_r = -\frac{\Gamma E_{i0}}{\eta_1} e^{jk_1 z} \hat{a}_y \end{cases}$$

透射波为：

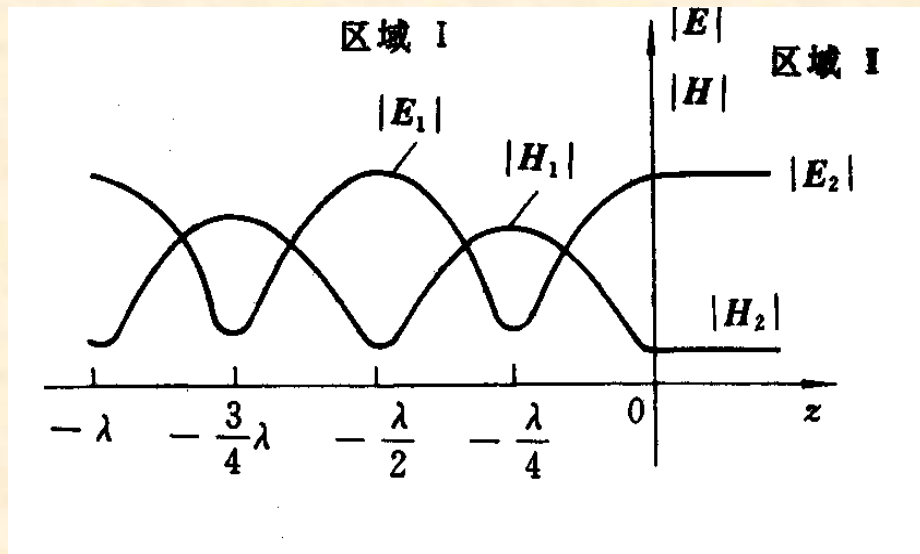
$$\begin{cases} \vec{E}_t = T E_{i0} e^{-jk_2 z} \hat{a}_x \\ \vec{H}_t = \frac{T E_{i0}}{\eta_2} e^{-jk_2 z} \hat{a}_y \end{cases}$$



介质1中的合成电磁场分别为：

$$\vec{E}_1 = E_{i0} (e^{-jk_1z} + \Gamma e^{jk_1z}) \hat{a}_x$$

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{\eta_1} E_{i0} (e^{-jk_1z} - \Gamma e^{jk_1z}) \hat{a}_y$$



总电场：

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= E_{i0} [\cos k_1z - j\sin k_1z + \Gamma \cos k_1z + j\Gamma \sin k_1z] \hat{a}_x \\ &= E_{i0} [(1 + \Gamma) \cos k_1z - j(1 - \Gamma) \sin k_1z] \hat{a}_x \end{aligned}$$

$$|E_1| = |E_{i0}| \left[1 + \Gamma^2 + 2\Gamma \cos 2k_1z \right]^{1/2}$$

行驻波演示

讨论：

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

→ $\eta_2 > \eta_1$

→ $\eta_2 < \eta_1$

在分界面处总电场达到极大值。

在分界面处总电场达到极小值。



入射波能量、反射波能量和透射波能量间的关系

在介质1中，平均坡印廷矢量为：

$$\begin{aligned}\bar{S}_{1av} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{E}_1 \times \bar{H}_1^*] = \frac{|E_{i0}|^2}{2\eta_1} \operatorname{Re} [1 - \Gamma^2 + j2\Gamma |\sin 2k_1 z|] \hat{a}_z \\ &= \frac{|E_{i0}|^2}{2\eta_1} (1 - \Gamma^2) \hat{a}_z\end{aligned}$$

在介质2中，平均坡印廷矢量为： $\bar{S}_{2av} = \bar{S}_{tav} = \frac{|E_{i0}|^2}{2\eta_2} T^2 \hat{a}_z$

无耗介质中无能量的损耗：

$$\bar{S}_{1av} = \bar{S}_{2av} \longrightarrow \frac{|E_{i0}|^2}{2\eta_1} = \frac{|E_{i0}|^2}{2\eta_1} \Gamma^2 + \frac{|E_{i0}|^2}{2\eta_2} T^2$$

说明：入射、反射和透射能量三者之间符合能量守恒规律。



4. 对无限大有耗媒质分界面的垂直入射

入射波表示为：

$$\begin{cases} \vec{E}_i = E_{i0} e^{-\gamma_1 z} \hat{a}_x \\ \vec{H}_i = \frac{E_{i0}}{\tilde{\eta}_1} e^{-\gamma_1 z} \hat{a}_y \end{cases} \quad \text{其中：} \quad \begin{cases} \gamma_1 = \alpha_1 + j\beta_1 \\ \tilde{\eta}_1 = |\tilde{\eta}_1| e^{j\theta_{\eta_1}} \end{cases}$$

反射系数和透射系数均为复数，分别为：

$$\Gamma = \frac{\tilde{\eta}_2 - \tilde{\eta}_1}{\tilde{\eta}_2 + \tilde{\eta}_1} = |\Gamma| e^{j\theta_\Gamma} \quad T = \frac{2\tilde{\eta}_2}{\tilde{\eta}_2 + \tilde{\eta}_1} = |T| e^{j\theta_T}$$

反射波为：

$$\begin{cases} \vec{E}_r = \Gamma E_{i0} e^{\gamma_1 z} \hat{a}_x \\ \vec{H}_r = -\frac{\Gamma E_{i0}}{\tilde{\eta}_1} e^{\gamma_1 z} \hat{a}_y \end{cases}$$

透射波为：

$$\begin{cases} \vec{E}_t = TE_{i0} e^{-\gamma_2 z} \hat{a}_x \\ \vec{H}_t = \frac{TE_{i0}}{\tilde{\eta}_2} e^{-\gamma_2 z} \hat{a}_y \end{cases}$$

其中：

$$\gamma_2 = \alpha_2 + j\beta_2 \quad \tilde{\eta}_2 = |\tilde{\eta}_2| e^{j\theta_{\eta_2}}$$



媒质1中的平均坡印廷矢量为：

$$\begin{aligned}\bar{S}_{1av} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{E}_1 \times \bar{H}_1^*] \\ &= \frac{E_{i0}^2}{2|\tilde{\eta}_1|} [e^{-2\alpha_1 z} \cos \theta_{\eta_1} - |\Gamma|^2 e^{2\alpha_1 z} \cos \theta_{\eta_1} - 2|\Gamma| \sin(2\beta_1 z + \theta_\Gamma) \sin \theta_{\eta_1}] \hat{a}_z\end{aligned}$$

其中入射波的平均功率密度为：

$$\begin{aligned}\bar{S}_{iav} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{E}_i \times \bar{H}_i^*] \\ &= \frac{E_{i0}^2}{2|\tilde{\eta}_1|} e^{-2\alpha_1 z} \cos \theta_{\eta_1} \hat{a}_z\end{aligned}$$

反射波的平均功率密度为：

$$\begin{aligned}\bar{S}_{rav} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{E}_r \times \bar{H}_r^*] \\ &= -\frac{E_{i0}^2}{2|\tilde{\eta}_1|} |\Gamma|^2 e^{2\alpha_1 z} \cos \theta_{\eta_1} \hat{a}_z\end{aligned}$$

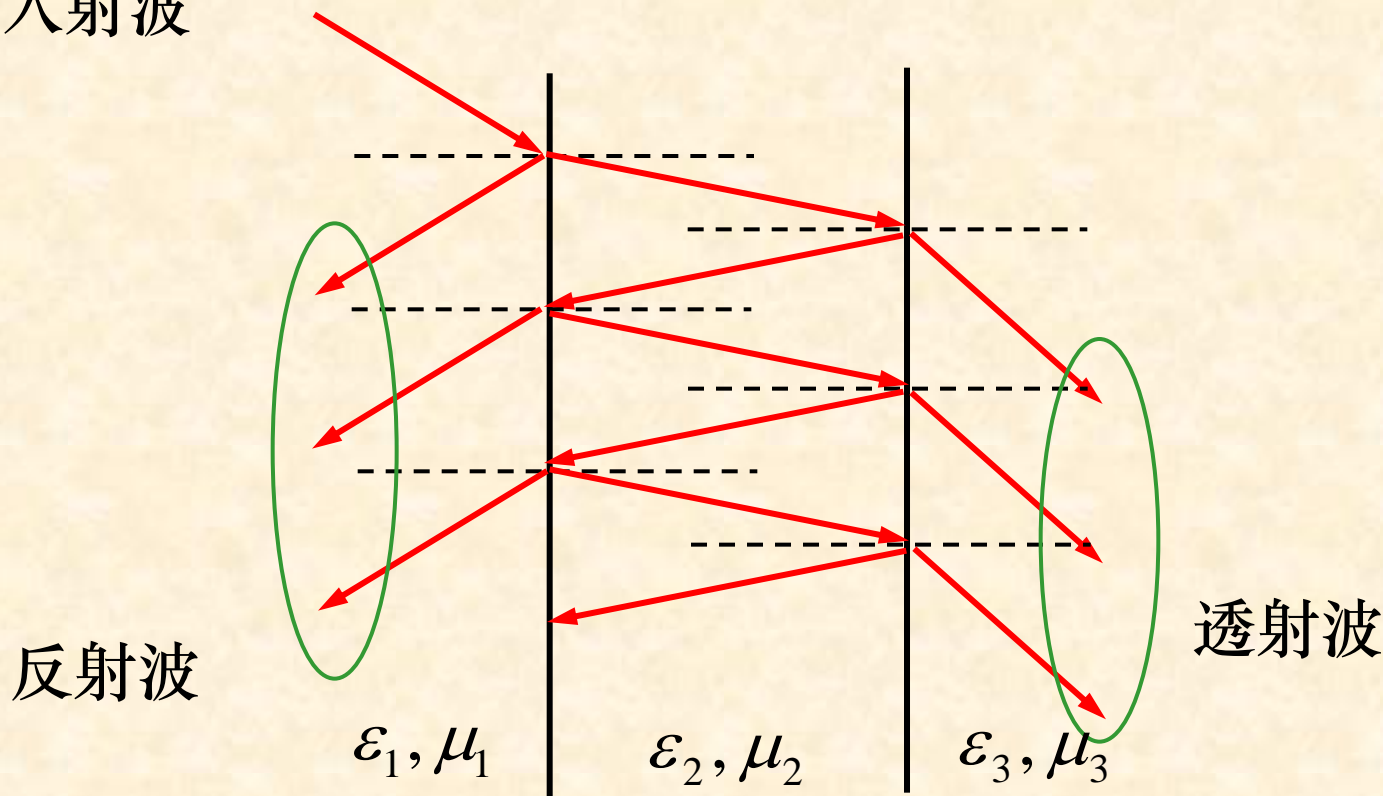
入射波和反射波交叉耦合引起的平均功率密度为：

$$\bar{S}_{irav} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{E}_i \times \bar{H}_r^* + \bar{E}_r \times \bar{H}_i^*] = -\frac{E_{i0}^2}{|\tilde{\eta}_1|} |\Gamma| \sin(2\beta_1 z + \theta_\Gamma) \sin \theta_{\eta_1} \hat{a}_z$$

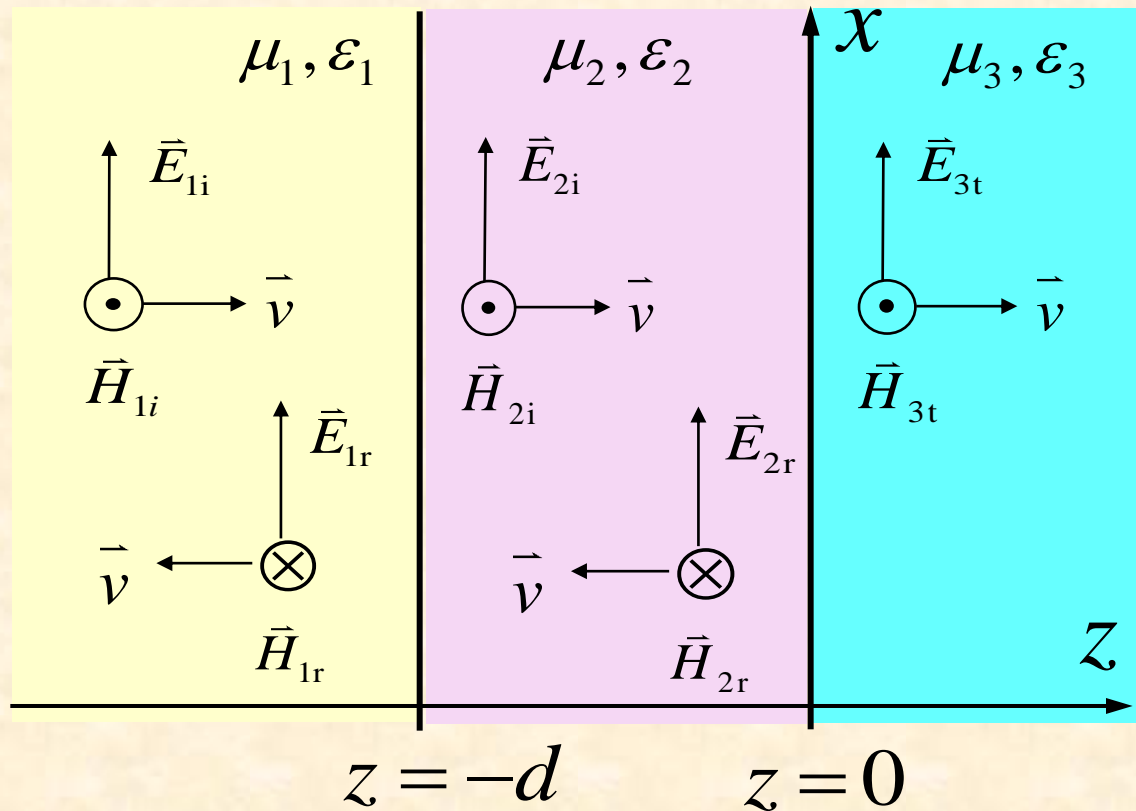
七、多层介质分界面上的垂直入射

在工程实际中，多层介质的应用很广：**如雷达罩、频率选择表面、吸波涂层等。**

入射波



1. 边界条件法



介质1中的总电磁场为：

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{E}_1 &= (E_{1i} e^{-jk_1(z+d)} + E_{1r} e^{jk_1(z+d)}) \hat{a}_x \\ \vec{H}_1 &= \frac{1}{\eta_1} (E_{1i} e^{-jk_1(z+d)} - E_{1r} e^{jk_1(z+d)}) \hat{a}_y \end{aligned} \right.$$



在介质2中总电磁场为：

$$\begin{cases} \vec{E}_2 = (E_{2i}e^{-jk_2z} + E_{2r}e^{jk_2z})\hat{a}_x \\ \vec{H}_2 = \frac{1}{\eta_2}(E_{2i}e^{-jk_2z} - E_{2r}e^{jk_2z})\hat{a}_y \end{cases}$$

在介质3中电磁场为：

$$\begin{cases} \vec{E}_3 = E_{3t}e^{-jk_3z}\hat{a}_x \\ \vec{H}_3 = \frac{E_{3t}}{\eta_3}e^{-jk_3z}\hat{a}_y \end{cases}$$

利用界面 I 和 II 处的边界条件：

在 $z=0$ 处：

$$\begin{cases} \vec{E}_2(0) = \vec{E}_3(0) \\ \vec{H}_2(0) = \vec{H}_3(0) \end{cases}$$

在 $z=-d$ 处：

$$\begin{cases} \vec{E}_1(-d) = \vec{E}_2(-d) \\ \vec{H}_1(-d) = \vec{H}_2(-d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{2i} + E_{2r} = E_{3t} \\ \frac{E_{2i}}{\eta_2} - \frac{E_{2r}}{\eta_2} = \frac{E_{3t}}{\eta_3} \\ E_{1i} + E_{1r} = E_{2i}e^{jk_2d} + E_{2r}e^{-jk_2d} \\ \frac{1}{\eta_1}(E_{1i} - E_{1r}) = \frac{1}{\eta_2}(E_{2i}e^{jk_2d} - E_{2r}e^{-jk_2d}) \end{cases}$$

可以得到 E_{1r} 、 E_{2i} 、 E_{2r} 及 E_{3t} 和入射波电场 E_{1i} 的关系。



2. 等效阻抗法

(1) 均匀无界媒质情况

波阻抗定义：相对于传播方向成右手螺旋法则的电场强度与磁场强度正交分量之比。

$$Z(z) = \frac{E_x(z)}{H_y(z)} = -\frac{E_y(z)}{H_x(z)} = \eta$$

可见：在均匀无界媒质中，波阻抗等于媒质的本质阻抗。

(2) 两层介质情况

等效波阻抗定义：在与分界面平行的任何面上，总电场强度与总磁场强度的正交切向分量之比。



介质1中的合成电磁场分别为：

$$\vec{E}_1 = E_{i0} (e^{-jk_1 z} + \Gamma e^{jk_1 z}) \hat{a}_x$$

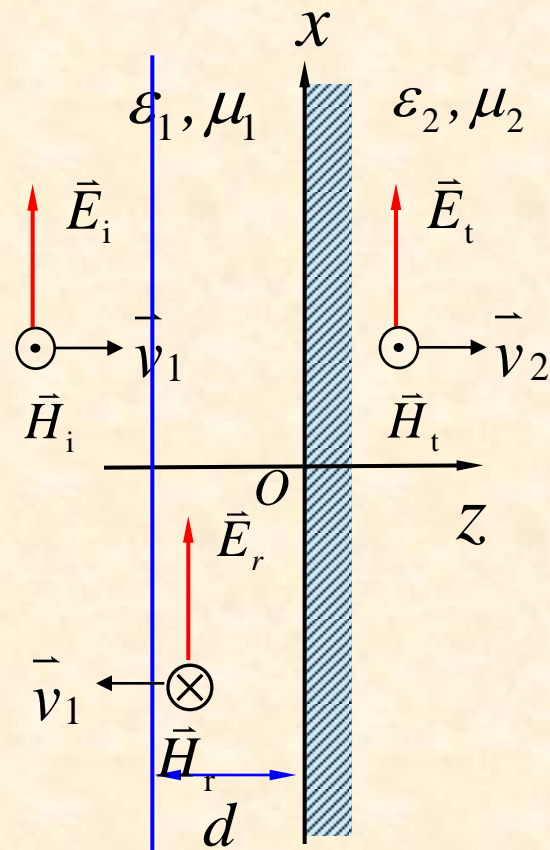
$$\vec{H}_1 = \frac{1}{\eta_1} E_{i0} (e^{-jk_1 z} - \Gamma e^{jk_1 z}) \hat{a}_y$$

媒质1中任意一点的等效波阻抗为：

$$Z_1(z) = \frac{E_{1x}(z)}{H_{1y}(z)} = \eta_1 \frac{e^{-jk_1 z} + \Gamma e^{jk_1 z}}{e^{-jk_1 z} - \Gamma e^{jk_1 z}}$$

其中：
$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

在 $z = -d$ 处，等效波阻抗为：
$$Z_1(-d) = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan k_1 d}{\eta_1 + j\eta_2 \tan k_1 d}$$





(3) 三层介质情况

在 $z = -d$ 分界面处，

等效波阻抗为：

$$Z_2(-d) = \eta_2 \frac{\eta_3 + j\eta_2 \tan k_2 d}{\eta_2 + j\eta_3 \tan k_2 d}$$

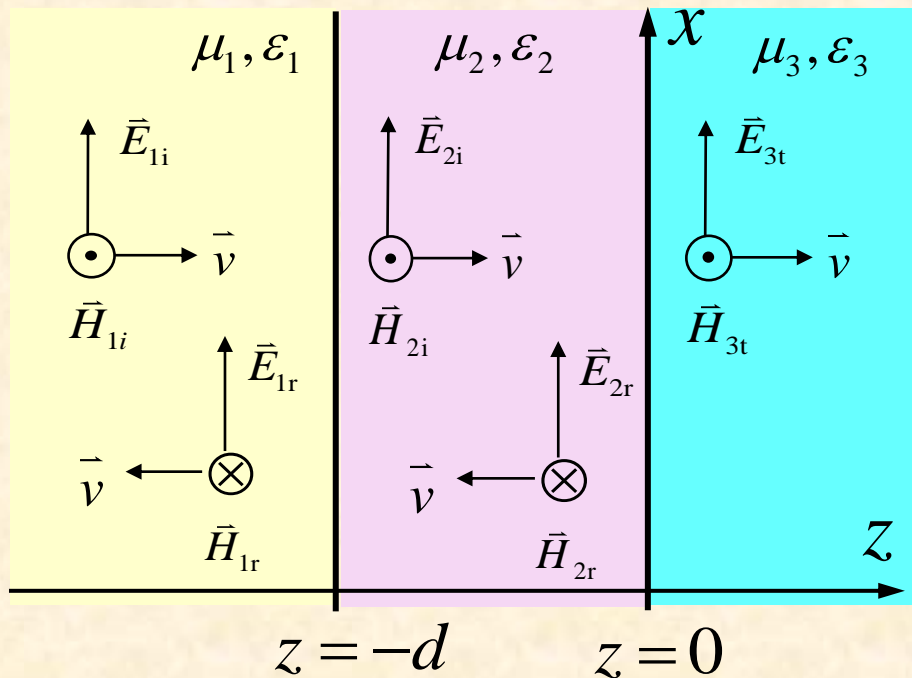
在媒质1与媒质2的分界面处，

反射系数可表示为：

$$\Gamma_1 = \frac{Z_2(-d) - \eta_1}{Z_2(-d) + \eta_1}$$

可见：

一定厚度的介质插入另两种介质中间，可起到阻抗变换作用。





例 3: 有一厚度为 d , 本质阻抗为 η_2 的介质置于本质阻抗分别为 η_1 和 η_3 的媒质之间, 欲使均匀平面波从媒质 1 垂直入射于媒质 2 的分界面上时不发生反射。求 d 和 η_2 的

解: 已知在媒质 1 与媒质 2 的分界面处, 反射系数可表示为

$$\Gamma_1 = \frac{Z_2(-d) - \eta_1}{Z_2(-d) + \eta_1}$$

根据题意, 要求 $\Gamma_1 = 0$ 则 $Z_2(-d) = \eta_1$, 即

$$\eta_2 \frac{\eta_3 \cos k_2 d + j \eta_2 \sin k_2 d}{\eta_2 \cos k_2 d + j \eta_3 \sin k_2 d} = \eta_1$$

上式展开:

$$\eta_2 \eta_3 \cos k_2 d + j \eta_2^2 \sin k_2 d = \eta_1 \eta_2 \cos k_2 d + j \eta_1 \eta_3 \sin k_2 d$$



$$\text{得: } \eta_2 \eta_3 \cos k_2 d = \eta_1 \eta_2 \cos k_2 d \quad \eta_2^2 \sin k_2 d = \eta_1 \eta_3 \sin k_2 d$$

$$(1) \text{ 当 } \eta_1 = \eta_3 \text{ 时, 要求: } \sin k_2 d = 0 \longrightarrow k_2 d = n\pi$$

$$\text{得: } d = \frac{n\pi}{k_2} = n \frac{\lambda_2}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

对给定的工作频率，当介质层厚度为介质的半波长的整数倍时，无反射发生，因此这种介质层称为**半波介质窗**。

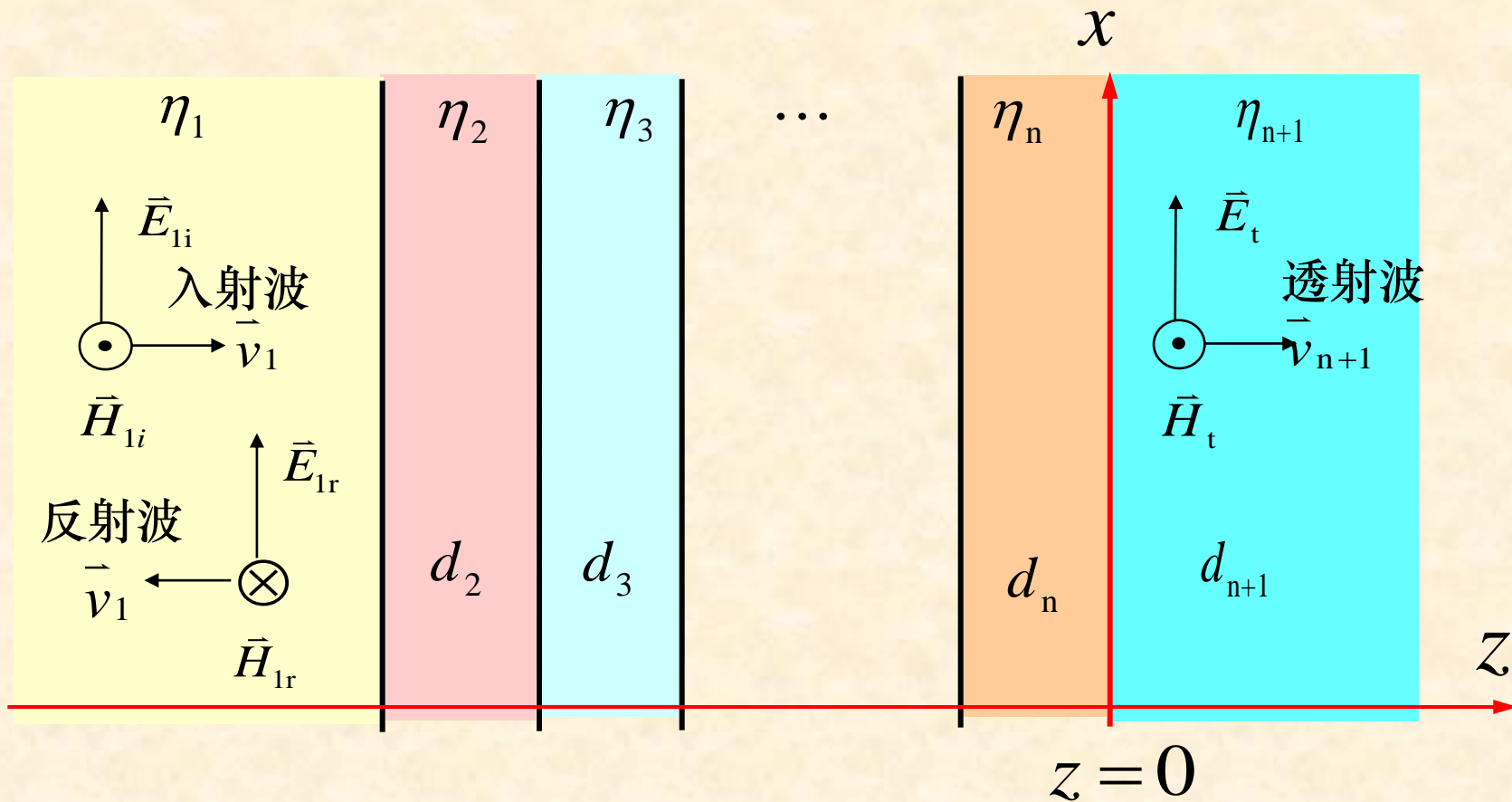
$$(2) \text{ 当 } \eta_1 \neq \eta_3 \text{ 时, 要求: } \cos k_2 d = 0 \text{ 且 } \eta_2 = \sqrt{\eta_1 \eta_3}$$

$$\text{得: } k_2 d = \frac{(2n+1)}{2} \pi \longrightarrow d = (2n+1) \frac{\lambda^2}{4}$$

——四分之一波长阻抗变换器



(4) $n+1$ 层介质情况





在第 n 层介质中, $z = -d_n$ 处, 等效波阻抗为:

$$Z_n(-d_n) = \eta_n \frac{\eta_{n+1} + j\eta_n \tan k_n d_n}{\eta_n + j\eta_{n+1} \tan k_n d_n}$$

在第 $n+1$ 层介质中, $z = -d_{n-1}$ 处, 等效波阻抗为:

$$Z_{n-1}(-d_{n-1}) = \eta_{n-1} \frac{Z_n(-d_n) + j\eta_{n-1} \tan k_{n-1} d_{n-1}}{\eta_{n-1} + jZ_n(-d_n) \tan k_{n-1} d_{n-1}}$$

$$\vdots$$

在第 2 层介质中, $z = -d_2$ 处, 等效波阻抗为:

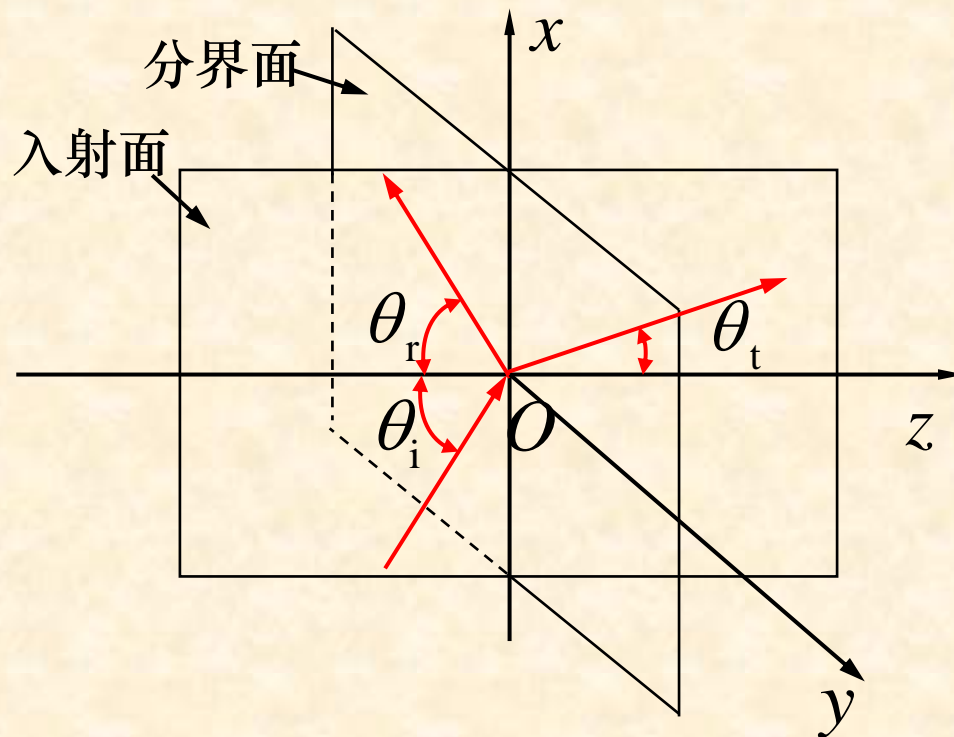
$$Z_2(-d_2) = \eta_2 \frac{Z_3(-d_3) + j\eta_2 \tan k_2 d_2}{\eta_2 + jZ_3(-d_3) \tan k_2 d_2}$$

在介质 1 与介质 2 分界面处, 反射系数为: $\Gamma_1 = \frac{Z_2(-d_2) - \eta_1}{Z_2(-d_2) + \eta_1}$



八、均匀平面波对平面边界的斜入射

1. 概念

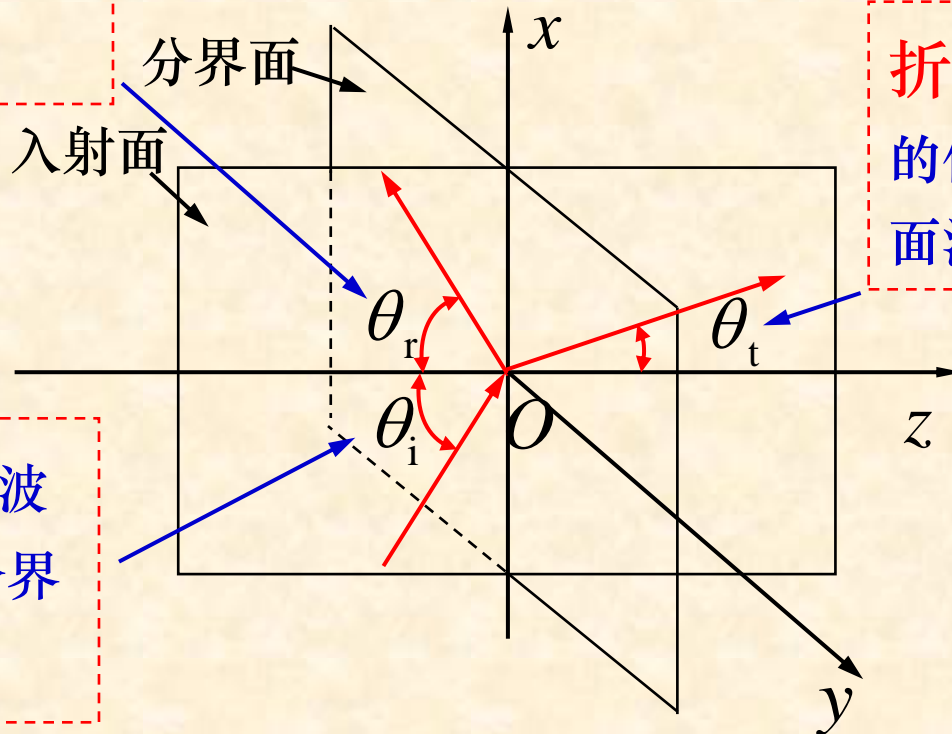


斜入射：电磁波的入射方向与分界面的法线有一定夹角的入射方式。

入射面：均匀平面波的传播方向与分界面法线所构成的平面。



反射角： 反射波的传播方向与分界面法线的夹角。



折射角： 透射波的传播方向与分界面法线的夹角。

入射角： 入射波的传播方向与分界面法线的夹角。

垂直极化波： 电场强度垂直于入射面的波。

平行极化波： 电场强度平行于入射面的波。



2. 垂直极化波的斜入射

(1) 入射波

电场强度表示为：

$$\vec{E}_i = E_{i0} e^{-jk_1 l_i} \hat{a}_y$$

其中：

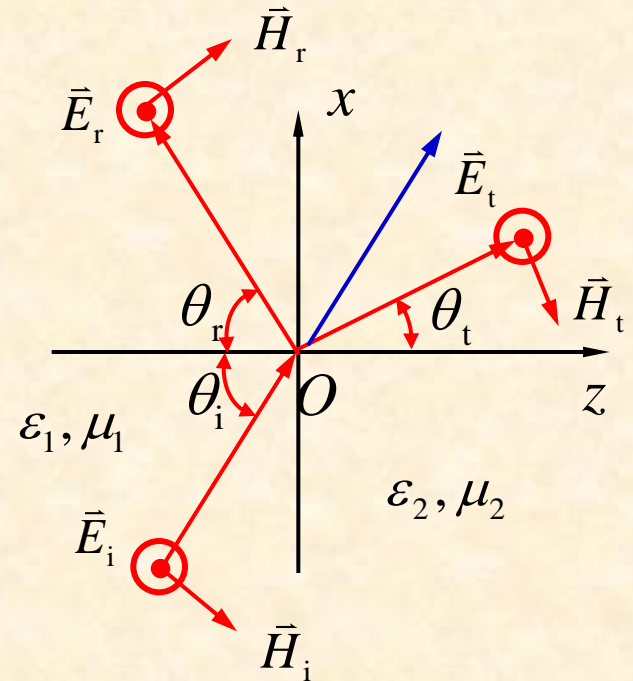
$$\begin{aligned} l_i &= \vec{l} \cdot \hat{a}_i \\ &= (x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z) \cdot (\cos \alpha_i \hat{a}_x + \cos \beta_i \hat{a}_y + \cos \gamma_i \hat{a}_z) \\ &= x \cos \alpha_i + y \cos \beta_i + z \cos \gamma_i \end{aligned}$$

得：

$$l_i = x \sin \theta_i + z \cos \theta_i$$

于是：

$$\vec{E}_i = E_{i0} e^{-jk_1 (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \hat{a}_y$$

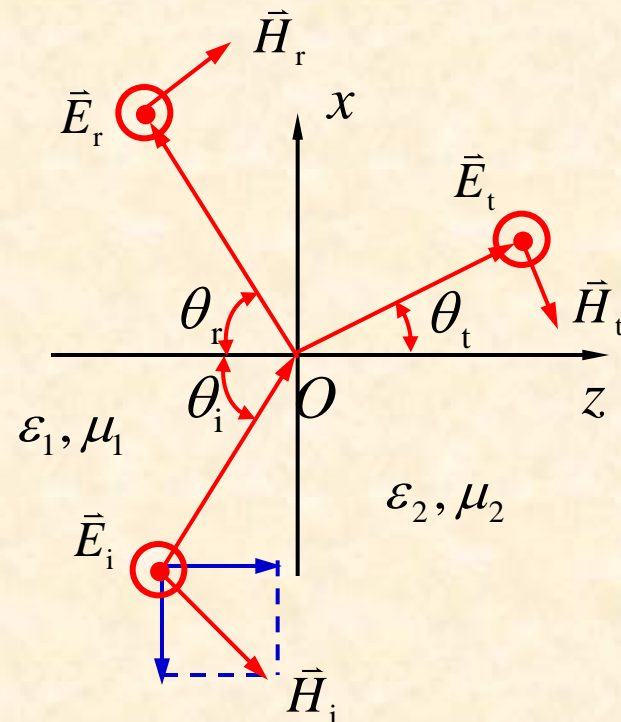


$$\begin{cases} \alpha_i = \pi/2 - \theta_i \\ \beta_i = \pi/2 \\ \gamma_i = \theta_i \end{cases}$$



磁场强度为

$$\vec{H}_i = \frac{E_{i0}}{\eta_1} (-\cos \theta_i \hat{a}_x + \sin \theta_i \hat{a}_z) \cdot e^{-jk_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)}$$



(2) 反射波

电场强度为： $\vec{E}_r = E_{r0} e^{-jk_1 l_r} \hat{a}_y$

$$\begin{aligned} l_r &= \vec{l} \cdot \hat{a}_r \\ &= x \cos \alpha_r + y \cos \beta_r + z \cos \gamma_r \\ &= x \sin \theta_r - z \cos \theta_r \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_r = \pi/2 - \theta_r \\ \beta_r = \pi/2 \\ \gamma_r = \pi - \theta_r \end{array} \right.$$

反射波电场强度为： $\vec{E}_r = E_{r0} e^{-jk_1(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)} \hat{a}_y$



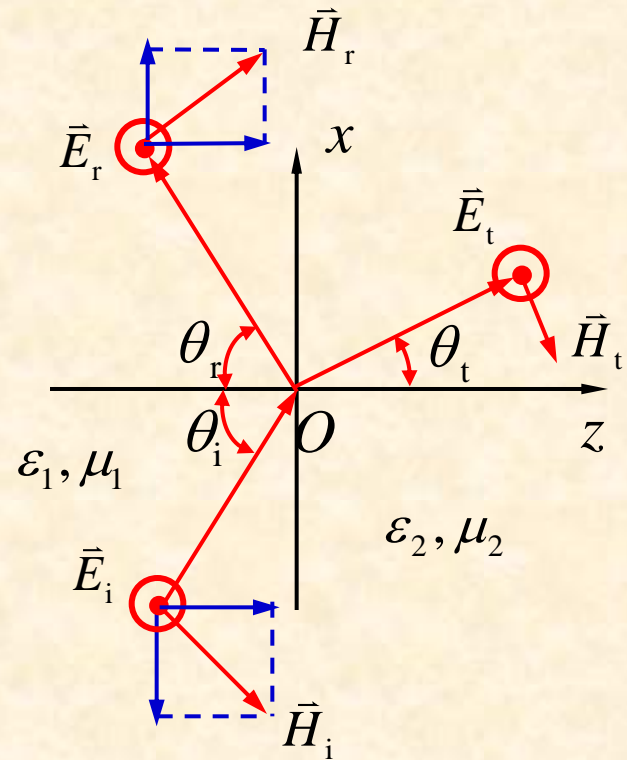
反射波磁场强度为：

$$\vec{H}_r = \frac{E_{r0}}{\eta_1} (\cos \theta_r \hat{a}_x + \sin \theta_r \hat{a}_z) \cdot e^{-jk_1(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)}$$

(3) 折射波

电场强度为： $\vec{E}_t = E_{t0} e^{-jk_2 l_t} \hat{a}_y$

$$\begin{aligned} l_t &= \vec{l} \cdot \hat{a}_t \\ &= x \cos \alpha_t + y \cos \beta_t + z \cos \gamma_t \\ &= x \sin \theta_t + z \cos \theta_t \end{aligned}$$



$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_t &= \pi/2 - \theta_t \\ \beta_t &= \pi/2 \\ \gamma_t &= \theta_t \end{aligned} \right.$$

折射波电场强度为： $\vec{E}_t = E_{t0} e^{-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} \hat{a}_y$



折射波磁场强度为：

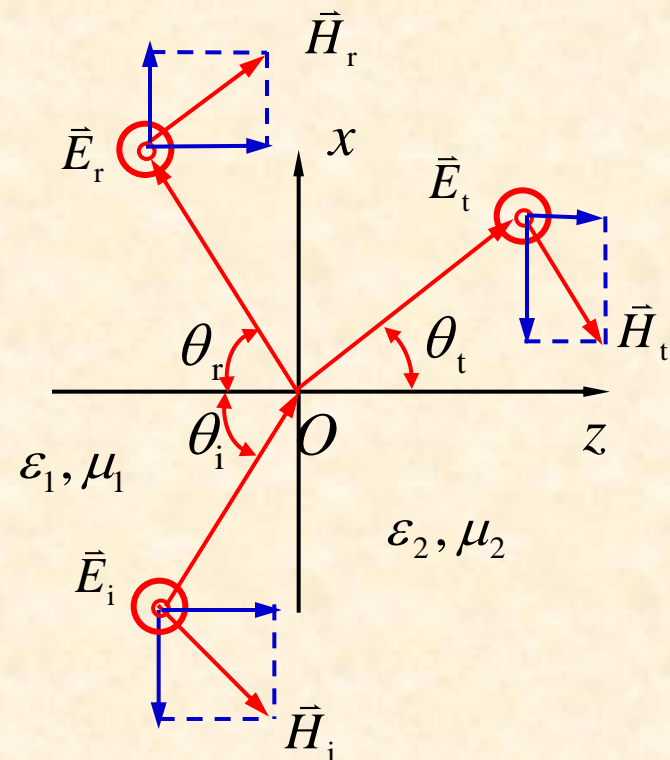
$$\vec{H}_t = \frac{E_{t0}}{\eta_2} (-\cos \theta_t \hat{a}_x + \sin \theta_t \hat{a}_z) \cdot e^{-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)}$$

介质1内总的电场强度为：

$$\vec{E}_1 = [E_{i0} e^{-jk_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} + E_{r0} e^{-jk_1(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)}] \hat{a}_y$$

介质2内总的电场强度为：

$$\vec{E}_2 = E_{t0} e^{-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} \hat{a}_y$$





(4) 反射定律

在 $z=0$ 的分界面上，边界条件为： $E_{1t} = E_{2t}$

$$E_{i0} e^{-jk_1 x \sin \theta_i} + E_{r0} e^{-jk_1 x \sin \theta_r} = E_{t0} e^{-jk_2 x \sin \theta_t}$$

对任意 x 值成立，当 $x=0$ 时：

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0}$$

$$E_{i0} (e^{-jk_1 x \sin \theta_i} - e^{-jk_2 x \sin \theta_t}) + E_{r0} (e^{-jk_1 x \sin \theta_r} - e^{-jk_2 x \sin \theta_t}) = 0$$

由于 $E_{i0} \neq E_{r0}$ 欲使上式对任意 x 都成立，则有

$$k_1 x \sin \theta_i = k_2 x \sin \theta_t = k_1 x \sin \theta_r$$

$$\theta_r = \theta_i$$

斯涅耳反射定律：入射角等于反射角。



(5) 折射定律

由: $k_1 x \sin \theta_i = k_2 x \sin \theta_t$

得:
$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}}$$

该式称为斯涅耳折射定律。

v_1 、 v_2 分别为均匀平面波在介质1和介质2中的波速。

对非铁磁性材料有: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$

所以:
$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}$$



(6) 反射系数和折射系数

根据边界条件，在 $z=0$ 分界面处，磁场强度切向分量连续，即：

$$H_{1t} = H_{2t}$$

$$(E_{i0} - E_{r0}) \frac{\cos \theta_i}{\eta_1} e^{-jk_1 x \sin \theta_i} = E_{t0} \frac{\cos \theta_t}{\eta_2} e^{-jk_2 x \sin \theta_t}$$

$$k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t$$

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \longrightarrow (E_{i0} - E_{r0}) \frac{\cos \theta_i}{\eta_1} = E_{t0} \frac{\cos \theta_t}{\eta_2}$$

得：

$$E_{r0} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} E_{i0} \quad E_{t0} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} E_{i0}$$



反射系数:
$$\Gamma_{\perp} = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$$

折射系数:
$$T_{\perp} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$$

上两式也称为**垂直极化波的费涅耳公式**

若利用等效阻抗法推导反射系数和折射系数

介质1的等效波阻抗为:
$$Z_1 = -\frac{E_{iy}}{H_{ix}} = \frac{\eta_1}{\cos \theta_i}$$

介质2的等效波阻抗为:
$$Z_2 = -\frac{E_{ty}}{H_{tx}} = \frac{\eta_2}{\cos \theta_t}$$

则:
$$\Gamma_{\perp} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad T_{\perp} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$$



例4:一角频率为 ω 的均匀平面波由空气向理想导体平面斜入射，入射角为 θ ，入射电场强度振幅为 10V/m ，电场矢量和入射面垂直，求：(1)空气中总的电场强度和磁场强度；(2)边界面上的感应电流密度；(3)波在空气中的平均坡印廷矢量。

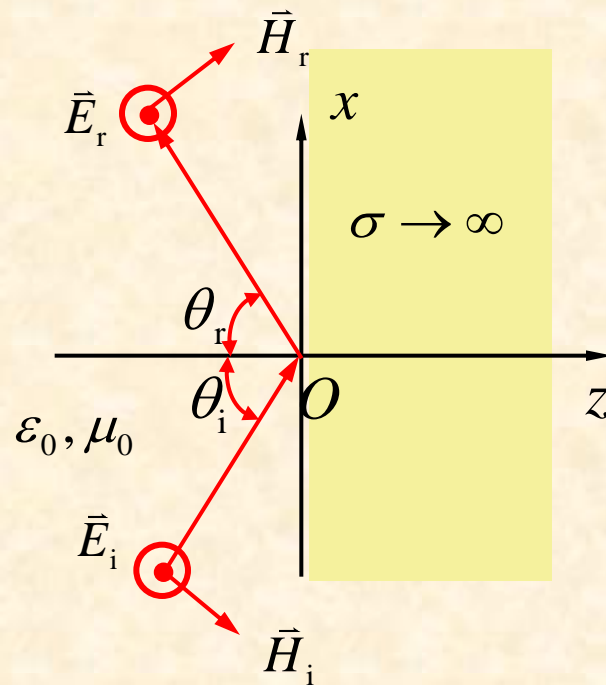
解: 选择如图坐标系

由反射定律可知： $\theta_r = \theta_i = \theta$

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$$

已知： $\eta_1 = \eta_0 = 120\pi, \eta_2 = 0$

$$\Gamma_{\perp} = -1$$





入射波电磁场分别为：

$$\vec{E}_i = 10e^{-jk(x\sin\theta+z\cos\theta)}\hat{a}_y$$

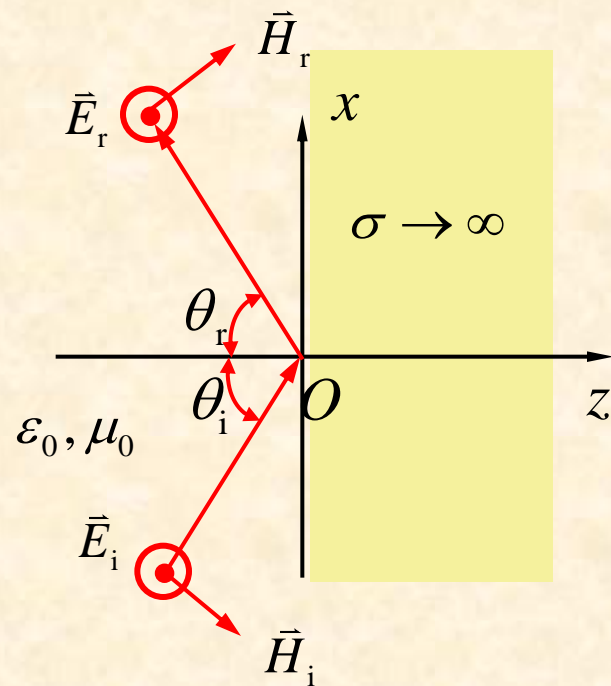
$$\vec{H}_i = \frac{1}{12\pi}(-\cos\theta\hat{a}_x + \sin\theta\hat{a}_z) \cdot e^{-jk(x\sin\theta+z\cos\theta)}$$

反射波电磁场分别为：

$$\vec{E}_r = -10e^{-jk(x\sin\theta-z\cos\theta)}\hat{a}_y$$

$$\vec{H}_r = -\frac{1}{12\pi}(\cos\theta\hat{a}_x + \sin\theta\hat{a}_z)e^{-jk(x\sin\theta-z\cos\theta)}$$

其中： $k = \frac{\omega}{c}$





(1) 空气中总电场强度和磁场强度分别为：

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_i + \vec{E}_r = 10e^{-jkx\sin\theta} (e^{-jkz\cos\theta} - e^{jkz\cos\theta}) \hat{a}_y \\ &= -j20\sin(kz\cos\theta)e^{-jkx\sin\theta} \hat{a}_y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{H}_1 &= \vec{H}_i + \vec{H}_r = -\frac{1}{6\pi} \cos\theta \cos(kz\cos\theta) e^{-jkx\sin\theta} \hat{a}_x - \\ &\quad j\frac{1}{6\pi} \sin\theta \sin(kz\cos\theta) e^{-jkx\sin\theta} \hat{a}_z\end{aligned}$$

请问：总场沿什么方向传播？

x 方向传播

相位常数是多少？

$$\beta = k \sin\theta$$

相速是多大？

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{k \sin\theta} = \frac{c}{\sin\theta} \geq c$$



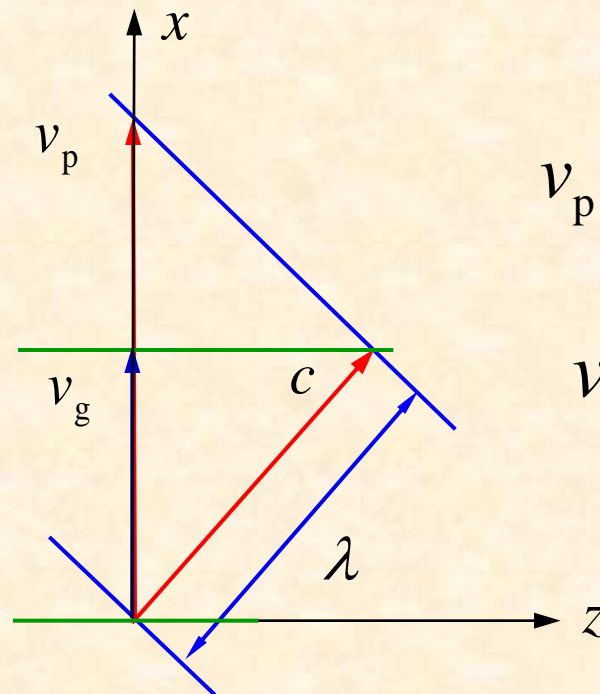
(2) 在 $z=0$ 的理想导体边界上，感应电流密度为：

$$\vec{J}_s = \vec{n} \times \vec{H}_1 = -\hat{a}_z \times \vec{H}_1 = \frac{1}{6\pi} \cos \theta e^{-jkx \sin \theta} \hat{a}_y$$

(3) 波在空气中的平均坡印廷矢量：

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}_1 \times \vec{H}_1^*) = \frac{5}{3\pi} \sin \theta \sin^2(kz \cos \theta) \hat{a}_x$$

相速为什么大于光速？



$$v_p \geq c \geq v_g$$

$$v_p v_g = c^2$$



3. 平行极化的斜入射

入射波磁场强度为：

$$\vec{H}_i = \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-jk_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \hat{a}_y$$

入射波电场强度为：

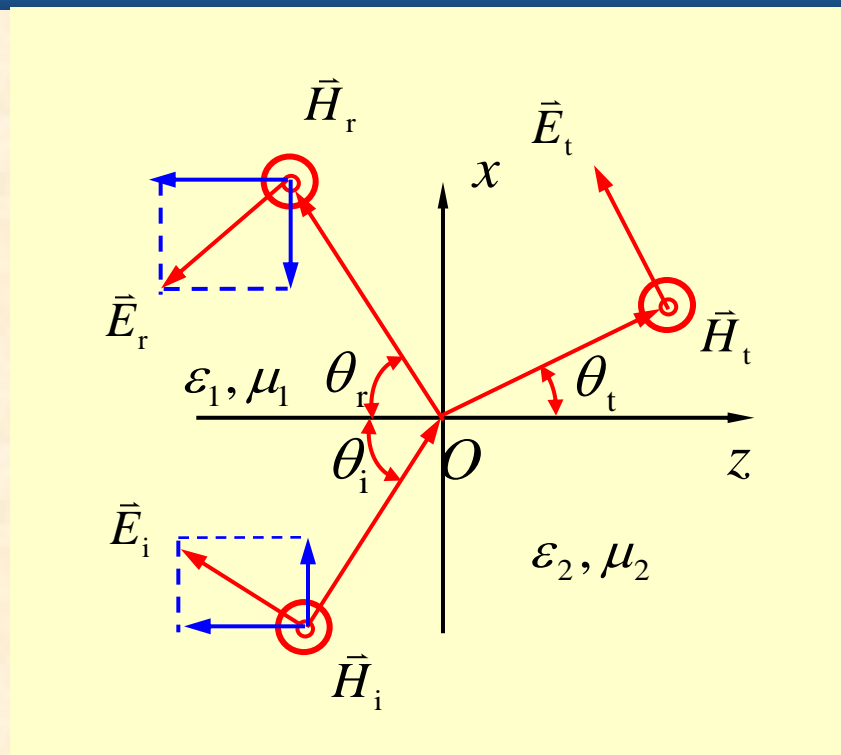
$$\vec{E}_i = E_{i0} (\cos \theta_i \hat{a}_x - \sin \theta_i \hat{a}_z) e^{-jk_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)}$$

反射波磁场强度为：

$$\vec{H}_r = \frac{E_{r0}}{\eta_1} e^{-jk_1(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)} \hat{a}_y$$

反射波电场强度为：

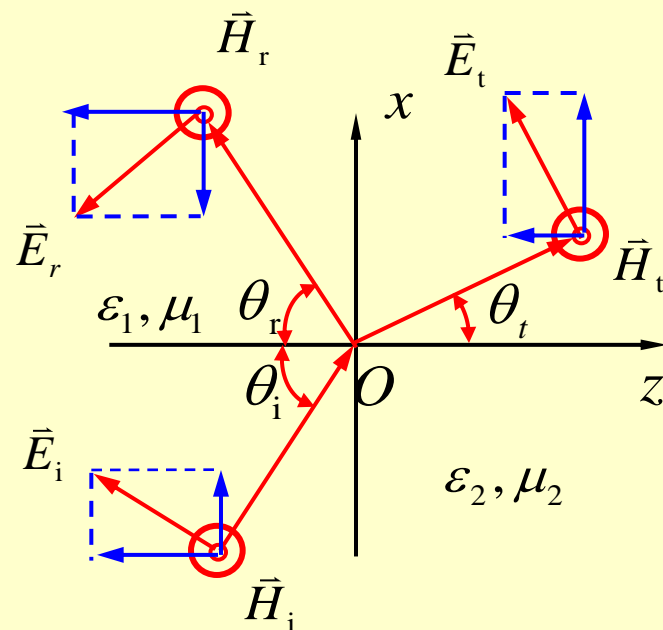
$$\vec{E}_r = E_{r0} (-\cos \theta_r \hat{a}_x - \sin \theta_r \hat{a}_z) e^{-jk_1(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)}$$





在媒质2中，折射波磁场强度为：

$$\vec{H}_t = \frac{E_{t0}}{\eta_2} e^{-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} \hat{a}_y$$



折射波电场强度为：

$$\vec{E}_t = E_{t0} (\cos \theta_t \hat{a}_x - \sin \theta_t \hat{a}_z) \cdot e^{-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)}$$

根据分界面上的边界条件： $E_{1t} = E_{2t}$ ， $H_{1t} = H_{2t}$

$$\Gamma_{//} = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}$$

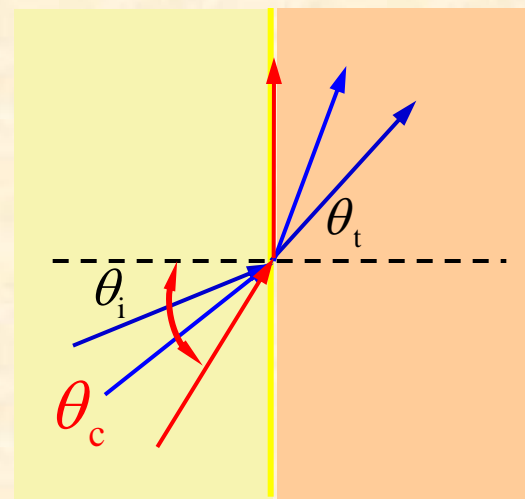
$$T_{//} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}$$

上两式也称为**平行极化波的费用耳公式**

4. 波的全反射现象

由折射定律可知：

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}}$$



当 $\epsilon_1 \mu_1 > \epsilon_2 \mu_2$ 时，必然有 $\theta_t > \theta_i$ 。

如果入射角增大到某个角度时，恰好使 $\theta_t = 90^\circ$ ，则：

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin \theta_c} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}} \rightarrow \theta_c = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}} \xrightarrow{\mu_1 = \mu_2} \theta_c = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

临界角

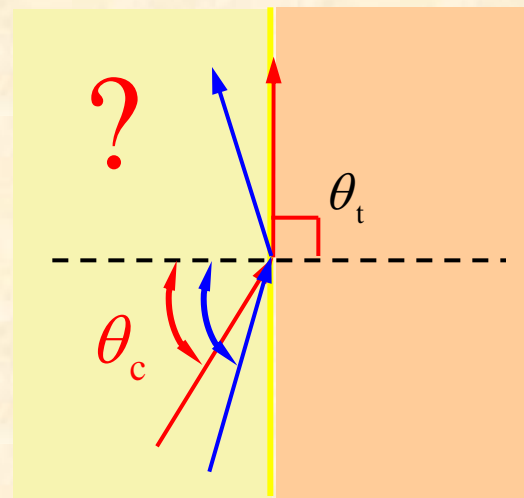
全反射：当 $\theta_i \geq \theta_c$ 时，介质2中没有透射波的现象。



讨论:

当 $\theta_i > \theta_c$ 时, 有 $\sin \theta_t > 1$,
 此时 θ_t 不是实数角, 而是复数角。

$$\text{则} \quad \cos \theta_t = \pm j \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_i - 1}$$



$$\vec{E}_t = E_{t0} e^{-k_2 z \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_i - 1}} e^{-jk_2 x \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_i}} \hat{a}_y$$

该式表明: 当 $\theta_i > \theta_c$ 时, 透射波在分界面上沿 x 方向以行波传播, 而沿 z 方向按指数规律快速衰减。这种在 z 方向衰减而沿分界面方向传播的波称为**表面波**。



5. 波的全透射现象

全透射：当入射波以某一角度入射时，入射波在分界面处全部透射于第二种媒质中，不发生反射的现象。

(1) 对平行极化波的情况：

$$\Gamma_{//} = \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t} = 0$$

$$\eta_1 \cos \theta_B = \eta_2 \cos \theta_t$$

若 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$

$$\cos \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \cos \theta_B$$

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \theta_B$$

$$\sin^2 \theta_B = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

$$\theta_B = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}$$

或：

$$\theta_B = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

布儒斯特角或偏振角



(2) 对垂直极化波的情况

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = 0 \longrightarrow \eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t = 0$$

折射定律: $\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}$ $\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}$

$\theta_i = \theta_t$

但由于 $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$, 因此 $\theta_i \neq \theta_t$ 。

结论: 垂直极化波斜入射时, 不可能发生全透射现象。

请问:

一圆极化波布儒斯特角斜入射时, 反射波是什么极化方式?



九、电磁波的应用

- 在发现电磁波不到6年，利用电磁波的技术，如雨后春笋般相继问世。
- 无线电报（1894年）
- 无线电广播（1906年）
- 无线电导航（1911年）
- 无线电话（1916年）

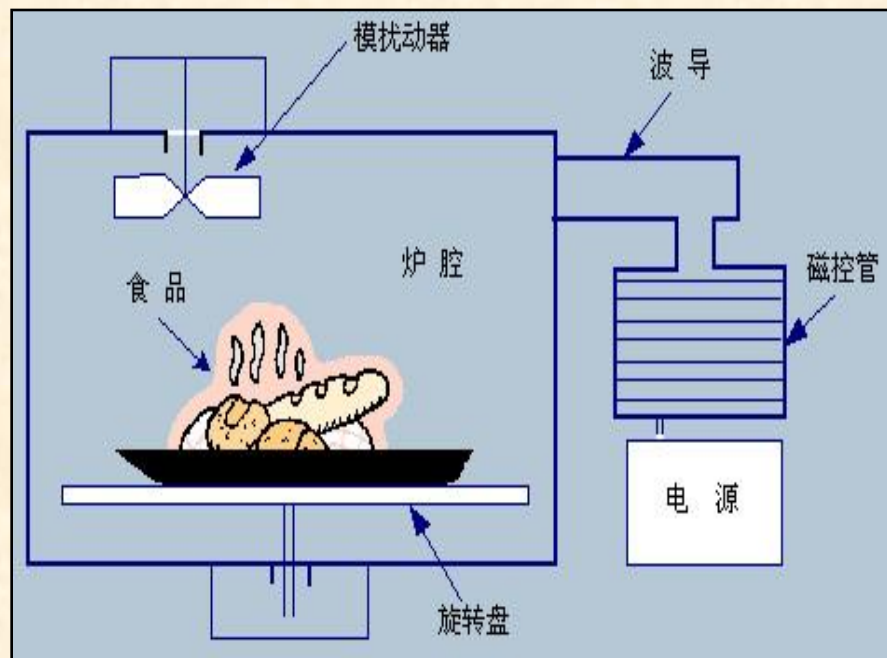




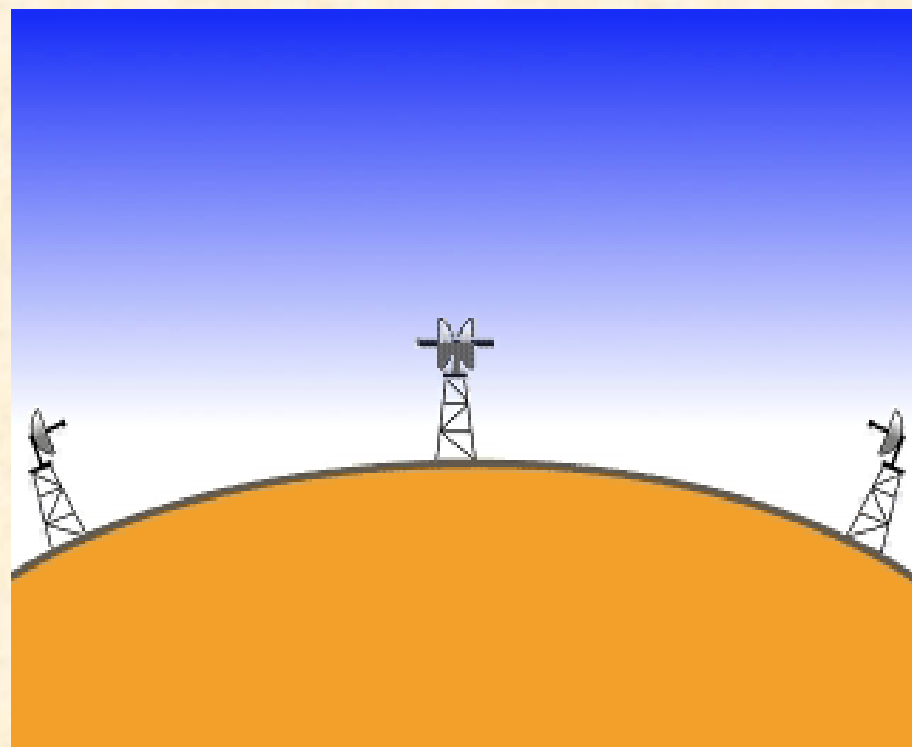
- 短波通信 (1921年)
- 无线电传真 (1923年)
- 电视 (1929年)
- 微波通信 (1933年)
- 雷达 (1935年)
- 遥控、遥感、卫星通信、射电天文学……它们使整个世界面貌发生了深刻的变化。



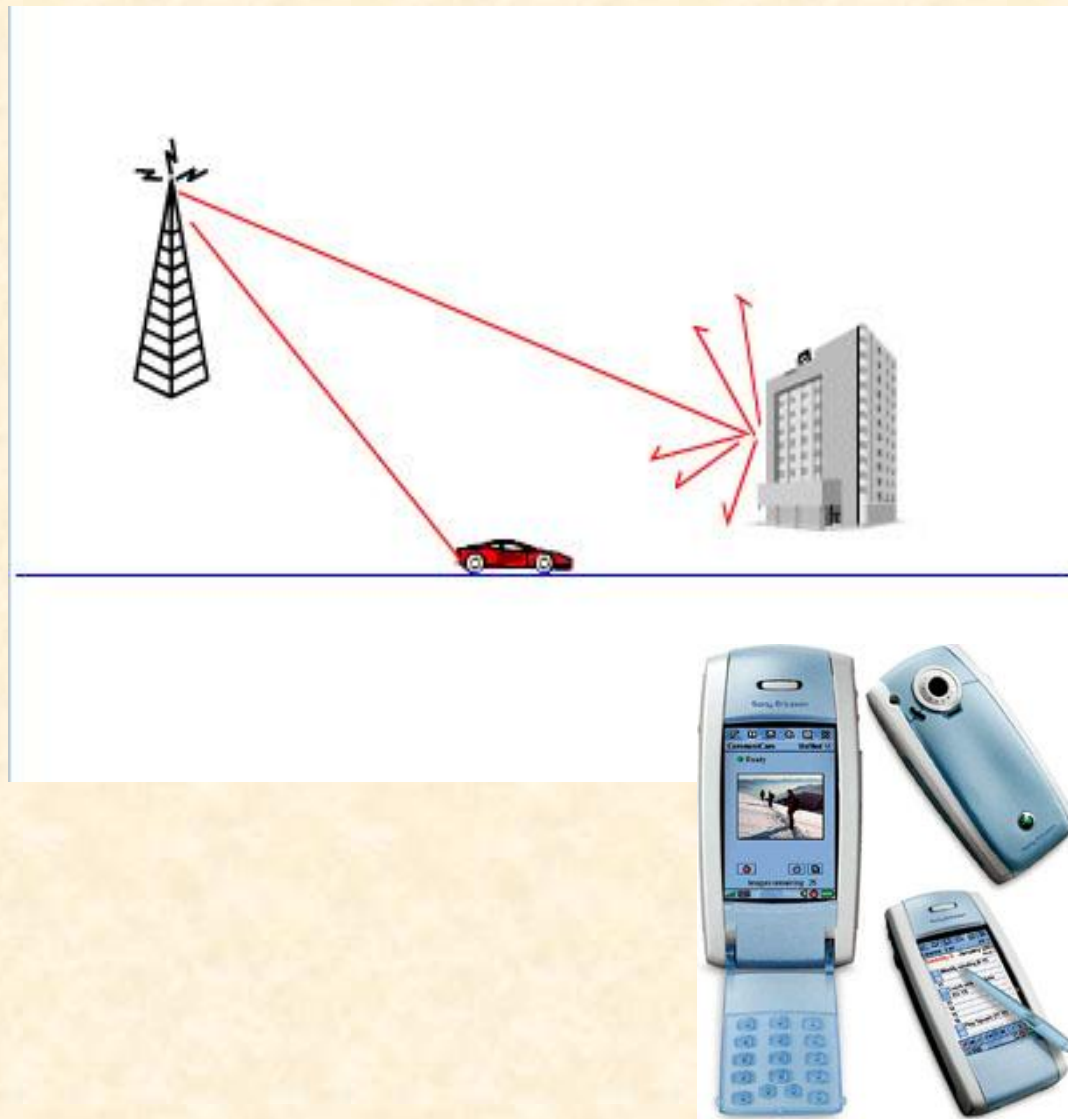
微波加热



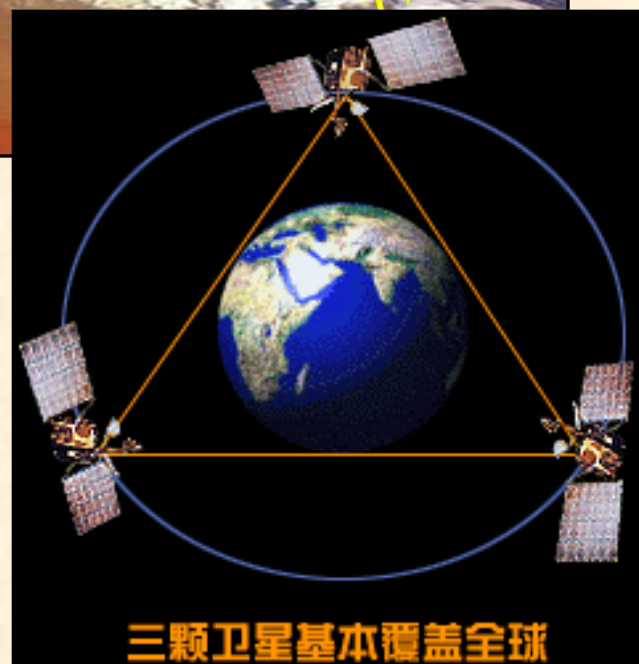
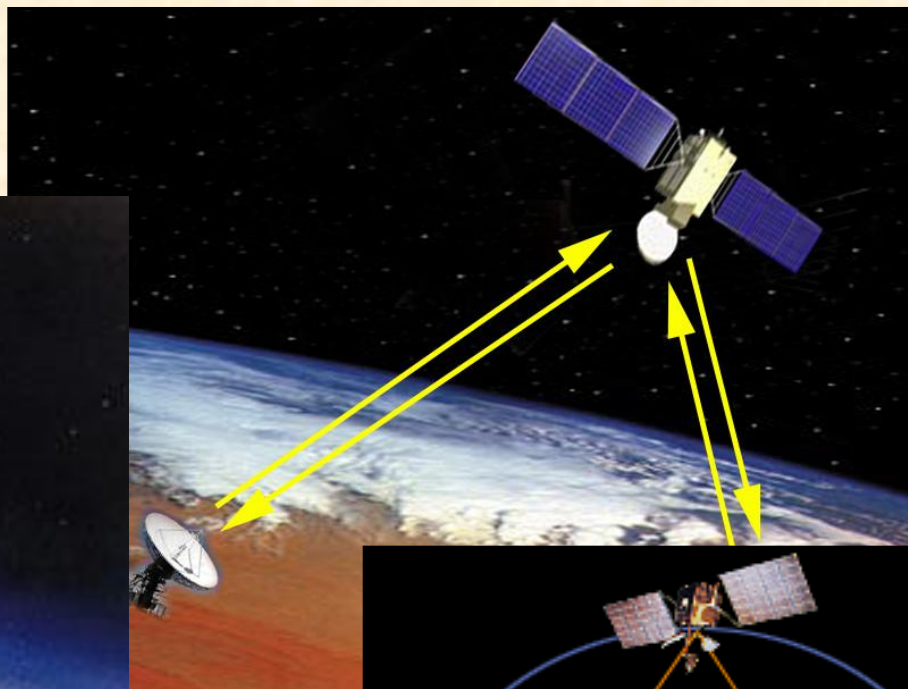
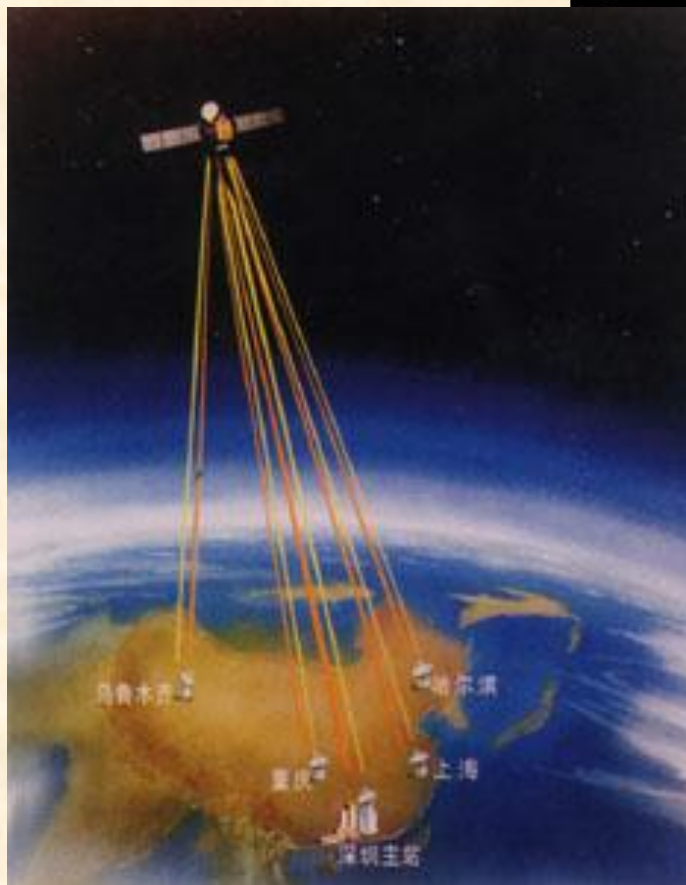
微波通信



移动通信



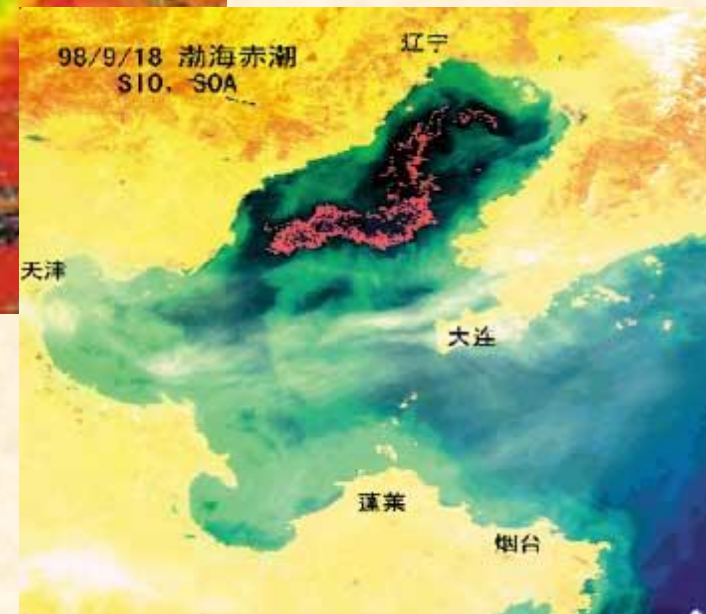
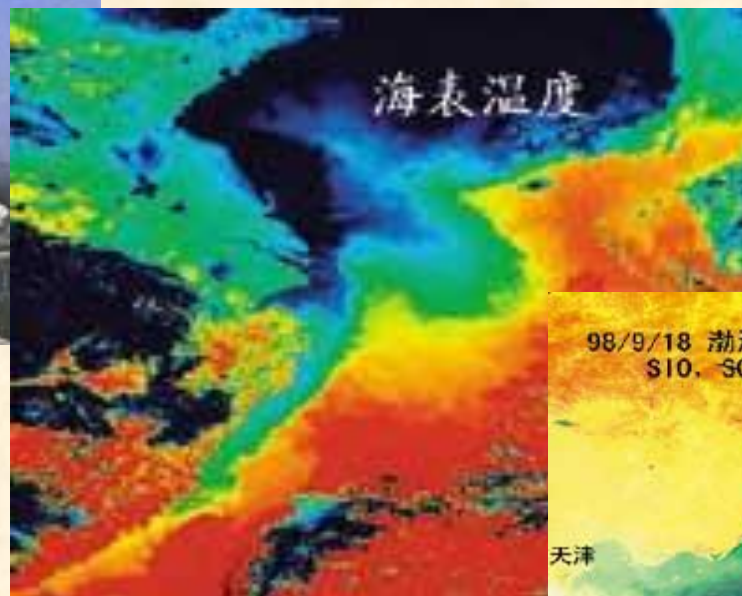
卫星通信



卫星测控、遥感、微波成像



卫星地面测控站



射电天文



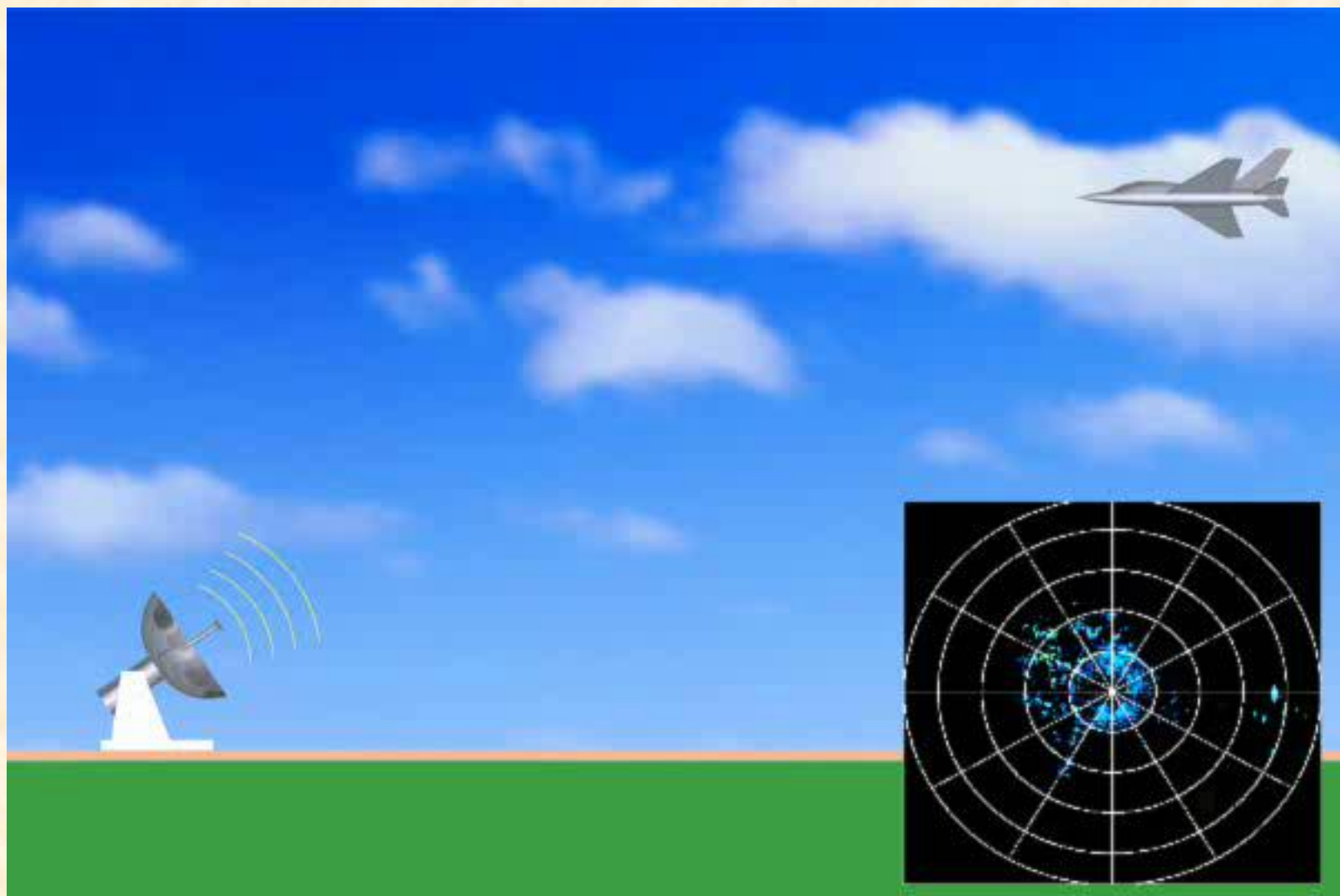
射电望远镜



微波武器



雷达系统





电磁波频谱的划分

频段	波长范围	频率范围
极高频(EHF)	0.1~1 cm	30 ~ 300 GHz
特高频(SHF)	1 ~ 10 cm	3 ~ 30 GHz
超高频(UHF)	10 ~ 100 cm	0.3 ~ 3 GHz
甚高频(VHF)	1 ~ 10 m	30 ~ 300 MHz
高频(HF)	10 ~ 100 m	3 ~ 30 MHz
中频(MF)	0.1 ~ 1 km	0.3 ~ 3 MHz
低频(LF)	1 ~ 10 km	30 ~ 300 kHz
甚低频(VLF)	10 ~ 100 km	3 ~ 30 kHz
超低频(ULF)	0.1 ~ 1 Mm	0.3 ~ 3 kHz
特低频(SLF)	1 ~ 10 Mm	30 ~ 300 Hz
极低频(ELF)	10 ~ 100 Mm	3 ~ 30 Hz



射频电磁场下人体的安全水平标准

IEEE/ANSI 标准给出频率为 90 MHz~300 GHz 的射频电磁场下电磁功率面密度限定值如下：

90~300	MHz:	0.2 mW/cm^2 ;
300~12500	MHz:	$f/1250 \text{ mW/cm}^2$ (f 单位为MHz) ;
12.5 ~300	GHz:	10 mW/cm^2 。