《信号与系统》概要

1. 信号表示与信号通过零状态线性定常系统

1.1 信号的脉冲分解、卷积

- 紧支集的阶梯函数在连续函数中稠密
- 连续信号*x(t)* 脉冲分解的极限形式

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t) * \delta(t) \qquad (1)$$

- 设线性定常系统算子*L*，则

$$h(t) = L\delta(t) \Leftrightarrow h(t-\tau) = L\delta(t-\tau) \qquad (2)$$

1.1 信号的脉冲分解、卷积

- 零状态响应$y_{zs}(t)$

$$y_{zs}(t)=Lx(t)\overset{\text{线性}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)L\left\{\delta(t-\tau)\right\}d\tau$$

$$\overset{\text{定常}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t) \qquad (3)$$

1.2 信号的谱表示（正交分解）、线性定常系统算子谱表示

- 设 $\{\phi_n(t)\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset L^2[t_0, t_0+T]$是完备正交集

$$\langle \phi_m(t), \phi_n(t) \rangle \square \int_{t_0}^{t_0+T} \phi_m(t) \phi_n^*(t) dt = K\delta_{mn} \qquad (4)$$

则对 $\forall f(t) \in L^1[t_0, t_0+T] \bigcup L^2[t_0, t_0+T]$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \phi_n(t) \qquad (5)$$

$$F_n = \frac{\langle f(t), \phi_n(t) \rangle}{\langle \phi_n(t), \phi_n(t) \rangle} \qquad (6)$$

1.2 信号的谱表示（正交分解）、线性定常系统算子谱表示

- $\left\{e^{jn\omega t}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 是$L^2\left[t_0,t_0+T\right]$中完备正交集

$$\left\langle e^{jm\omega t},e^{jn\omega t}\right\rangle=\int_{t_0}^{t_0+T}e^{jm\omega t}e^{-jn\omega t}dt=T\delta_{mn}\qquad \omega=2\pi/T\qquad(7)$$

则对$\forall f(t)\in L^1\left[t_0,t_0+T\right]\cup L^2\left[t_0,t_0+T\right]$，有$f(t)$的傅里叶级数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega t}\qquad \omega=2\pi/T\qquad(8)$$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-jn\omega t}dt\qquad(9)$$

1.2 信号的谱表示（正交分解）、线性定常系统算子谱表示

- $BIBO$稳定线性定常系统L的特征函数

$$Le^{j\omega t}=H(j\omega)e^{j\omega t},\qquad t\in(-\infty,\infty)\quad(10)$$

$e^{j\omega t}$ ——线性定常系统特征函数

$H(j\omega)$— 线性定常系统L的谱

(10)式也是系统对$e^{j\omega t}$的稳态响应。

1.2 信号的谱表示（正交分解）、线性定常系统算子谱表示

- 周期信号$f(t)$通过$BIBO$稳定线性定常系统

$$y(t)=Lf(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_nL\left\{e^{jn\omega t}\right\}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_nH(jn\omega t)e^{jn\omega t}\qquad \omega=2\pi/T\quad t\in(-\infty,\infty)\qquad(11)$$

- $$\left\langle e^{j\omega t},e^{j\Omega t}\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}e^{-j\Omega t}dt=2\pi\delta(\omega-\Omega)\qquad(12)$$

1.2 信号的谱表示（正交分解）、线性定常系统算子谱表示

- 对$\forall f(t)\in L^1[-\infty,\infty]\cup L^2[-\infty,\infty]$,则

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}df \qquad (13)$$

$$F(\omega)=\mathcal{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (14)$$

- $f(t)$通过$BIBO$稳定系统L

$$Lf(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)L\{e^{j\omega t}\}df=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}df \qquad (15)$$

- (3)和(15)式殊途同归——卷积定理

2. Fourier变换、Laplace变换、Z变换

2.1 定义与存在性

- 定义
- $f(t)\in L^1(-\infty,\infty)$, 则$F(\omega)$存在, 即$|F(\omega)|<\infty$
- $f(t)$为指数阶信号，即$\exists M>0,\exists T>0,$

$\exists\sigma_0$, 使当$\forall t\geq T$, 成立

$$\left|f(t)\right|\leq Me^{\sigma_0 t}\qquad(16)$$

则$F(s)$存在, 即$|F(s)|<\infty$, 收敛域$\sigma>\sigma_0$

2.1 定义与存在性

- F(s) （F(ω)）与 f(t) 为几乎处处一一对应映射。
- 因果序列 x(n)的Z变换X(z)收敛域在某一圆外，逆因果序列x(n)的Z变换的收敛域在某一圆内。

2.2 性质

- 表现形式相同的性质
  - 代数性质（线性，卷积，相乘）
  - 尺度变换（相似）性质
  - 时移（移位）
  - 微分、积分

2.2 性质

- 特殊性质
  - f(t) $\in L^2(-\infty, \infty)$，Fourier变换具有内积不变性、能量不变性（Parseval定理）、欧氏范数($\|\cdot\|_2$)不变性。
  - Gibbs现象（第1类间断点，不一致收敛，相对峰值≈9%的衰减振荡）。
  - Fourier方法的最小均方收敛性。
  - 实信号傅里叶谱的对称性（模偶相奇）。
  - Fourier谱的渐近特性（结论）
  - Laplace变换与Z变换的初值定理与终值定理。

2.3 Laplace变换与Fourier变换的关系

- 单边/双边
- F(s)收敛域含虚轴jω，则$F(j\omega)= F(s)|_{s=j\omega}$

2.4 Laplace变换与Z变换的关系

- S平面与Z平面，$z=e^{ST}$，多对1，$j\omega\rightarrow$单位圆，左内右外
- 角频率与离散（数字）频率
- 反演——留数定理
- 零极点分布与时域原函数、系统函数与模态
- 零极点分布与频率响应、几何方法
- X(s)到X(z)

2.5 DTFT DFT

- 定义
- x(n)单位圆上Z变换即序列的Fourier变换

$$F\{x(n)\}=DTFTx(n)=X(z)|_{z=e^{j\omega}}=X(e^{j\omega}) \qquad (17)$$

- x(n)单位圆上Z变换的N点等间隔采样即序列的DFT

$$DFTx(n)=X(k)=X(z)|_{z=W^{-k}} \quad 0\le k\le N-1 \qquad (18)$$

- 由X(k)确定X(z)
- 由X(k)确定$X(e^{j\omega})$
- DFT的分辨力

3. 线性定常系统分析的输入输出方法

令输入为x(t)（x(n)），输出为y(t)（y(n)）

- $y_{zs}(t)=h(t)*x(t)$（零状态）$h(t)$——冲激响应

  $y_{zs}(n)=h(n)*x(n)$（零状态）
- $y_{zs}(t)=H(p)x(t)$（零状态）$H(p)$——系统算子

  $y_{zs}(n)=H(z)x(n)$（零状态）
- $Y(s)=H(s)X(s)$（零状态、因果） $H(s)$——系统函数

  $Y(z)=H(z)X(z)$ （零状态）

3. 线性定常系统分析的输入输出方法

- $Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)$（零状态、稳定） $H(\omega)$——系统函数

  $Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$（零状态、稳定）
- 对因果、零状态、*BIBO稳定系统，*$H(p)$、$H(s)$、$H(j\omega)$*形式相等*
- 微分方程一普适
- 黑盒子方法/状态空间方法

4. 冲激函数

- P.A.M. Dirac定义→弱极限→广义函数（依内积收敛）
- 性质与应用
- 冲激偶及性质

5. 非零状态线性系统

- 定义

- 系统响应=零状态响应+零输入响应（由定义产生的推论）

6. 信息与通信工程和电子科学技术学科的若干基本知识

- *BIBO*稳定
- 全通函数
- 最小相移函数
- 无失真传输
- 理想低通滤波器
- 复包络方法
- Hilbert变换

6. 信息与通信工程和电子科学技术学科的若干基本知识

- 物理可实现问题（Paley-Wiener准则）
- 等效带宽、等效时宽、Heisenberg测不准原理、Cauchy-Schwartz不等式
- 匹配滤波器
- 相关
- 采样与采样定理

本课强调

- 问题的提法
- 概念的理解与演绎——高数学起点
- 直觉物理思考
- 归纳与概括
- 于不疑处存疑（胡适）

⇒ **统一性、不变性、差异性、系统性**