第三章 离散傅里叶变换

DFT: Discrete Fourier Transform

一、Fourier变换的几种可能形式

时间函数 ⟺ 频率函数

连续时间、连续频率—傅里叶变换

连续时间、离散频率—傅里叶级数

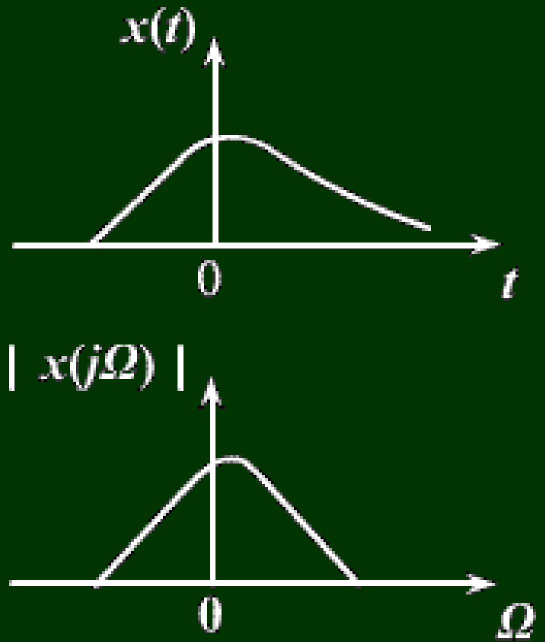
离散时间、连续频率—序列的傅里叶变换

离散时间、离散频率—离散傅里叶变换

连续时间、连续频率—傅里叶变换

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$



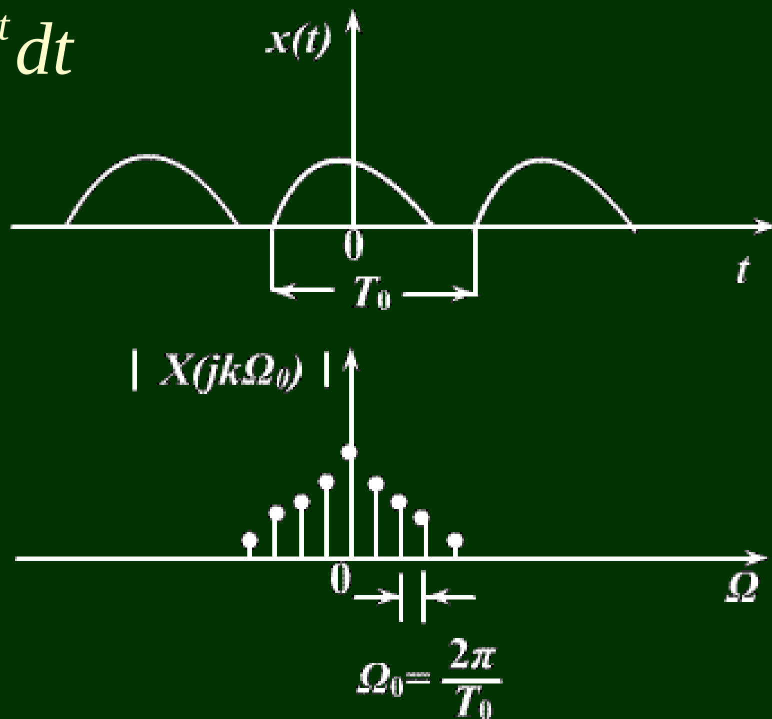
时域连续函数造成频域是非周期的谱，

而时域的非周期造成频域是连续的谱密度函数。

连续时间、离散频率—傅里叶级数

$$X(jk\Omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

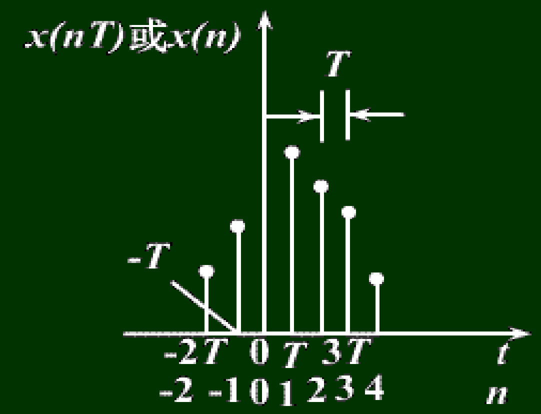


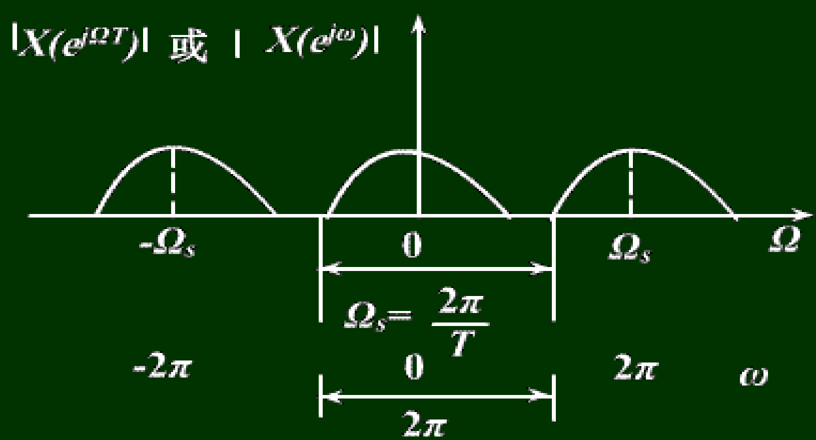
时域连续函数造成频域是非周期的谱，
而频域的离散对应时域是周期函数。

离散时间、连续频率—序列的傅里叶变换

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$



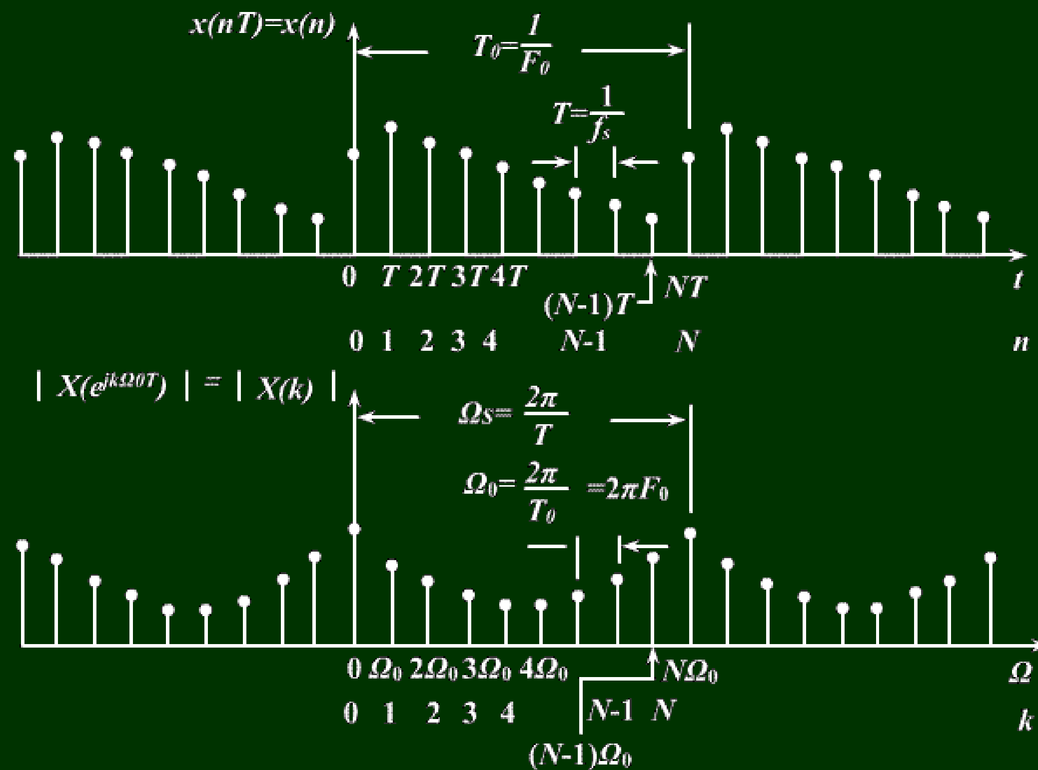


时域的离散化造成频域的周期延拓，
而时域的非周期对应于频域的连续

离散时间、离散频率—离散傅里叶变换

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$



一个域的离散造成另一个域的周期延拓，因此离散傅里叶变换的时域和频域都是离散的和周期的

四种傅里叶变换形式的归纳

时间函数	频率函数
连续和非周期	非周期和连续
连续和周期(T_0)	非周期和离散($\Omega_0=2\pi/T_0$)
离散(T)和非周期	周期($\Omega s=2\pi/T$)和连续
离散(T)和周期(T_0)	周期($\Omega s=2\pi/T$)和离散($\Omega_0=2\pi/T_0$)

二、周期序列的DFS及其性质

周期序列：$\tilde{x}(n)=\tilde{x}(n+rN)$

r为任意整数　N为周期

连续周期函数：

$\tilde{x}_a(t)=\tilde{x}_a(t+kT_0)$　T_0为周期

$$\tilde{x}_a(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A(k)e^{jk\Omega_0 t}$$

基频：$\Omega_0=2\pi/T_0$

k次谐波分量：$e^{jk\Omega_0 t}$

N为周期的周期序列：

基频：$\omega_0=2\pi/N$

$$\tilde{x}(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A(k)e^{jk\omega_0 n}$$

k次谐波分量：$e^{jk\omega_0 n}$

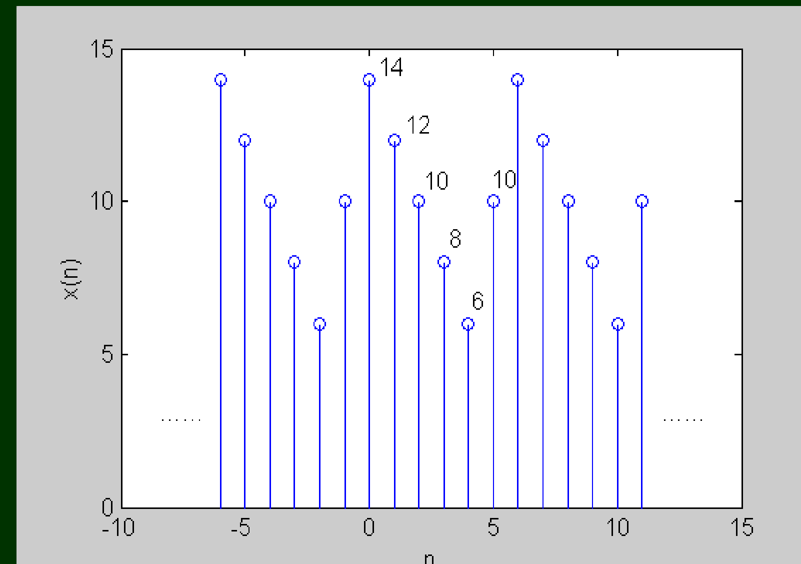
周期序列的DFS正变换和反变换：

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$

$$\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}$$

其中： $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

例： 已知序列$x(n)$是周期为6的周期序列，如图所示，试求其DFS的系数。



解：根据定义求解

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{5}\tilde{x}(n)W_6^{nk}$$

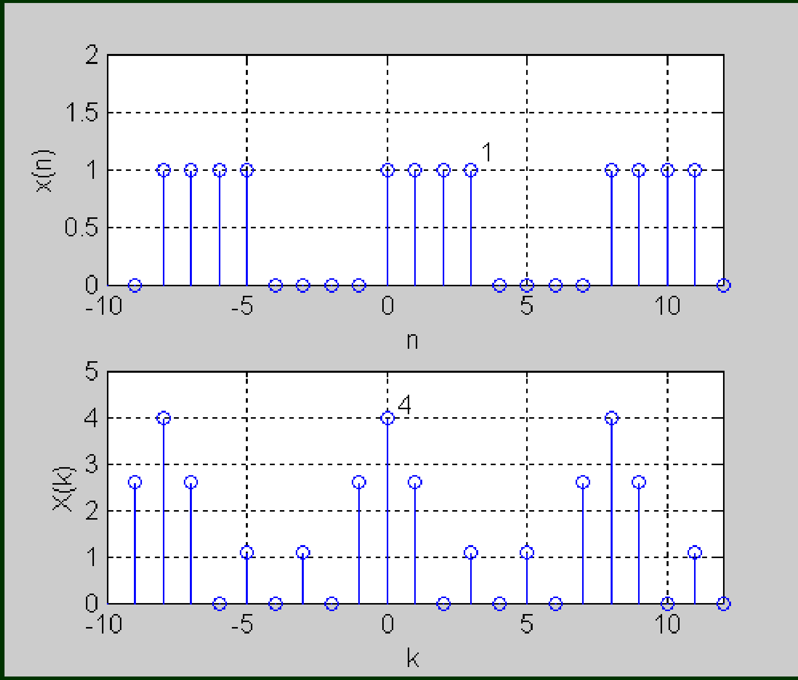
$$=14+12e^{-j\frac{2\pi}{6}k}+10e^{-j\frac{2\pi}{6}2k}$$

$$+8e^{-j\frac{2\pi}{6}3k}+6e^{-j\frac{2\pi}{6}4k}+10e^{-j\frac{2\pi}{6}5k}$$

$\tilde{X}(0)=60$ $\tilde{X}(1)=9-j3\sqrt{3}$ $\tilde{X}(2)=3+j\sqrt{3}$

$\tilde{X}(3)=0$ $\tilde{X}(4)=3-j\sqrt{3}$ $\tilde{X}(5)=9+j3\sqrt{3}$

例： 已知序列$x(n)=R_4(n)$，将$x(n)$以$N=8$为周期进行周期延拓成$\tilde{x}(n)$，求$\tilde{x}(n)$的DFS。



解法一： 数值解

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{7}\tilde{x}(n)W_8^{nk}=\sum_{n=0}^{3}W_8^{nk}$$

$$=1+e^{-j\frac{2\pi}{8}k}+e^{-j\frac{2\pi}{8}2k}+e^{-j\frac{2\pi}{8}3k}$$

$$\tilde{X}(0)=4\quad \tilde{X}(1)=1-j\left(\sqrt{2}+1\right)\quad \tilde{X}(2)=0\quad \tilde{X}(3)=1-j\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$\tilde{X}(4)=0\quad \tilde{X}(5)=1+j\left(\sqrt{2}-1\right)\quad \tilde{X}(6)=0\quad \tilde{X}(7)=1+j\left(\sqrt{2}+1\right)$$

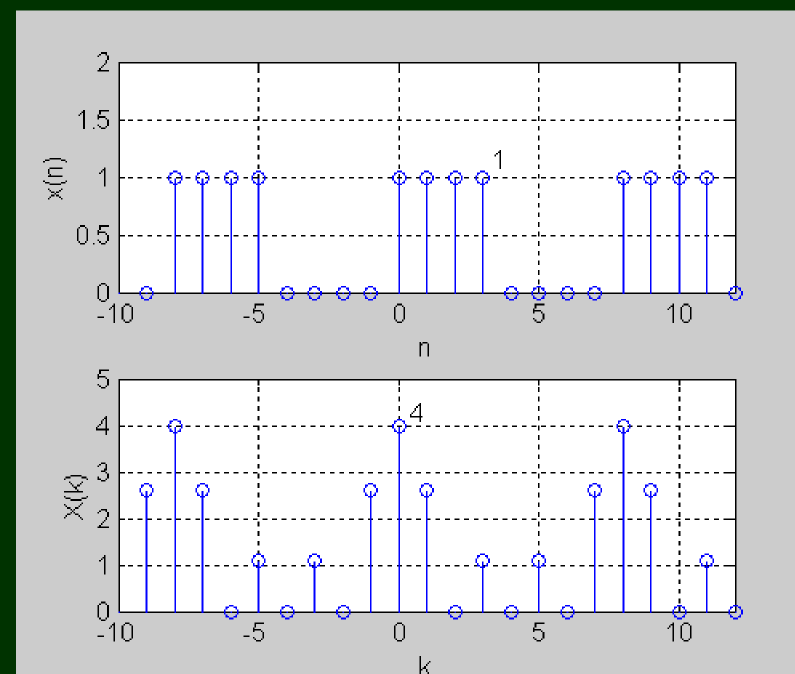
解法二：公式解

$$\tilde{X}(k)=DFS\left[\tilde{x}(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{7}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{\pi}{4}kn}=\frac{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k\cdot 4}}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}}$$

$$=\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k}\left(e^{j\frac{\pi}{2}k}-e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right)}{e^{-j\frac{\pi}{8}k}\left(e^{j\frac{\pi}{8}k}-e^{-j\frac{\pi}{8}k}\right)}$$

$$=e^{-j\frac{3}{8}\pi k}\frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{8}k}$$



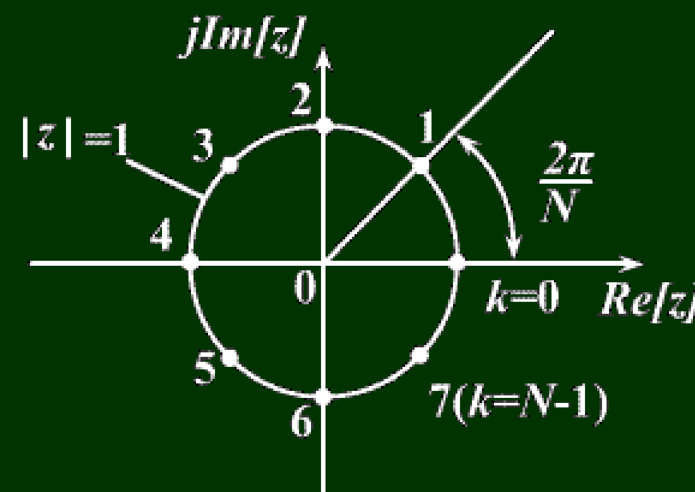
$\tilde{X}(k)$与z变换的关系：

$$\text{令}x(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n) & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其它}n\end{cases}$$

$$\text{对}x(n)\text{作}z\text{变换：}X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$$

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}=X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$\therefore \tilde{X}(k)$可看作是对$\tilde{x}(n)$的一个周期$x(n)$做z变换然后将z变换在z平面单位圆上按等间隔角$\dfrac{2\pi}{N}$抽样得到



DFS的性质

1、线性：

若

$$\tilde{X}_1(k)=DFS[\tilde{x}_1(n)]$$

$$\tilde{X}_2(k)=DFS[\tilde{x}_2(n)]$$

则

$$DFS[a\tilde{x}_1(n)+b\tilde{x}_2(n)]=a\tilde{X}_1(k)+b\tilde{X}_2(k)$$

其中，a,b 为任意常数

2、序列的移位

$$DFS[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk}\tilde{X}(k) = e^{j\frac{2\pi}{N}mk}\tilde{X}(k)$$

证：$DFS[\tilde{x}(n+m)] = \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n+m)W_N^{nk}$

令$i = n+m$ $\quad = \sum_{i=m}^{N-1+m}\tilde{x}(i)W_N^{k(i-m)}$

$$= W_N^{-mk}\sum_{i=0}^{N-1}\tilde{x}(i)W_N^{ki} = W_N^{-mk}\tilde{X}(k)$$

3、调制特性

$$DFS[W_N^{nl}\tilde{x}(n)]=\tilde{X}(k+l)$$

证：$DFS[W_N^{ln}\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{ln}\tilde{x}(n)W_N^{nk}$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{(l+k)n}$$

$$=\tilde{X}(k+l)$$

4、周期卷积和

若 $\tilde{Y}(k)=\tilde{X}_1(k)\cdot\tilde{X}_2(k)$

则 $\tilde{y}(n)=IDFS[\tilde{Y}(k)]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_2(m)\tilde{x}_1(n-m)$$

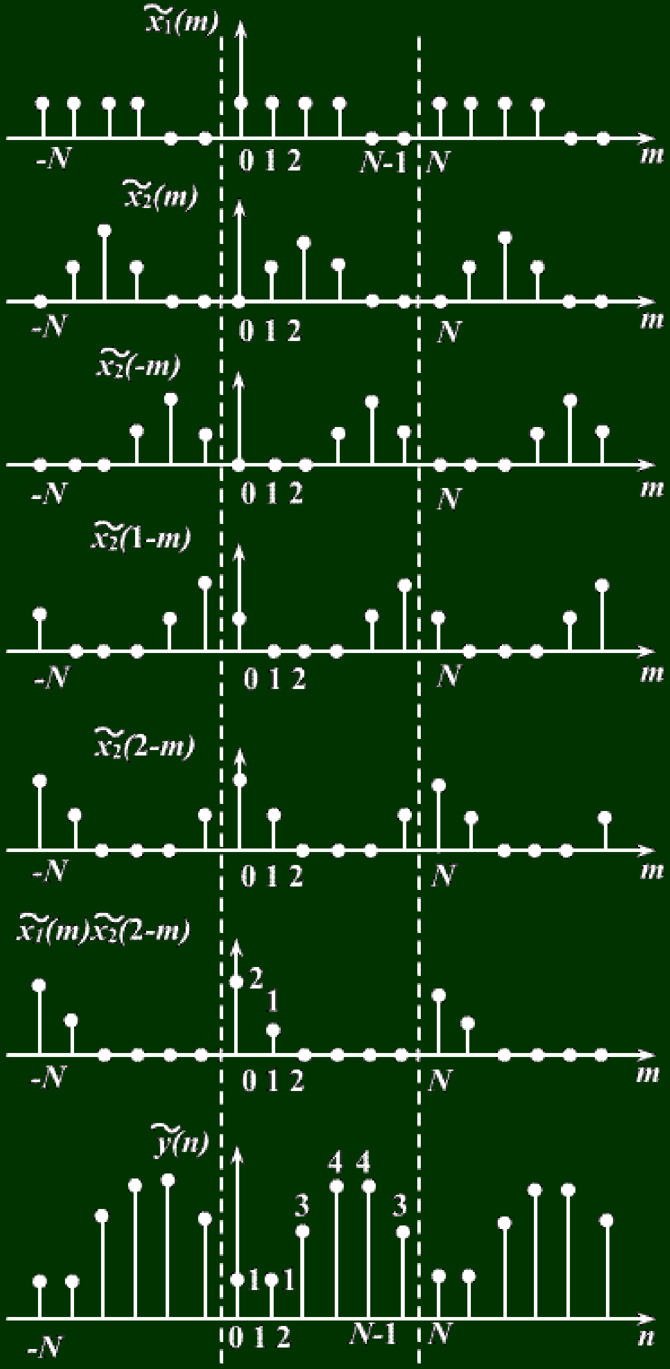
证： $$\tilde{y}(n) = IDFS[\tilde{X}_1(k)\cdot\tilde{X}_2(k)]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)W_N^{-kn}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)W_N^{mk}]\tilde{X}_2(k)W_N^{-kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_2(k)W_N^{-(n-m)k}]$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

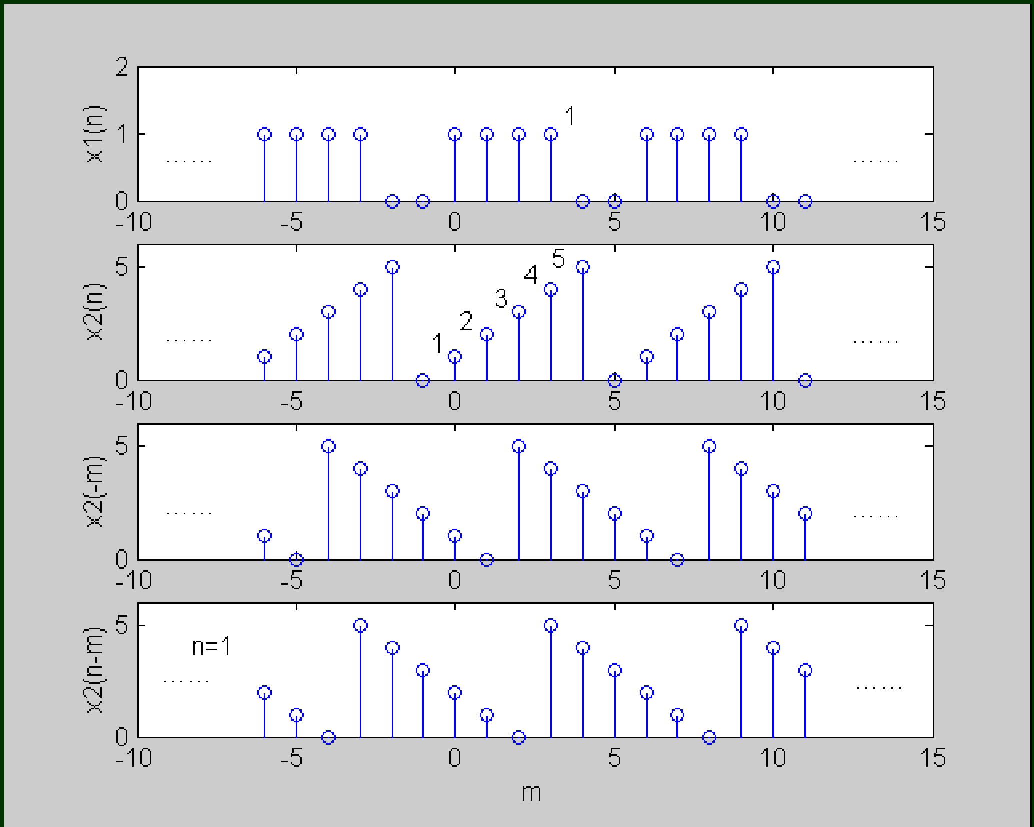


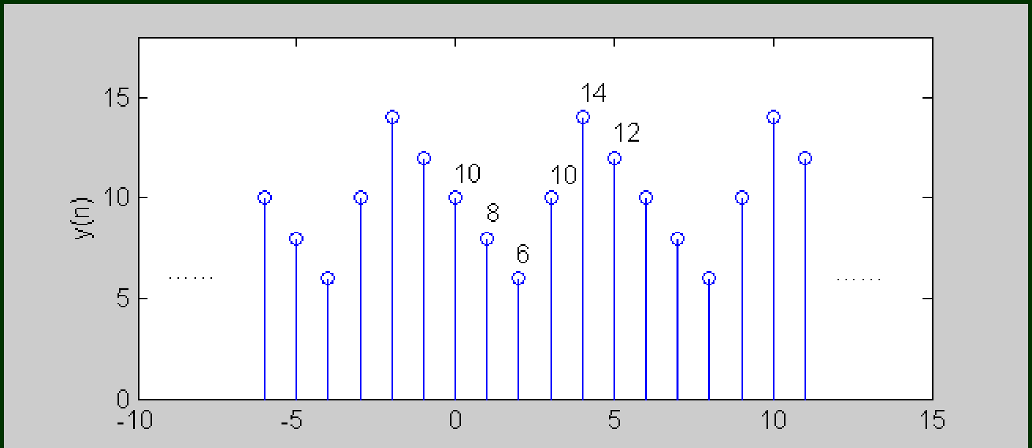
$\tilde{x}_1(m)$
-N
0 1 2
N-1
N
m
$\tilde{x}_2(m)$
$\tilde{x}_2(-m)$
$\tilde{x}_2(1-m)$
$\tilde{x}_2(2-m)$
$\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(2-m)$
2
1
$\tilde{y}(n)$
1 1 3 4 4 3
n

例：已知序列$x_1(n)=R_4(n),\ x_2(n)=(n+1)R_5(n)$分别将序列以周期为6周期延拓成周期序列$\tilde{x}_1(n)$和$\tilde{x}_2(n)$，求两个周期序列的周期卷积和。

解：$$\tilde{y}(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

$$=\sum_{m=0}^{5}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$


x1(n)
1
x2(n)
1
2
3
4
5
x2(-m)
x2(n-m)
n=1
m
......


y(n)
14
12
10
10
8
6
......

n/m	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	…	
$\tilde{x}_1(n/m)$	…	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	…	
$\tilde{x}_2(n/m)$	…	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	…	$\tilde{y}(n)$
$\tilde{x}_2(-m)$	…	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0	…	10
$\tilde{x}_2(1-m)$	…	0	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	…	8
$\tilde{x}_2(2-m)$	…	1	0	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	…	6
$\tilde{x}_2(3-m)$	…	2	1	0	5	4	3	2	1	0	5	4	3	…	10
$\tilde{x}_2(4-m)$	…	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0	5	4	…	14
$\tilde{x}_2(5-m)$	…	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0	5	…	12

同样，利用对称性

若 $\tilde{y}(n) = \tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)$

则 $$\tilde{Y}(k) = DFS[\tilde{y}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{y}(n) W_N^{nk}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l) \tilde{X}_2(k-l)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_2(l) \tilde{X}_1(k-l)$$

三、离散傅里叶变换（DFT）

长度为N的有限长序列$x(n)$

周期为N的周期序列$\tilde{x}(n)$

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n)$$

$\tilde{x}(n)$的主值序列

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) = x((n))_N$$

$x(n)$的周期延拓

同样：X(k)也是一个N点的有限长序列

$$\tilde{X}(k) = X((k))_N$$

$$X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k)$$

有限长序列的DFT正变换和反变换：

$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk} \qquad 0\le k\le N-1$$

$$x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk} \qquad 0\le n\le N-1$$

或

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}R_N(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}R_N(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)$$

其中： $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

*DFT*与序列的DTFT和*z*变换的关系：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \qquad X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$= X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

x(n)的N点DFT是

x(n)的z变换在单位圆上的N点等间隔抽样；

x(n)的DTFT在区间[0，2π]上的N点等间隔抽样。

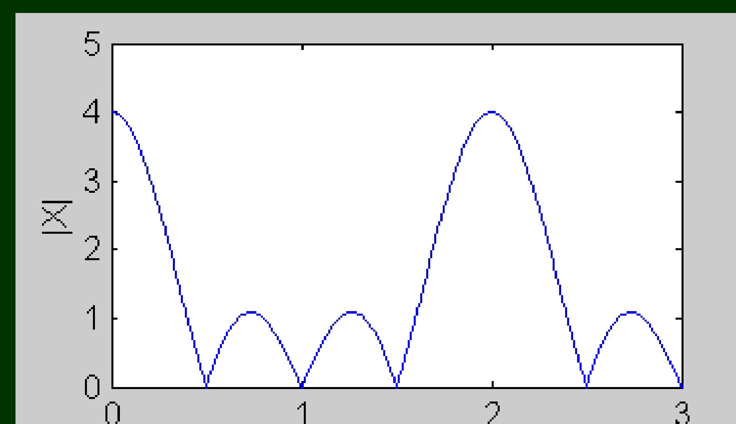
例：已知序列$x(n)=R_4(n)$，求$x(n)$的8点和16点DFT。

解：求$x(n)$的DTFT

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{e^{-j2\omega}\left(e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}\right)}{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)}$$

$$=e^{-j\frac{3}{2}\omega}\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}$$

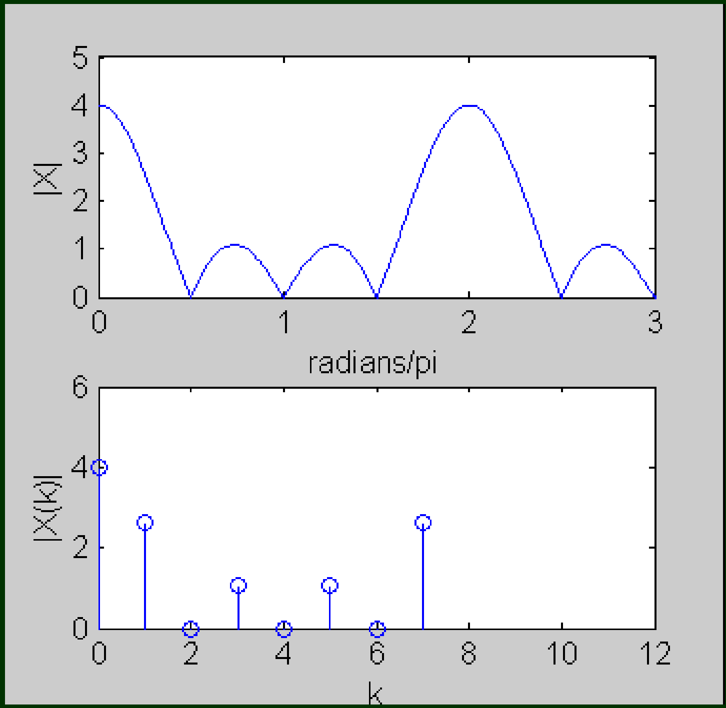


求$x(n)$的8点$DFT \quad N=8$

$$X(k)=X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{8}k}$$

$$=e^{-j\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{4}k}\frac{\sin\left(2\cdot\frac{2\pi}{8}k\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{8}k\right)}$$

$$=e^{-j\frac{3}{8}\pi k}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}k\right)}$$

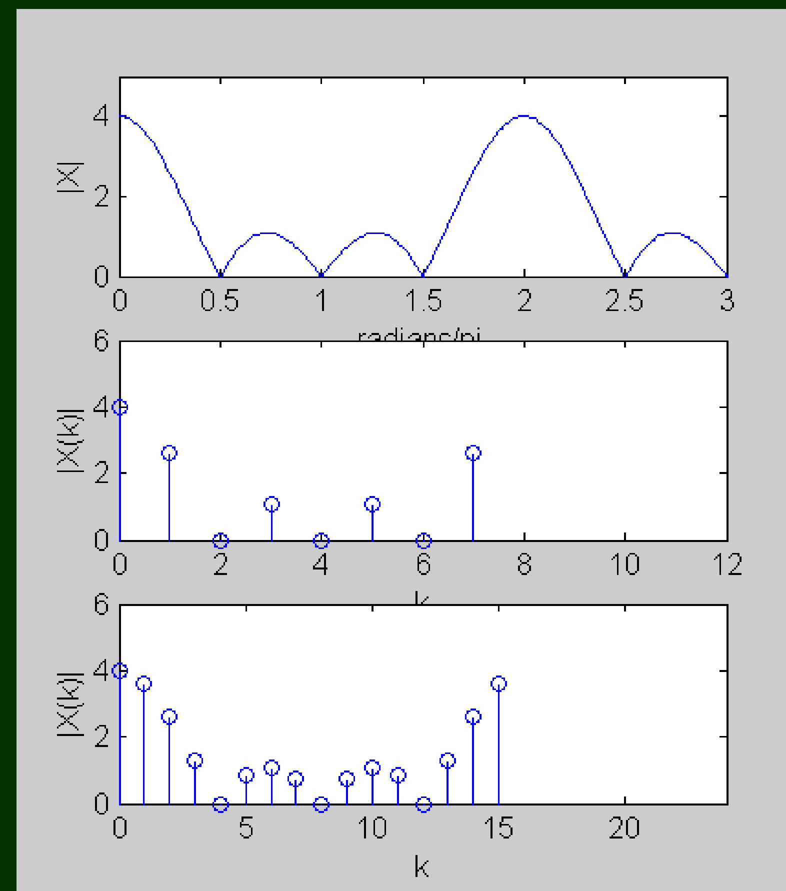


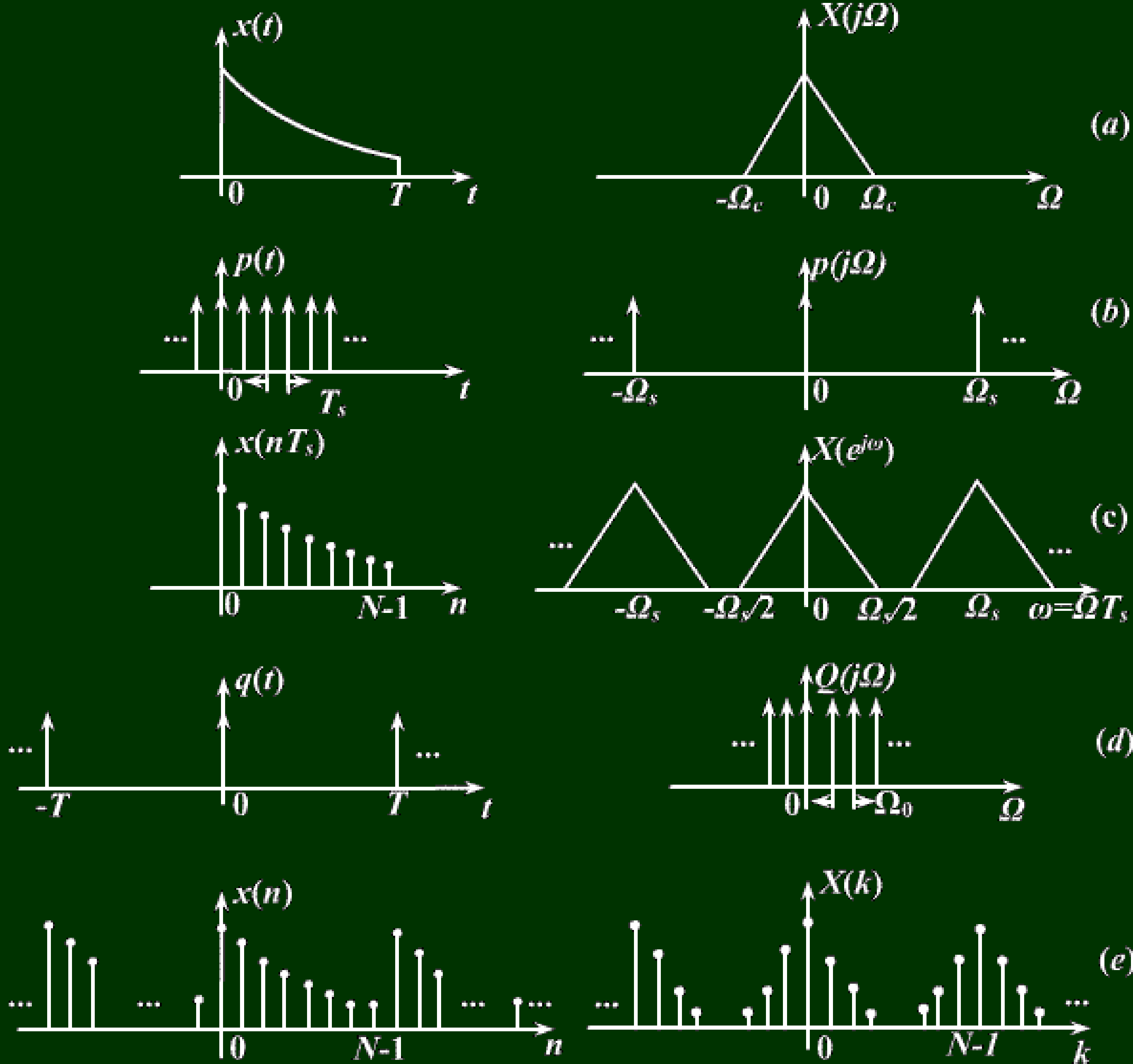
求$x(n)$的16点$DFT \quad N=16$

$$X(k)=X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{16}k}$$

$$=e^{-j\frac{3}{2}\cdot\frac{2\pi}{16}k}\frac{\sin\left(2\cdot\frac{2\pi}{16}k\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{16}k\right)}$$

$$=e^{-j\frac{3}{16}\pi k}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{16}k\right)}$$




x(t)
0
T
t
X(jΩ)
-Ω_c
Ω_c
Ω
(a)
p(t)
T_s
p(jΩ)
-Ω_s
Ω_s
(b)
x(nT_s)
N-1
n
X(e^{jω})
-Ω_s/2
Ω_s/2
ω=ΩT_s
(c)
q(t)
-T
Q(jΩ)
Ω_0
(d)
x(n)
X(k)
k
(e)

*DFT*的图形解释

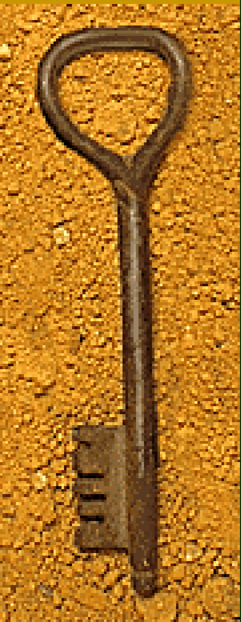
四、离散傅里叶变换的性质

DFT正变换和反变换：

$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}R_N(k)$$

$$x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}R_N(n)$$

其中： $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$



1、线性：

若 $$X_1(k)=DFT[x_1(n)]$$

$$X_2(k)=DFT[x_2(n)]$$

则 $$DFT[ax_1(n)+bx_2(n)]=aX_1(k)+bX_2(k)$$

a,b为任意常数

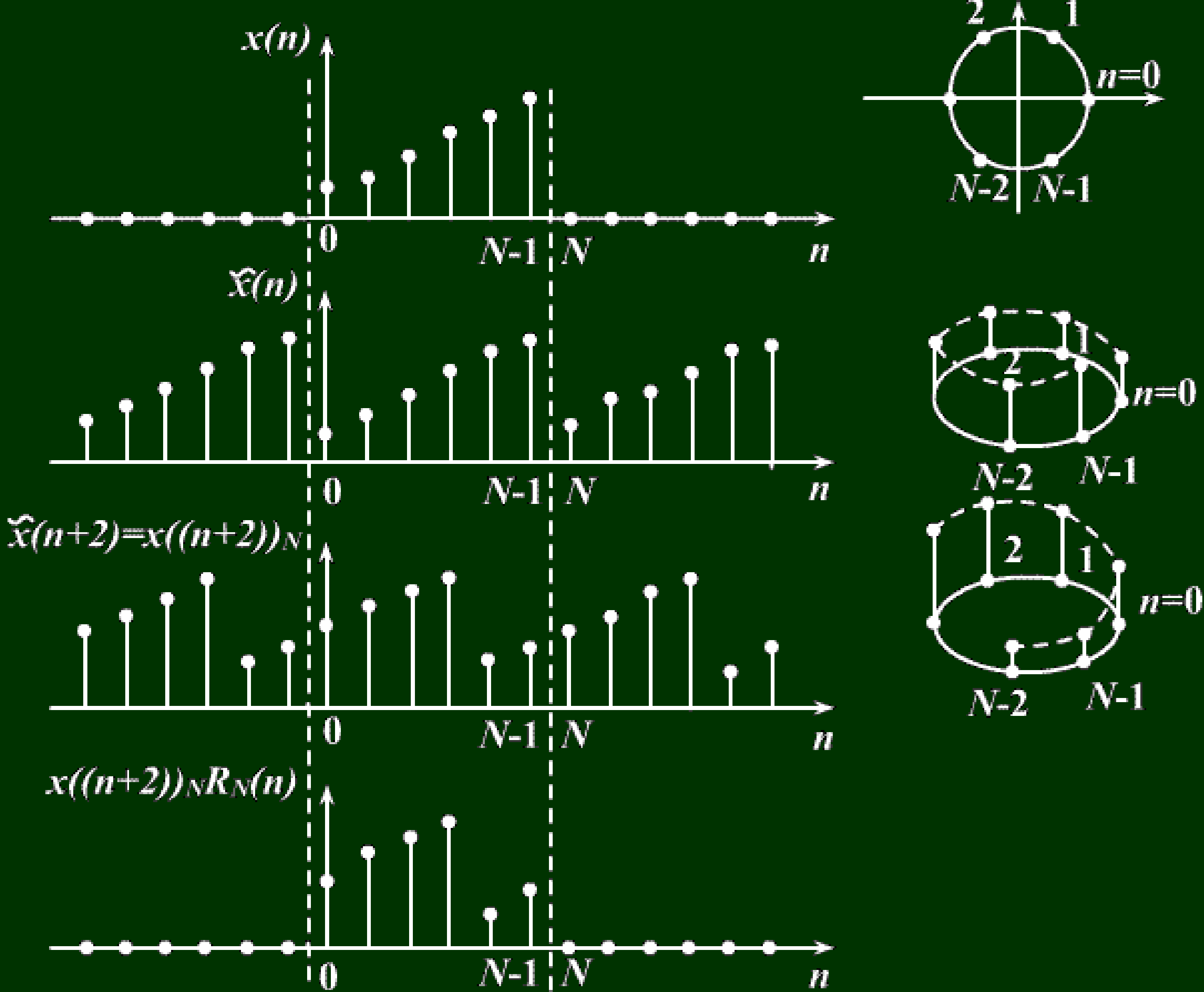
这里，序列长度及DFT点数均为N
若不等，分别为N_1，N_2，则需补零使两序列长度相等，均为N，且 $N\ge \max[N_1,N_2]$

2、序列的圆周移位

定义： $x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$

$$x(n) \xrightarrow[\text{延拓}]{\text{周期}} \tilde{x}(n) \xrightarrow{\text{移位}} \tilde{x}(n+m) \xrightarrow[\text{序列}]{\text{取主值}} x_m(n)$$

$$= x((n+m))_N$$



x(n)
0
N-1
N
n
2
1
n=0
N-2
N-1
x̃(n)
0
N-1
N
n
2
1
n=0
N-2
N-1
x̃(n+2)=x((n+2))_N
0
N-1
N
n
2
1
n=0
N-2
N-1
x((n+2))_N R_N(n)
0
N-1
N
n

$$X_m(k) = DFT[x_m(n)] = DFT[x((n+m))_N R_N(n)]$$

$$= W_N^{-mk} X(k)$$

证：$DFT[x((n+m))_N R_N(n)] = DFT[\tilde{x}(n+m)R_N(n)]$

$$= DFS[\tilde{x}(n+m)]R_N(k)$$

$$= W_N^{-mk}\tilde{X}(k)R_N(k) = W_N^{-mk}X(k)$$

有限长序列的圆周移位导致频谱线性相移，而对频谱幅度无影响。

调制特性：

$$IDFT[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl} x(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} x(n)$$

证：$IDFT[X((k+l))_N R_N(k)] = IDFT[\tilde{X}(k+l) R_N(k)]$

$$= IDFS[\tilde{X}(k+l)] R_N(n)$$

$$= W_N^{nl} \tilde{x}(n) R_N(n) = W_N^{nl} x(n)$$

时域序列的调制等效于频域的圆周移位

$$DFT\left[x(n)\cos\left(\frac{2\pi nl}{N}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[X((k-l))_N+X((k+l))_N\right]R_N(k)$$

$$DFT\left[x(n)\sin\left(\frac{2\pi nl}{N}\right)\right]=\frac{1}{2j}\left[X((k-l))_N-X((k+l))_N\right]R_N(k)$$

证： $$IDFT\left\{\frac{1}{2j}\left[X((k-l))_N-X((k+l))_N\right]R_N(k)\right\}$$

$$=\frac{1}{2j}\left[W_N^{-nl}x(n)-W_N^{nl}x(n)\right]$$

$$=\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}nl}-e^{-j\frac{2\pi}{N}nl}}{2j}x(n)=x(n)\sin\frac{2\pi nl}{N}$$

3、共轭对称性

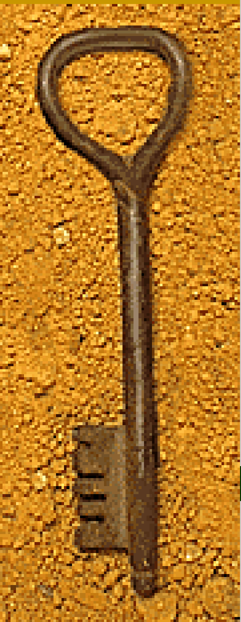
序列的Fourier变换的对称性质中提到：

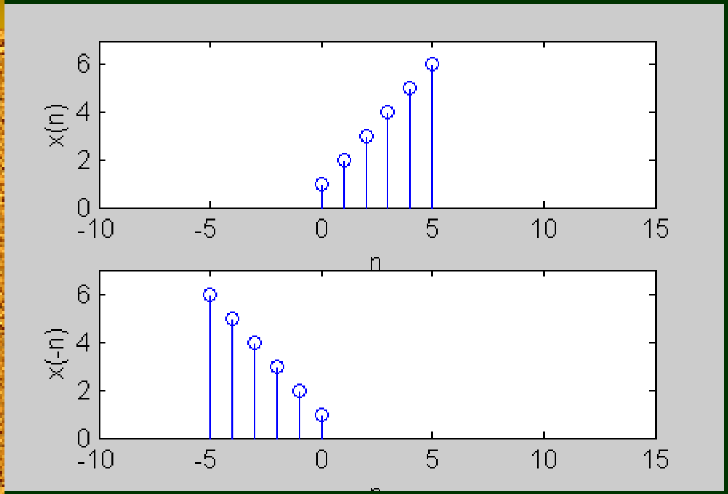
任意序列可表示成 $x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ 之和:

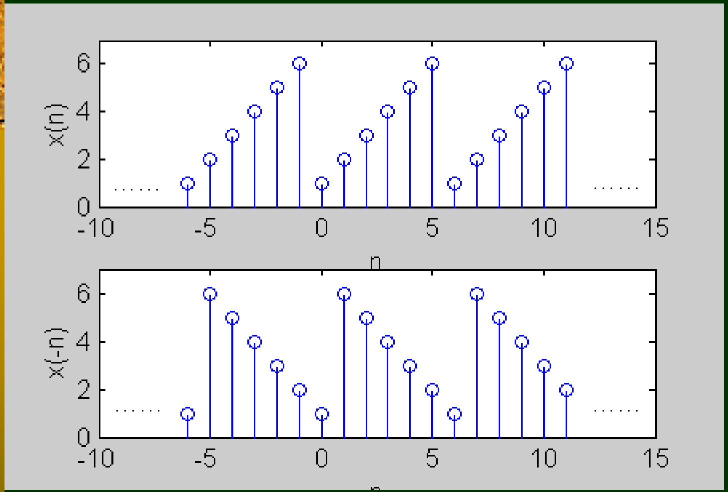
$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

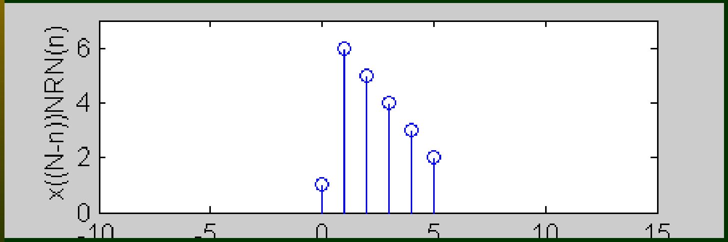
其中：$x_e(n) = x_e^*(-n) = 1/2[x(n) + x^*(-n)]$

$$x_o(n) = -x_o^*(-n) = 1/2[x(n) - x^*(-n)]$$









$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$$

$$x((n))_N$$

$$\tilde{x}_e(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)]$$

$$x^*((N-n))_N$$

任意周期序列：$\tilde{x}(n)=\tilde{x}_e(n)+\tilde{x}_o(n)$

其中：

共轭对称分量：

$$\tilde{x}_e(n)=\tilde{x}_e^*(-n)=1/2[\tilde{x}(n)+\tilde{x}^*(-n)]$$

$$=1/2[x((n))_N+x^*((N-n))_N]$$

共轭反对称分量：

$$\tilde{x}_o(n)=-\tilde{x}_o^*(-n)=1/2[\tilde{x}(n)-\tilde{x}^*(-n)]$$

$$=1/2[x((n))_N-x^*((N-n))_N]$$

定义：

圆周共轭对称序列：

$$x_{ep}(n) = \tilde{x}_e(n)R_N(n)$$

$$= 1/2[x((n))_N + x^*((N-n))_N]R_N(n)$$

圆周共轭反对称序列：

$$x_{op}(n) = \tilde{x}_o(n)R_N(n)$$

$$= 1/2[x((n))_N - x^*((N-n))_N]R_N(n)$$

则任意有限长序列：

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$$

圆周共轭对称序列满足：

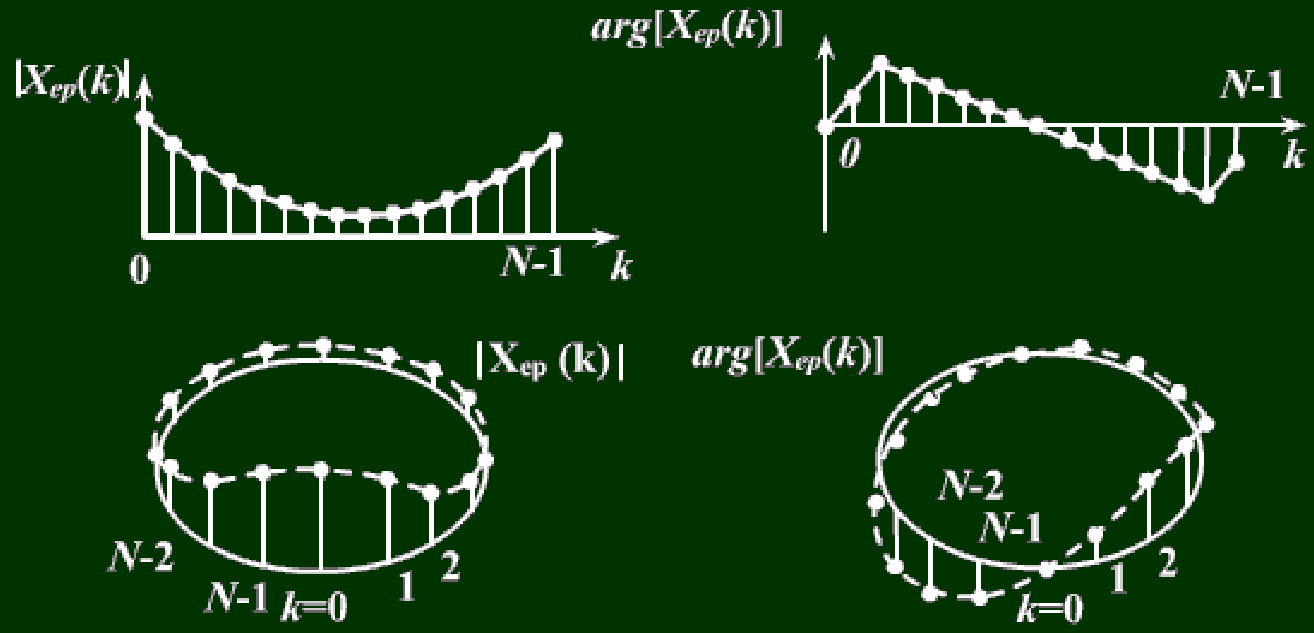
$$x_{ep}(n) = x_{ep}^*((N-n))_N R_N(n)$$

实部圆周偶对称 $\operatorname{Re}[x_{ep}(n)] = \operatorname{Re}[x_{ep}((N-n))_N R_N(n)]$

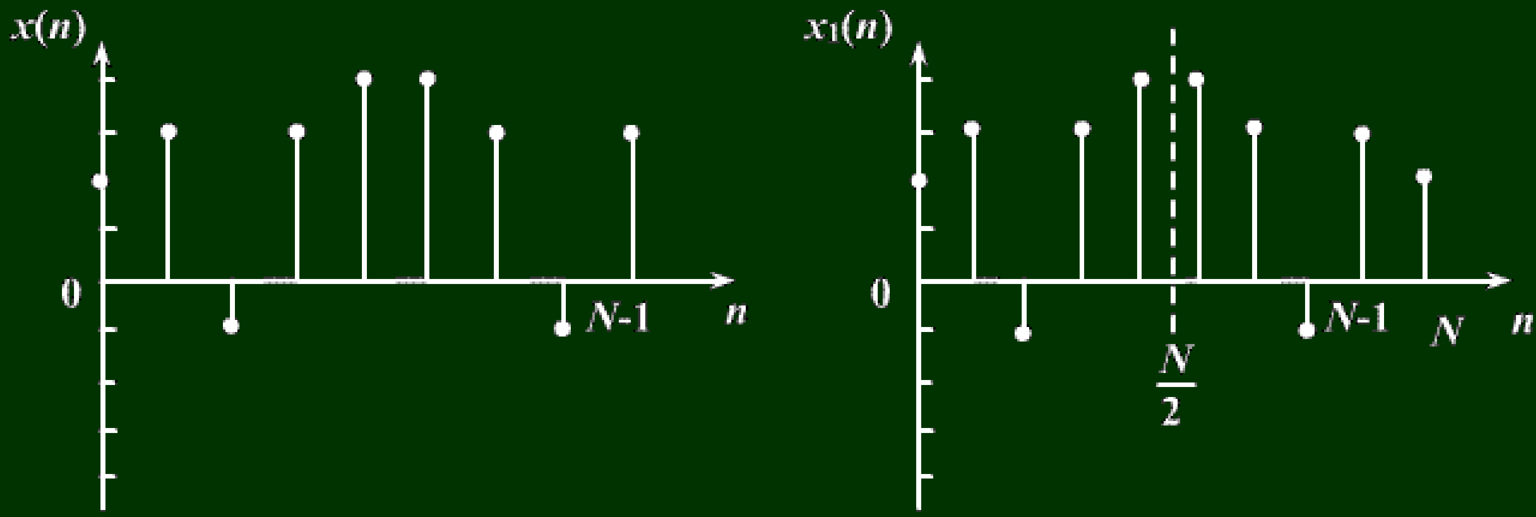
虚部圆周奇对称 $\operatorname{Im}[x_{ep}(n)] = -\operatorname{Im}[x_{ep}((N-n))_N R_N(n)]$

幅度圆周偶对称 $\left|x_{ep}(n)\right| = \left|x_{ep}((N-n))_N R_N(n)\right|$

幅角圆周奇对称 $\arg[x_{ep}(n)] = -\arg[x_{ep}((N-n))_N R_N(n)]$



|Xep(k)|
0
N-1
k
arg[Xep(k)]
N-1
0
k
|Xep (k)|
N-2
N-1
k=0
1
2
arg[Xep(k)]
N-2
N-1
k=0
1
2



(a) (b)

圆周共轭反对称序列满足：

$$x_{op}(n) = -x_{op}^{*}((N-n))_N R_N(n)$$

实部圆周奇对称 $\mathrm{Re}[x_{op}(n)] = -\mathrm{Re}[x_{op}((N-n))_N R_N(n)]$

虚部圆周偶对称 $\mathrm{Im}[x_{op}(n)] = \mathrm{Im}[x_{op}((N-n))_N R_N(n)]$

幅度圆周偶对称 $\left|x_{op}(n)\right| = \left|x_{op}((N-n))_N R_N(n)\right|$

幅角没有对称性

同理： $X(k)=X_{ep}(k)+X_{op}(k)$

其中： $X_{ep}(k)=X_{ep}^{*}((N-k))_N R_N(k)$

$$=1/2[X((k))_N+X^{*}((N-k))_N]R_N(k)$$

$$X_{op}(k)=-X_{op}^{*}((N-k))_N R_N(k)$$

$$=1/2[X((k))_N-X^{*}((N-k))_N]R_N(k)$$

共轭对称性

序列		DFT
$x(n)$	$\Leftrightarrow$	$X(k)$
$\mathrm{Re}[x(n)]$	$\Leftrightarrow$	$X_{ep}(k)$
$j\,\mathrm{Im}[x(n)]$	$\Leftrightarrow$	$X_{op}(k)$
$x_{ep}(n)$	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Re}[X(k)]$
$x_{op}(n)$	$\Leftrightarrow$	$j\,\mathrm{Im}[X(k)]$

实数序列的共轭对称性

序列		DFT
$\mathrm{Re}[x(n)]$	$\Longleftrightarrow$	$X_{ep}(k)=X(k)$
$j\,\mathrm{Im}[x(n)]=0$	$\Longleftrightarrow$	$X_{op}(k)=0$
$x_{ep}(n)$	$\Longleftrightarrow$	$\mathrm{Re}[X(k)]$
$x_{op}(n)$	$\Longleftrightarrow$	$j\,\mathrm{Im}[X(k)]$

纯虚序列的共轭对称性

序列		DFT
$\mathrm{Re}[x(n)]=0$	$\Longleftrightarrow$	$X_{ep}(k)=0$
$j\,\mathrm{Im}[x(n)]$	$\Longleftrightarrow$	$X_{op}(k)=X(k)$
$x_{ep}(n)$	$\Longleftrightarrow$	$\mathrm{Re}[X(k)]$
$x_{op}(n)$	$\Longleftrightarrow$	$j\,\mathrm{Im}[X(k)]$

例：设$x_1(n)$和$x_2(n)$都是N点的实数序列，试用一次N点DFT运算来计算它们各自的DFT:

$$DFT[x_1(n)] = X_1(k) \qquad DFT[x_2(n)] = X_2(k)$$

解：利用两序列构成一个复序列

$$w(n) = x_1(n) + jx_2(n)$$

则

$$W(k) = DFT[w(n)] = DFT[x_1(n) + jx_2(n)]$$

$$= DFT[x_1(n)] + jDFT[x_2(n)]$$

$$= X_1(k) + jX_2(k)$$

由$x_1(n)=\mathrm{Re}[w(n)]$得

$$X_1(k)=DFT[x_1(n)]=DFT\{\mathrm{Re}[w(n)]\}=W_{ep}(k)$$

$$=\frac{1}{2}[W((k))_N+W^*((N-k))_N]R_N(k)$$

由$x_2(n)=\mathrm{Im}[w(n)]$得

$$X_2(k)=DFT[x_2(n)]=DFT\{\mathrm{Im}[w(n)]\}=\frac{1}{j}W_{op}(k)$$

$$=\frac{1}{2j}[W((k))_N-W^*((N-k))_N]R_N(k)$$

例：设$x(n)$是$2N$点实数序列，试用一次N点DFT来计算$x(n)$的$2N$点DFT: $X(k)$

解：将$x(n)$按奇偶分组，令

$$x_1(n) = x(2n) \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

$$x_2(n) = x(2n+1) \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

构成一个复序列 $w(n) = x_1(n) + jx_2(n)$

对$w(n)$进行一次N点DFT运算

$$W(k) = DFT[w(n)] = X_1(k) + jX_2(k)$$

得
$$\left.\begin{aligned} X_1(k) &= W_{ep}(k) \\ X_2(k) &= \frac{1}{j} W_{op}(k) \end{aligned}\right\}$$
均为N点DFT

而$X(k)$是$2N$点DFT

?

4、复共轭序列

$$DFT[x^*(n)] = X^*((-k))_N R_N(k) = X^*((N-k))_N R_N(k)$$

证：$DFT[x^*(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{nk} R_N(k)$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk}\right]^* R_N(k) = X^*((-k))_N R_N(k)$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(N-k)n}\right]^* R_N(k)$$

$$= X^*((N-k))_N R_N(k)$$

$$DFT\left[x^*((-n))_N R_N(n)\right] = X^*(k)$$

证： $$DFT[x^*((-n))_N R_N(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x^*((-n))_N R_N(n) W_N^{nk}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x((-n))_N W_N^{-nk}\right]^*$$

$$= \left[\sum_{m=0}^{-N+1} x((m))_N W_N^{mk}\right]^* \qquad \text{令} m = -n$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x\left(\left(n\right)\right)_N W_N^{nk}\right]^*$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}\right]^* = X^*(k)$$

5、DFT形式下的Parseval定理

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$$

证：

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y(k)W_N^{-nk}\right]^*$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y^*(k)\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$$

令$y(n)=x(n)$，则

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^{*}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)X^{*}(k)$$

即：$$\sum_{n=0}^{N-1} \left|x(n)\right|^{2}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \left|X(k)\right|^{2}$$

6、圆周卷积和

设$x_1(n)$和$x_2(n)$都是点数为N的有限长序列

（若不等，分别为N_1、N_2点，则取$N \geq \max(N_1, N_2)$，对序列补零使其为N点）

$$DFT[x_1(n)] = X_1(k) \qquad DFT[x_2(n)] = X_2(k)$$

若 $Y(k) = X_1(k) \cdot X_2(k)$

则 $y(n) = IDFT[Y(k)] = [\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N] R_N(n)$

$$= [\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N] R_N(n)$$

证：由周期卷积和，若$\tilde{Y}(k)=\tilde{X}_1(k)\cdot\tilde{X}_2(k)$，

则 $\tilde{y}(n)=IDFS[\tilde{Y}(k)]$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x_1((m))_N\,x_2((n-m))_N$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N$$

$$\therefore y(n)=\tilde{y}(n)R_N(n)=[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N]R_N(n)$$

圆周卷积过程：

1）补零

2）周期延拓

3）翻褶，取主值序列

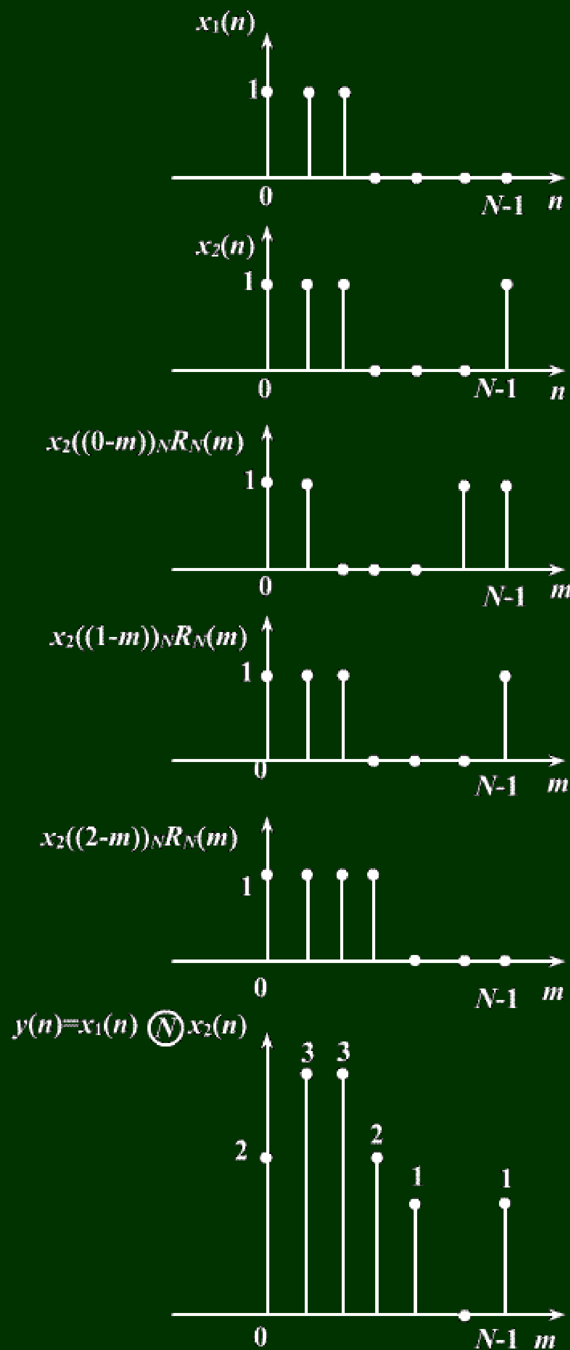
4）圆周移位

5）相乘相加

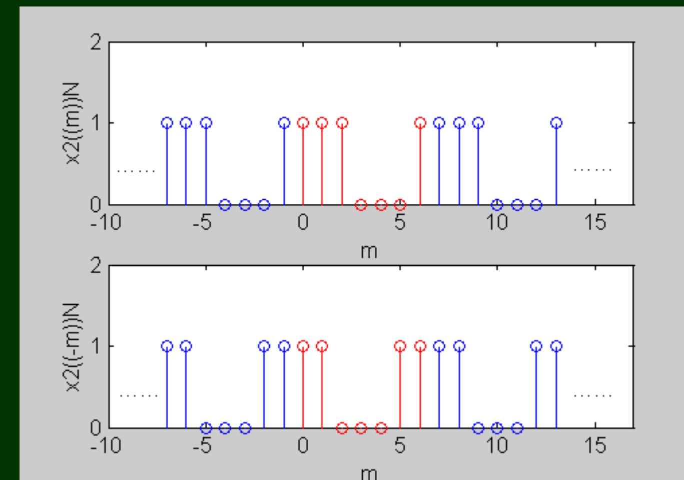
用Ⓝ表示圆周卷积和

$$y(n)=[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N]R_N(n)=x_1(n)\textcircled{N}x_2(n)$$

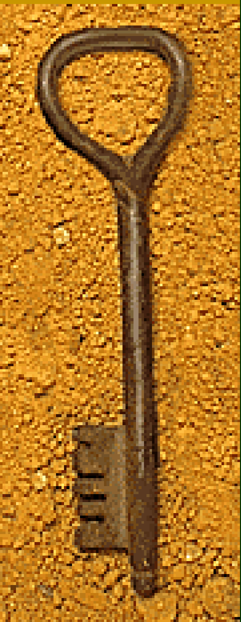
$$=[\sum_{m=0}^{N-1}x_2(m)x_1((n-m))_N]R_N(n)=x_2(n)\textcircled{N}x_1(n)$$



x1(n)
1
0
N-1 n
x2(n)
1
0
N-1 n
x2((0-m))NRN(m)
1
0
N-1 m
x2((1-m))NRN(m)
1
0
N-1 m
x2((2-m))NRN(m)
1
0
N-1 m
y(n)=x1(n) Ⓝ x2(n)
3 3
2
2
1
1
0
N-1 m



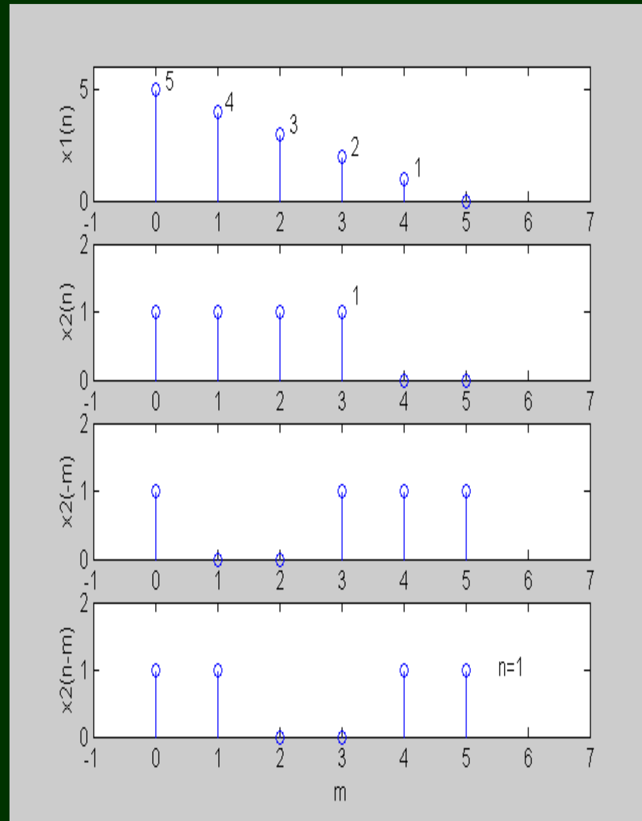
x2((m))N
2
1
0
-10 -5 0 5 10 15
m
x2((-m))N
2
1
0
-10 -5 0 5 10 15
m

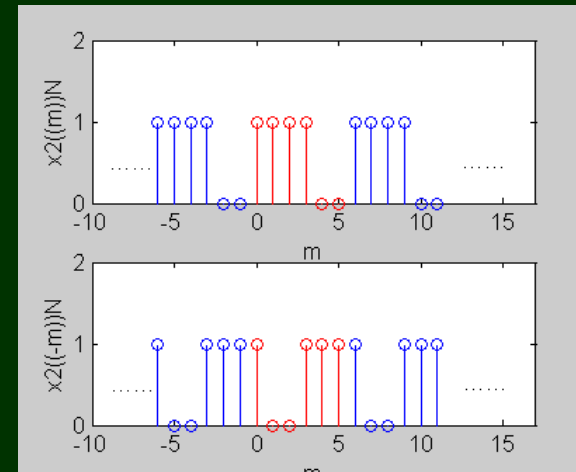


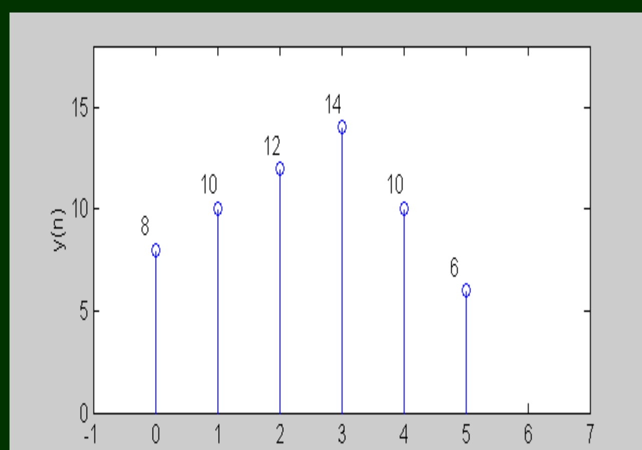
例： 已知序列 $x_1(n)=(5-n)R_5(n)$， $x_2(n)=R_4(n)$

求两个序列的6点圆周卷积和。

n/m	…-3 -2 -1	0 1 2 3 4 5	6 7…	
$x_1(n/m)$		5 4 3 2 1 0		
$x_2(n/m)$		1 1 1 1 0 0		
$x_2((m))_6$	… 1 0 0	1 1 1 1 0 0	1 1…	
$x_2((-m))_6$	… 1 1 1	1 0 0 1 1 1	1 0…	$y(n)$
$x_2((-m))_6 R_6(n)$		1 0 0 1 1 1		8
$x_2((1-m))_6 R_6(n)$		1 1 0 0 1 1		10
$x_2((2-m))_6 R_6(n)$		1 1 1 0 0 1		12
$x_2((3-m))_6 R_6(n)$		1 1 1 1 0 0		14
$x_2((4-m))_6 R_6(n)$		0 1 1 1 1 0		10
$x_2((5-m))_6 R_6(n)$		0 0 1 1 1 1		6


x1(n)
5
4
3
2
1
x2(n)
1
x2(-m)
x2(n-m)
n=1
m


x2((m))N
x2((-m))N
……
m


y(n)
8
10
12
14
10
6

同样，利用对称性

若 $y(n)=x_1(n)\cdot x_2(n)$

则 $Y(k)=DFT[y(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}y(n)W_N^{nk}$

$$=\frac{1}{N}[\sum_{l=0}^{N-1}X_1(l)X_2((k-l))_N]R_N(k)$$

$$=\frac{1}{N}[\sum_{l=0}^{N-1}X_2(l)X_1((k-l))_N]R_N(k)$$

7、有限长序列的线性卷积与圆周卷积

设：$x_1(n) \quad 0 \le n \le N_1 - 1$

$x_2(n) \quad 0 \le n \le N_2 - 1 \qquad$ 令$N \ge \max[N_1, N_2]$

N点圆周卷积：

$$y_c(n) = x_1(n) \textcircled{N} x_2(n) = [\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N] R_N(n)$$

$$= [\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N] R_N(n) = x_2(n) \textcircled{N} x_1(n)$$

线性卷积：

$$y_l(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m) x_2(n-m)$$

$$= \sum_{m=0}^{N_2-1} x_2(m) x_1(n-m) = x_2(n) * x_1(n)$$

讨论圆周卷积和线性卷积之间的关系：

对$x_1(n)$和$x_2(n)$补零，使其长度均为N点；

对$x_2(n)$周期延拓：$\tilde{x}_2(n)=x_2((n))_N=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x_2(n+rN)$

圆周卷积：
$$y_c(n)=[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N]R_N(n)$$
$$=[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)\sum_{r=-\infty}^{\infty}x_2(n+rN-m)]R_N(n)$$
$$=[\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2(n+rN-m)]R_N(n)$$
$$=[\sum_{r=-\infty}^{\infty}y_l(n+rN)]R_N(n)$$

N点圆周卷积$y_c(n)$是线性卷积$y_l(n)$以N为周期的周期延拓序列的主值序列。

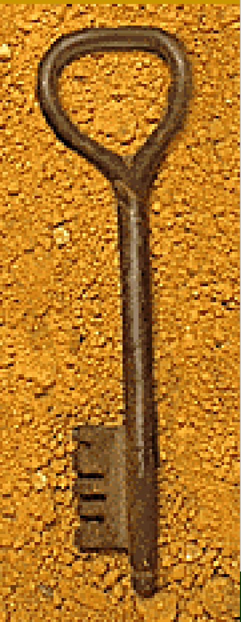
而$y_l(n)$的长度为N_1+N_2-1

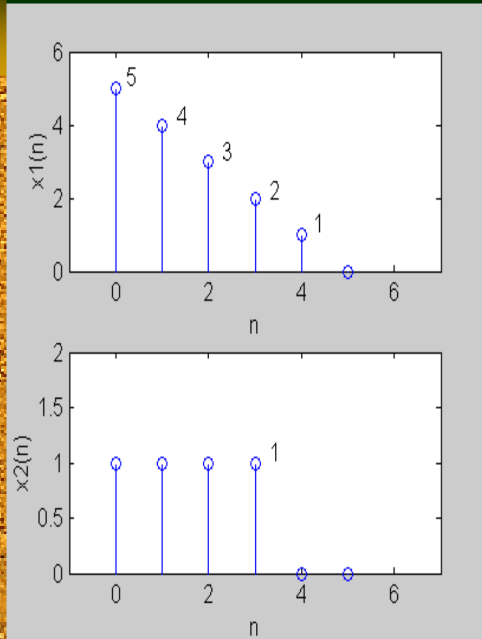
$\therefore$只有当$N \ge N_1+N_2-1$时，$y_l(n)$以N为周期进行周期延拓才无混叠现象

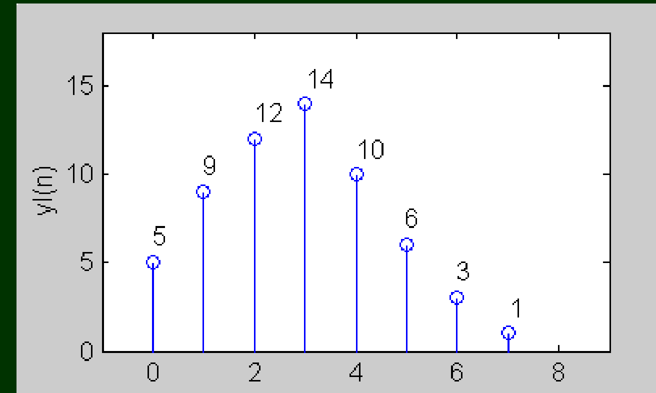
即　当圆周卷积长度$N \ge N_1+N_2-1$时，

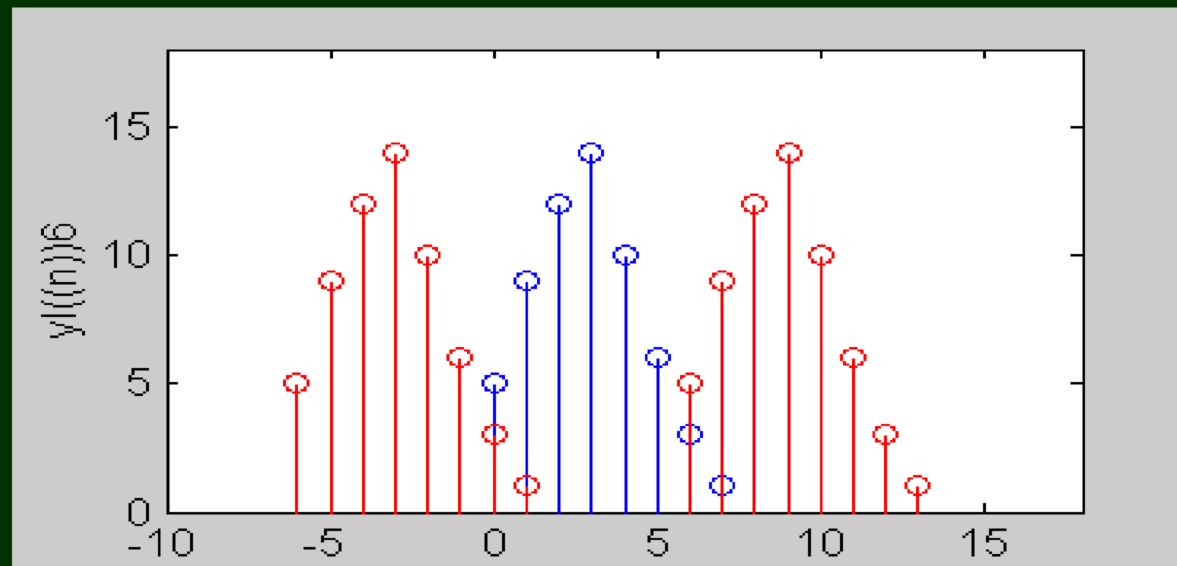
　N点圆周卷积能代表线性卷积

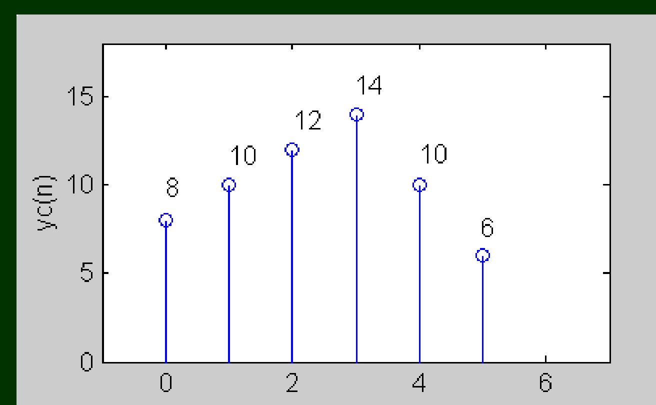
$$x_1(n) \circledN x_2(n) = x_1(n) * x_2(n) \quad \begin{cases} N \ge N_1+N_2-1 \\ 0 \le n \le N_1+N_2-2 \end{cases}$$

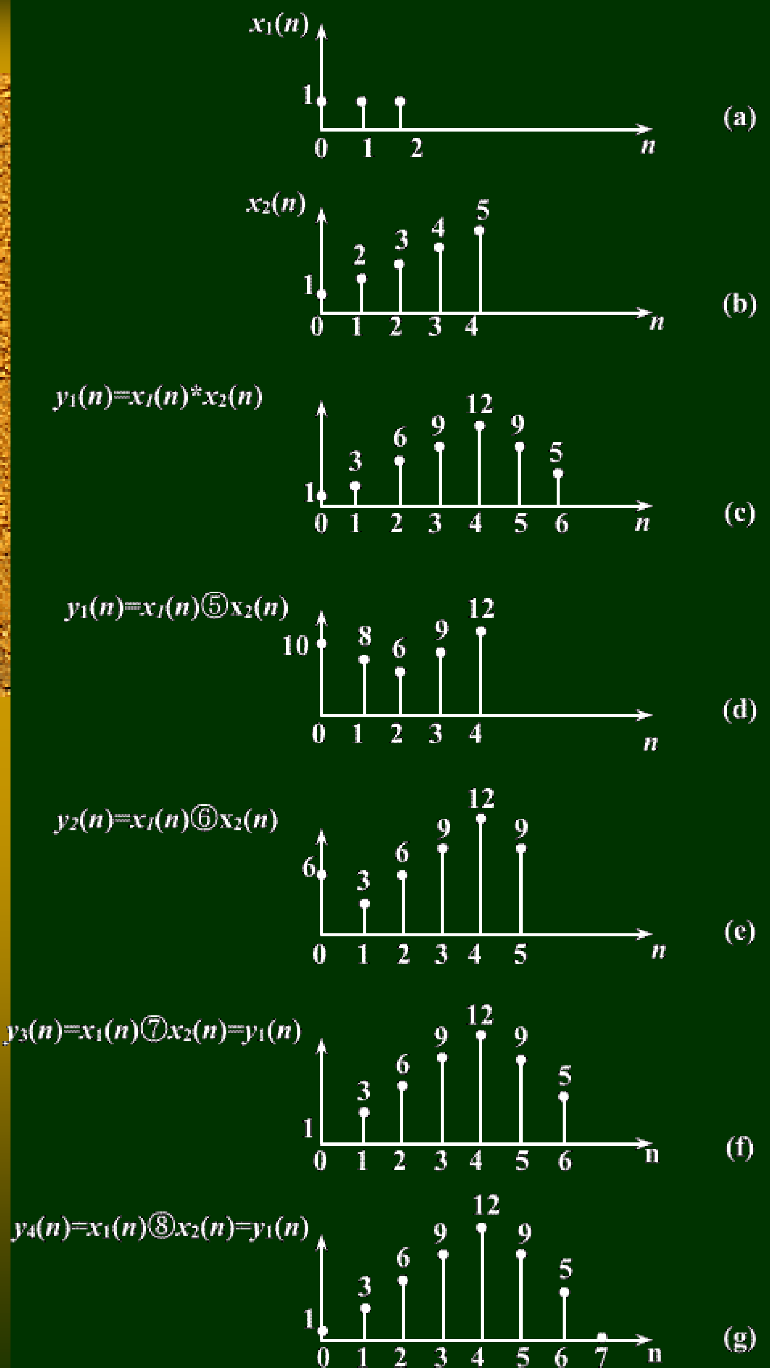



x1(n)
5
4
3
2
1
n
x2(n)
1
n

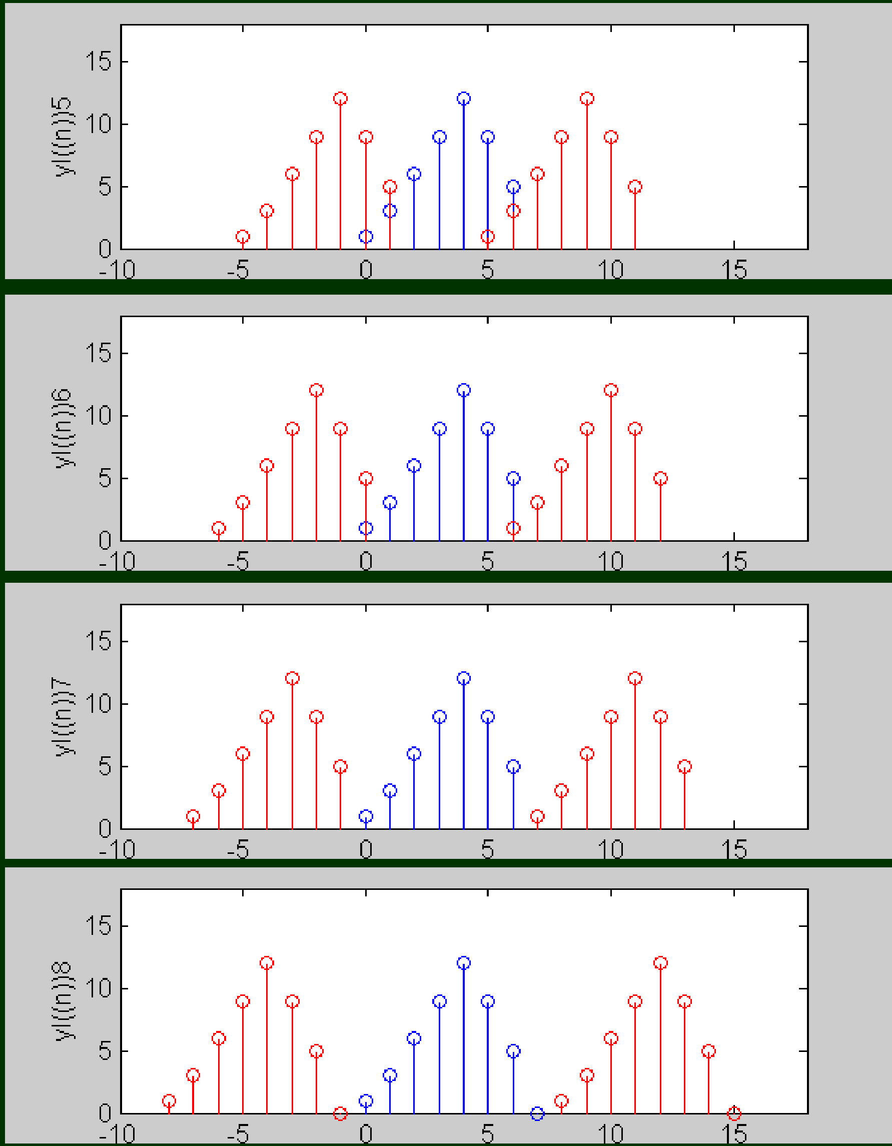

yl(n)
5
9
12
14
10
6
3
1


yl((n))6


yc(n)
8
10
12
14
10
6



$x_1(n)$
(a)
$x_2(n)$
(b)
$y_1(n)=x_1(n)*x_2(n)$
(c)
$y_1(n)=x_1(n)⑤x_2(n)$
(d)
$y_2(n)=x_1(n)⑥x_2(n)$
(e)
$y_3(n)=x_1(n)⑦x_2(n)=y_1(n)$
(f)
$y_4(n)=x_1(n)⑧x_2(n)=y_1(n)$
(g)



yl((n))5
yl((n))6
yl((n))7
yl((n))8

小结：线性卷积求解方法

- 时域直接求解

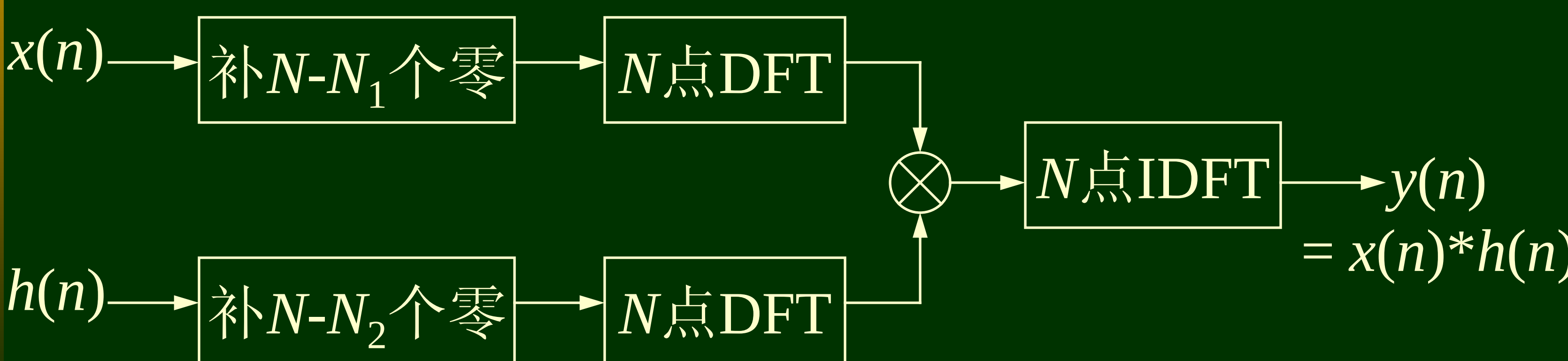
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

- z变换法

$$X(z) = ZT[x(n)] \quad H(z) = ZT[h(n)]$$

$$y(n) = IZT[Y(z)] = IZT[X(z) \cdot H(z)]$$

- DFT法



8、线性相关与圆周相关

线性相关：

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n-m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n+m)y^*(n)$$

自相关函数：

$$r_{xx}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x^*(n-m)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n+m)x^*(n)=r_{xx}^*(-m)$$

相关函数不满足交换率：

$$r_{xy}(m) \neq r_{yx}(m) = r_{xy}^{*}(-m)$$

$$\because r_{yx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x^{*}(n-m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^{*}(k)y(k+m)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^{*}(k)y[k-(-m)]$$

$$= \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y^{*}[k-(-m)] \right\}^{*}$$

$$= r_{xy}^{*}(-m) \neq r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^{*}(n-m)$$

相关函数的z变换：

$$R_{xy}(z) = X(z)Y^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

$$R_{xy}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xy}(m)z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n-m)z^{-m}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} y^*(n-m)z^{-m}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} y^*(k)z^{(k-n)}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y^*(k)z^{k} = X(z)Y^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

相关函数的频谱：

$$R_{xy}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot Y^{*}(e^{j\omega})$$

$$R_{xx}(e^{j\omega}) = \left| X(e^{j\omega}) \right|^{2}$$

圆周相关定理

若 $R_{xy}(k) = X(k) \cdot Y^*(k)$

则 $r_{xy}(m) = IDFT[R_{xy}(k)]$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} y^*(n) x((n+m))_N R_N(n)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*((n-m))_N R_N(n)$$

证：先延拓成周期序列 $\tilde{R}_{xy}(k)=\tilde{X}(k)\cdot\tilde{Y}^*(k)$

则 $\tilde{r}_{xy}(m)=IDFS[\tilde{R}_{xy}(k)]=\dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{Y}^*(k)\tilde{X}(k)W_N^{-mk}$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{Y}^*(k)\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}W_N^{-mk}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{Y}^*(k)W_N^{(n-m)k}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\tilde{y}^*(n-m)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{y}^*(n)\tilde{x}(n+m)$$

则取主值序列 $r_{xy}(m)=\sum_{n=0}^{N-1}y^*(n)x((n+m))_N R_N(n)$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y^*((n-m))_N R_N(n)$$

类似于线性卷积与圆周卷积之间的关系

当 $N \geq N_1 + N_2 - 1$ 时，

圆周相关可完全代表线性相关

六、*抽样z变换—频域抽样理论*

时域抽样定理：在满足奈奎斯特定理条件下，时域抽样信号可以不失真地还原原连续信号。

频域抽样呢？　　抽样条件？　　内插公式？

任意绝对可和的非周期序列$x(n)$，其z变换：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

对$X(z)$在单位圆上N点等间隔抽样，得周期序列：

$$\tilde{X}(k)=X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)W_N^{nk}$$

分析：$\tilde{X}(k)\rightarrow x(n)$??

令$\tilde{x}_N(n)$为$\tilde{X}(k)$的$IDFS$:

$$\tilde{x}_N(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)W_N^{mk}]W_N^{-nk}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}]$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}=\begin{cases}1 & m=n+rN \quad r\text{为任意整数}\\ 0 & \text{其它}m\end{cases}$$

由频域抽样序列$\tilde{X}(k)$还原得到的周期序列是原非周期序列$x(n)$的周期延拓序列，其周期为频域抽样点数N。

所以：时域抽样造成频域周期延拓

同样，频域抽样造成时域周期延拓

- x(n)为无限长序列—混叠失真
- x(n)为有限长序列，长度为M

  1）$N \geq M$，不失真

  2）$N < M$，混叠失真

频率采样定理

若序列长度为M，则只有当频域采样点数:

$$N \geq M$$

时，才有

$$\tilde{x}_N(n)R_N(n) = IDFS[\tilde{X}(k)]R_N(n) = x(n)$$

即可由频域采样$X(k)$不失真地恢复原信号 $x(n)$，否则产生时域混叠现象。

用频域采样 $X(k)$ 表示 $X(z)$ 的内插公式

M 点有限长序列 $x(n)$，频域 N 点等间隔抽样，且

$$N \ge M$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-1} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \right] z^{-n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-nk} z^{-n} \right]$$

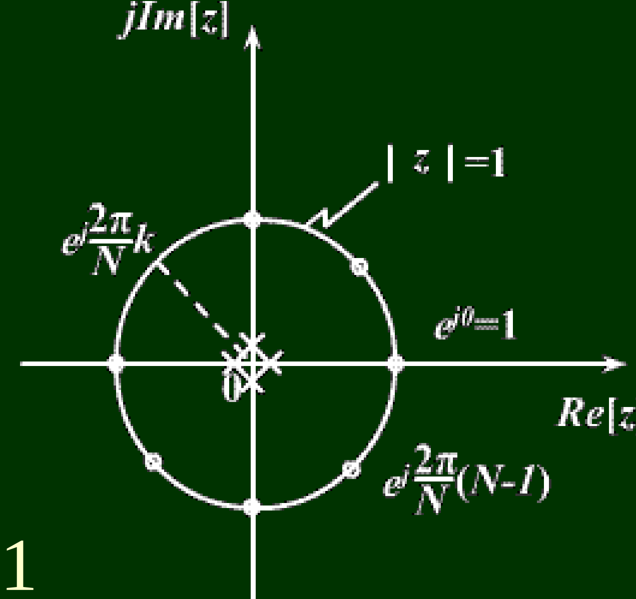
$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - W_N^{-Nk} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

内插公式：$X(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$

内插函数：$\Phi_k(z)=\frac{1}{N}\cdot\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$

则内插公式简化为：

$$X(z)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi_k(z)$$



零点：$z=e^{j\frac{2\pi}{N}r}$，$r=0,1,\ldots,N-1$

极点：$z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}$，　0 $(N\text{-}1)$阶

用频域采样 $X(k)$ 表示$X(e^{j\omega})$的内插公式

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\Phi_k(e^{j\omega})$$

$$\Phi_k(e^{j\omega}) = \Phi_k(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\left[N\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)} e^{j\frac{k\pi}{N}(N-1)} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

内插函数：

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$$

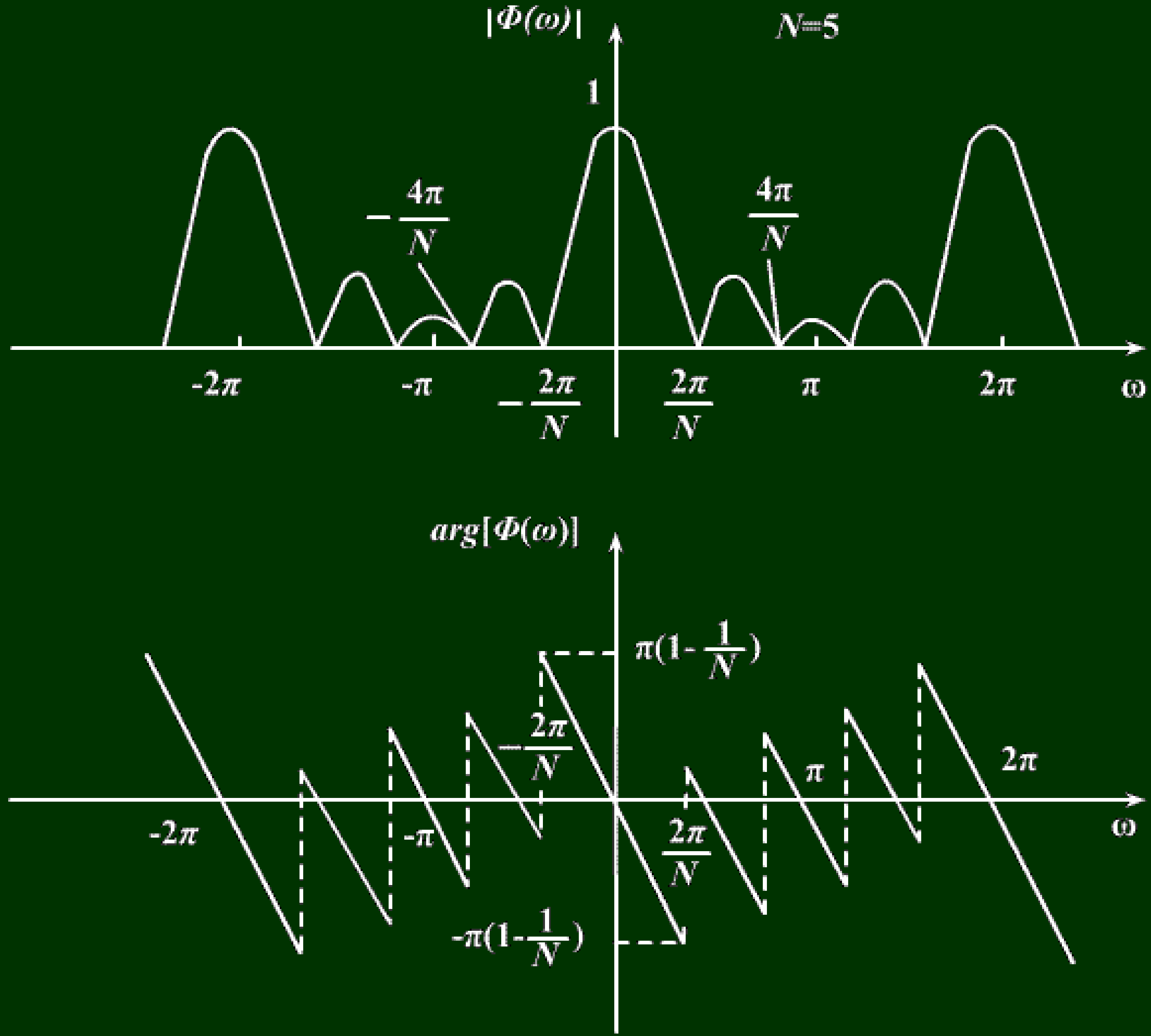
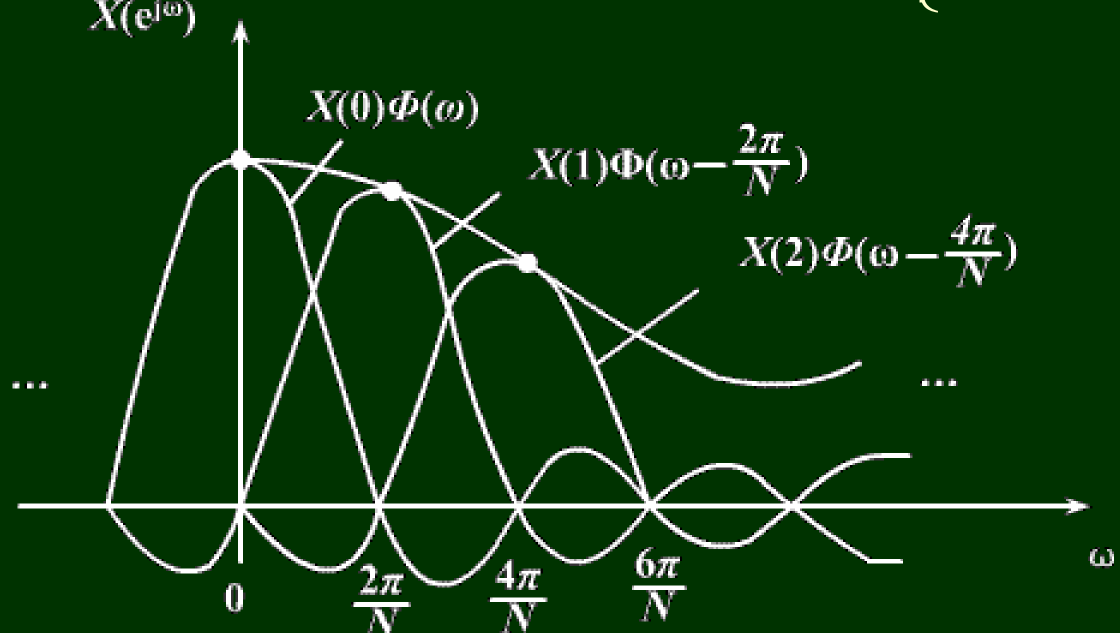


图3-13 插值函数 $\Phi(\omega)$的幅度特性与相位特性(N=5)

内插公式:

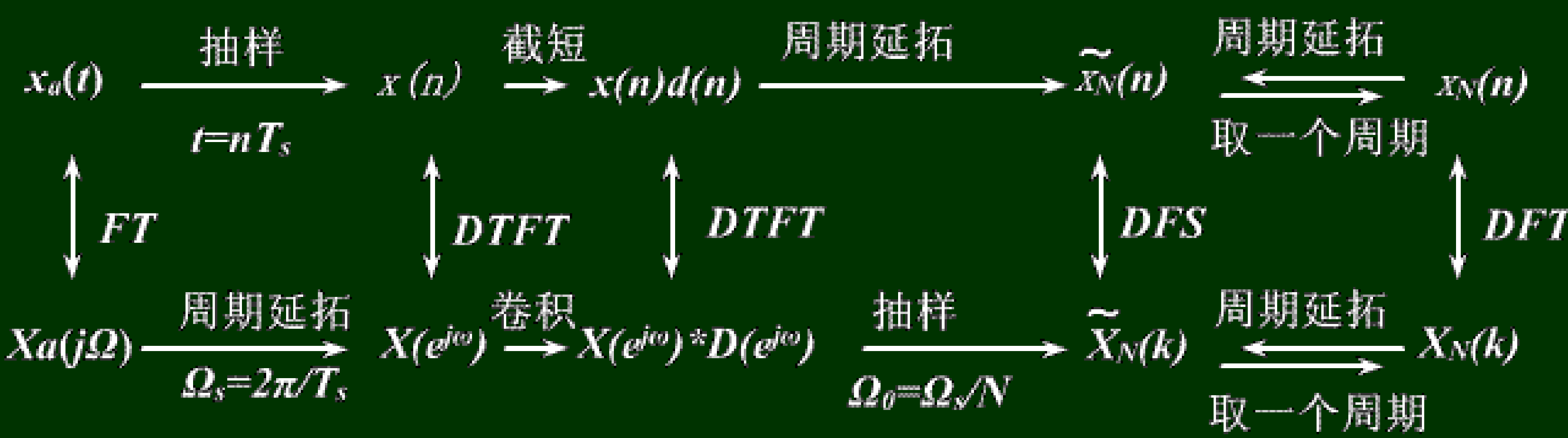
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\Phi(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

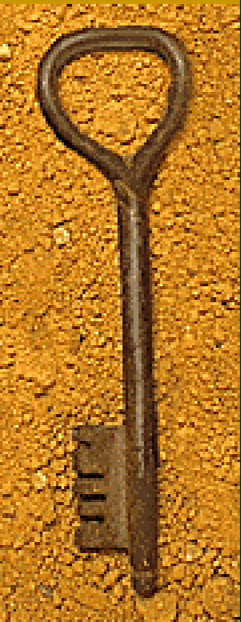
$$\Phi(\omega - \frac{2\pi}{N}k) = \begin{cases} 1 & \omega = \frac{2\pi}{N}k = \omega_k \\ 0 & \omega = \frac{2\pi}{N}i = \omega_i \quad i \neq k \end{cases}$$

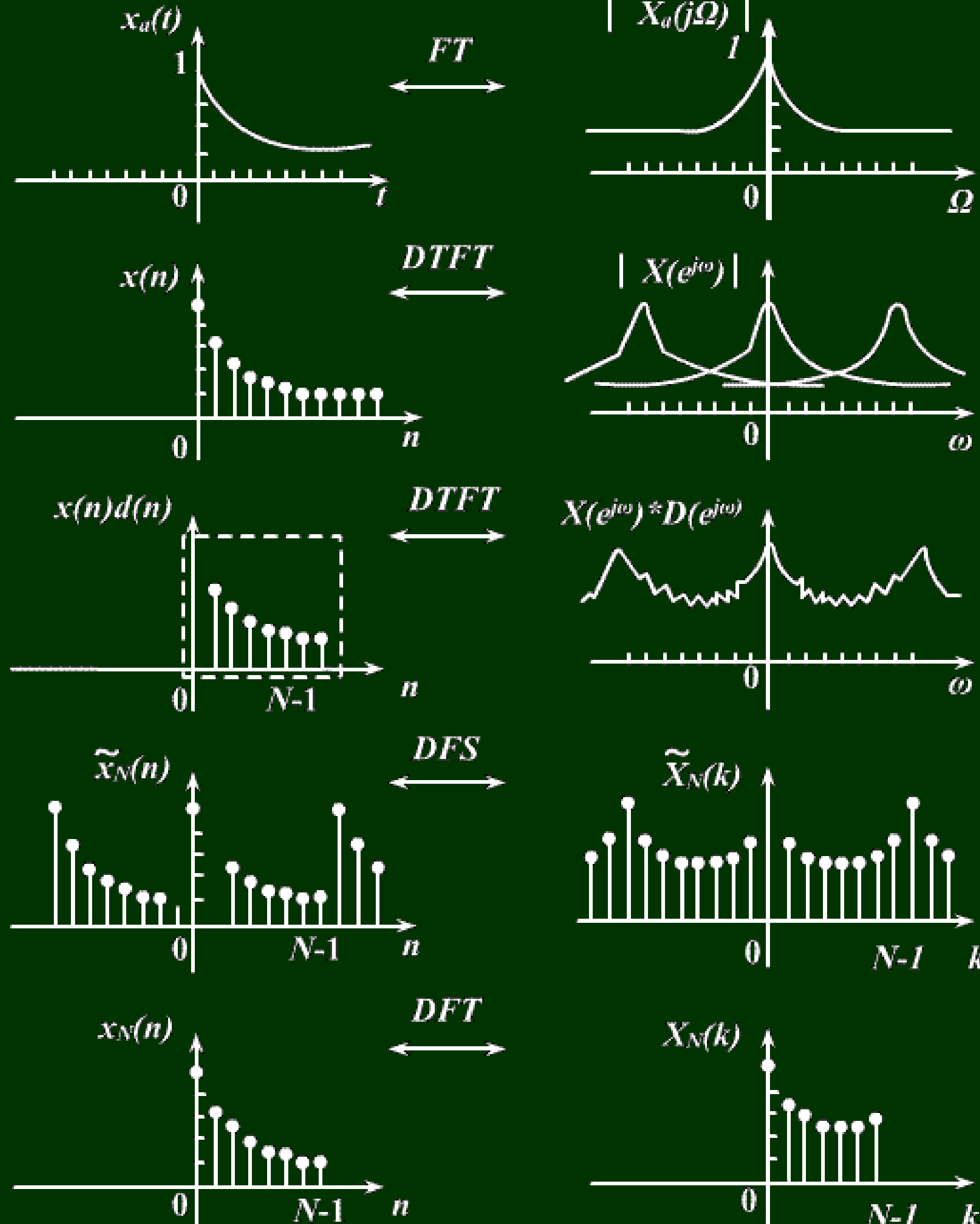


七、用DFT对模拟信号作频谱分析

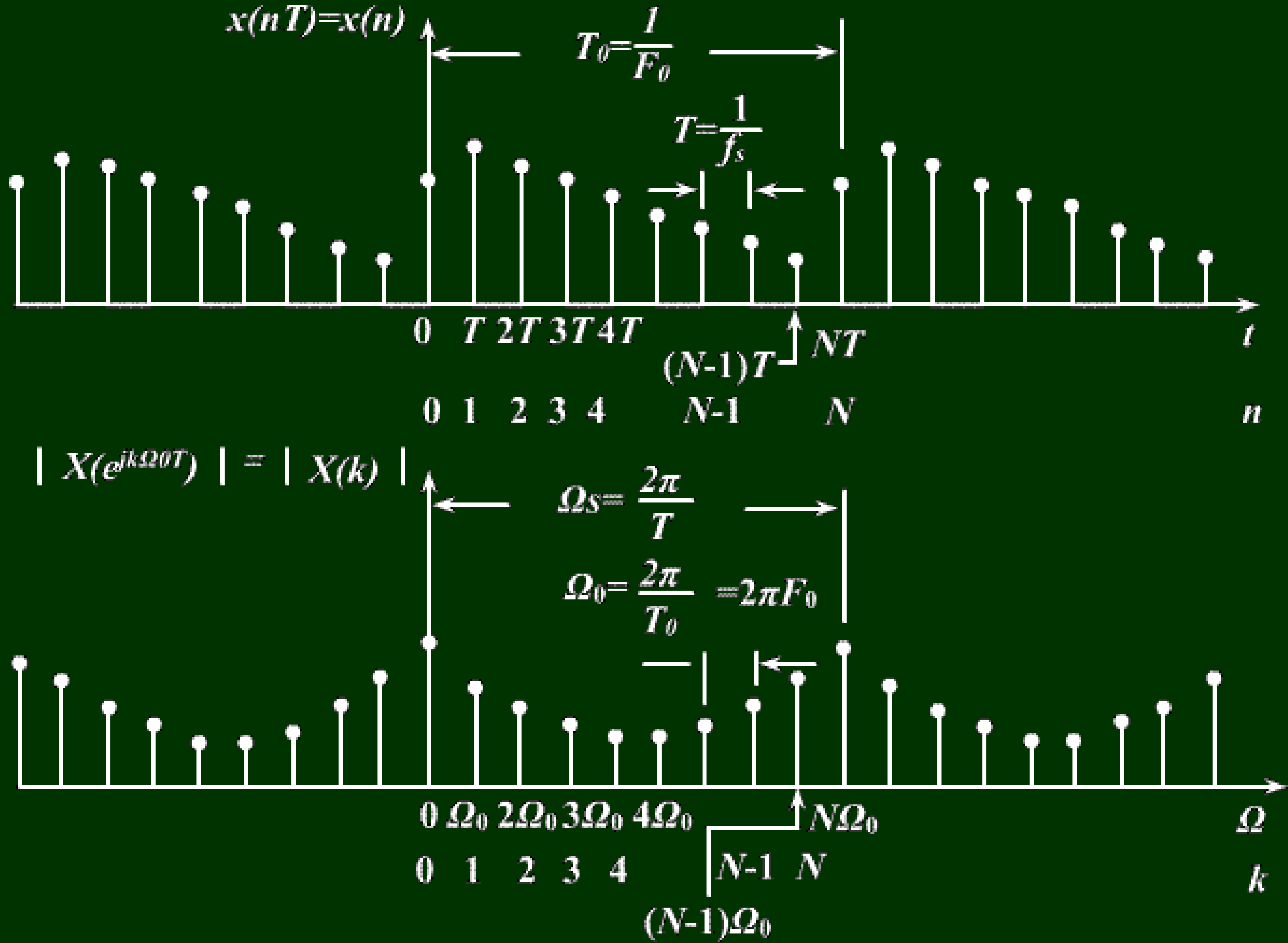
信号的频谱分析：计算信号的傅里叶变换







$x_a(t)$
FT
$|X_a(j\Omega)|$
1
0
t
Ω
$x(n)$
DTFT
$|X(e^{j\omega})|$
n
ω
$x(n)d(n)$
DTFT
$X(e^{j\omega})*D(e^{j\omega})$
N-1
$\tilde{x}_N(n)$
DFS
$\tilde{X}_N(k)$
k
$x_N(n)$
DFT
$X_N(k)$



x(nT)=x(n)
T0=1/F0
T=1/fs
0 T 2T 3T 4T
(N-1)T
NT
t
0 1 2 3 4 N-1 N
n
| X(e^jkΩ0T) | = | X(k) |
ΩS= 2π/T
Ω0= 2π/T0 =2πF0
0 Ω0 2Ω0 3Ω0 4Ω0
NΩ0
Ω
0 1 2 3 4 N-1 N
k
(N-1)Ω0

T – 时域采样间隔

f_s – 时域采样频率

T_0 – 信号记录长度

F_0 –（频率分辨率）频域采样间隔

N – 采样点数

f_h – 信号最高频率

$$f_s \geq 2 f_h \qquad f_s = 1/T \qquad T_0 = 1/F_0$$

$$f_s = NF_0 \quad T_0 = NT$$

$$N = \frac{T_0}{T} = \frac{f_s}{F_0}$$

对连续时间非周期信号的DFT逼近

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X\left(j\Omega\right)e^{j\Omega t}d\Omega$$

1）将 $x(t)$ 在 t 轴上等间隔（T）分段

$$t\to nT \qquad dt\to T \qquad \int_{-\infty}^{\infty}dt\to\sum_{n=-\infty}^{\infty}T$$

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt\approx\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)e^{-j\Omega nT}\cdot T$$

2）将 $x(n)$ 截短成有限长序列 $t=0\sim T_0$，N 个时域抽样点

$$X(j\Omega)\approx T\sum_{n=0}^{N-1}x(nT)e^{-j\Omega nT}$$

3）频域抽样：一个周期分N段，采样间隔F_0，时域周期延拓周期为:

$$T_0 = 1/F_0 \qquad \Omega_0 = 2\pi F_0$$

$$X(jk\Omega_0) \approx T\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jk\Omega_0 nT} \qquad \Omega = k\Omega_0$$

$$= T\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \qquad \Omega_0 T = 2\pi F_0 / f_s = 2\pi / N$$

$$= T \cdot DFT[x(n)]$$

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\Omega_s} X(j\Omega)e^{j\Omega nT}d\Omega \qquad d\Omega \to \Omega_0$$

$$\approx \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 nT}\cdot\Omega_0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \to \sum_{k=0}^{N-1}\Omega_0$$

$$= F_0\sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\cdot N\cdot\frac{1}{N} = f_s\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= 1/T \cdot IDFT[X(jk\Omega_0)]$$

对连续时间非周期信号的DFT逼近过程

1）时域抽样

2）时域截断

3）频域抽样

近似逼近：$X(jk\Omega_0) \approx T \cdot DFT[x(n)]$

$$x(n) \approx \frac{1}{T} IDFT[X(jk\Omega_0)]$$

对连续时间周期信号的DFS逼近

$$X(jk\Omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

1）将 $x(t)$ 在 t 轴上等间隔（T）分段

$$t\rightarrow nT \qquad dt\rightarrow T \qquad \int_0^{T_0}dt\rightarrow\sum_{n=0}^{N-1}T$$

$$X(jk\Omega_0)\approx\frac{1}{T_0}\sum_{n=0}^{N-1}x(nT)e^{-jk\Omega_0 nT}\cdot T$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \qquad \Omega_0 T=2\pi/N$$

$$=\frac{1}{N}\cdot DFS[x(n)] \qquad T_0=NT$$

2）频域截断：长度正好等于一个周期

$$x(nT) \approx \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 nT}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = N \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= N \cdot IDFS[X(jk\Omega_0)]$$

近似逼近：$X(jk\Omega_0) \approx \frac{1}{N} \cdot DFS[x(n)]$

$$x(n) \approx N \cdot IDFS[X(jk\Omega_0)]$$

频率响应的混叠失真及参数的选择

时域抽样：$f_s \geq 2f_h$

频域抽样：$F_0 = 1/T_0$

$$N = \frac{T_0}{T} = \frac{f_s}{F_0}$$

信号最高频率与频率分辨率之间的矛盾

$$N=\frac{T_0}{T}=\frac{f_s}{F_0}$$

要增加信号最高频率$f_h\uparrow$　则$f_s\uparrow$

当N给定　F_0必↑，即分辨率↓

要提高频率分辨率，即$F_0\downarrow$　则$T_0=\dfrac{1}{F_0}\uparrow$

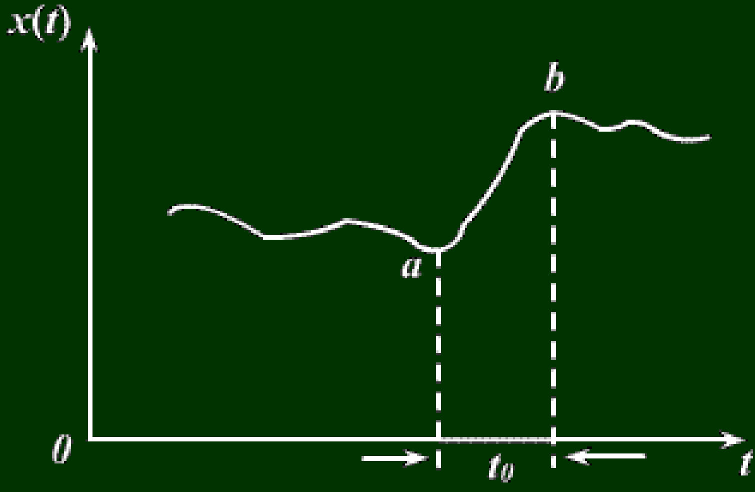
当N给定　则$T\uparrow$　$f_s\downarrow$　要不产生混叠，f_h必↓

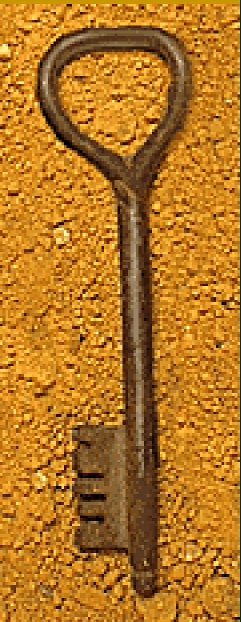
同时提高信号最高频率和频率分辨率，需增加采样点数N。

信号最高频率f_h的确定

$$t_0 = T_h / 2$$

$$f_h = \frac{1}{T_h} = \frac{1}{2t_0}$$





例：有一频谱分析用的FFT处理器，其抽样点数必须是2的整数幂，假设没有采用任何的数据处理措施，已给条件为：

1）频率分辨率$\le 10Hz$

2）信号最高频率$\le 4kHz$

试确定以下参量：

1）最小记录长度T_0

2）抽样点间的最大时间间隔T（即最小抽样频率）

3）在一个记录中最少点数N

解： 1）最小记录长度：

$$T_0 \geq \frac{1}{F_0} = \frac{1}{10} = 0.1s$$

2）最大抽样间隔 （$f_s > 2f_h \quad f_s = 1/T$）

$$T < \frac{1}{2f_h} = \frac{1}{2 \times 4 \times 10^3} = 0.125ms$$

3）最小记录点数

$$N > \frac{2f_h}{F_0} = \frac{2 \times 4 \times 10^3}{10} = 800$$

取$N = 2^m = 2^{10} = 1024 > 800$

1-14 有一调幅信号

$$x_a(t)=\left[1+\cos(2\pi\times100t)\right]\cos(2\pi\times600t)$$

用DFT做频谱分析，要求能分辨 $x_a(t)$ 的所有频率分量，问

(1)抽样频率应为多少赫兹（Hz）？

(2)抽样时间间隔应为多少秒（Sec）？

(3)抽样点数应为多少点？

(4)若用 $f_s=3\text{kHz}$ 频率抽样，抽样数据为512点，做频谱分析，求 $X(k)=DFT[x(n)]$，512点，并粗略画出 $X(k)$ 的幅频特性 $|X(k)|$ ，标出主要点的坐标值。

解:

$$x_a(t) = \left[1 + \cos\left(2\pi \times 100t\right)\right]\cos\left(2\pi \times 600t\right)$$

$$= \cos\left(2\pi \times 600t\right)$$

$$+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi \times 700t\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi \times 500t\right)$$

（1）抽样频率应为　$f_s \geq 2 \times 700 = 1400Hz$

（2）抽样时间间隔应为

$$T \leq \frac{1}{f_s} = \frac{1}{1400} = 0.00072Sec = 0.72ms$$

(3) $x(n) = x_a(t)\Big|_{t=nT}$

$$= \cos\left(2\pi \times \frac{6}{14} n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi \times \frac{7}{14} n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi \times \frac{5}{14} n\right)$$

$x(n)$为周期序列，周期$N = 14$

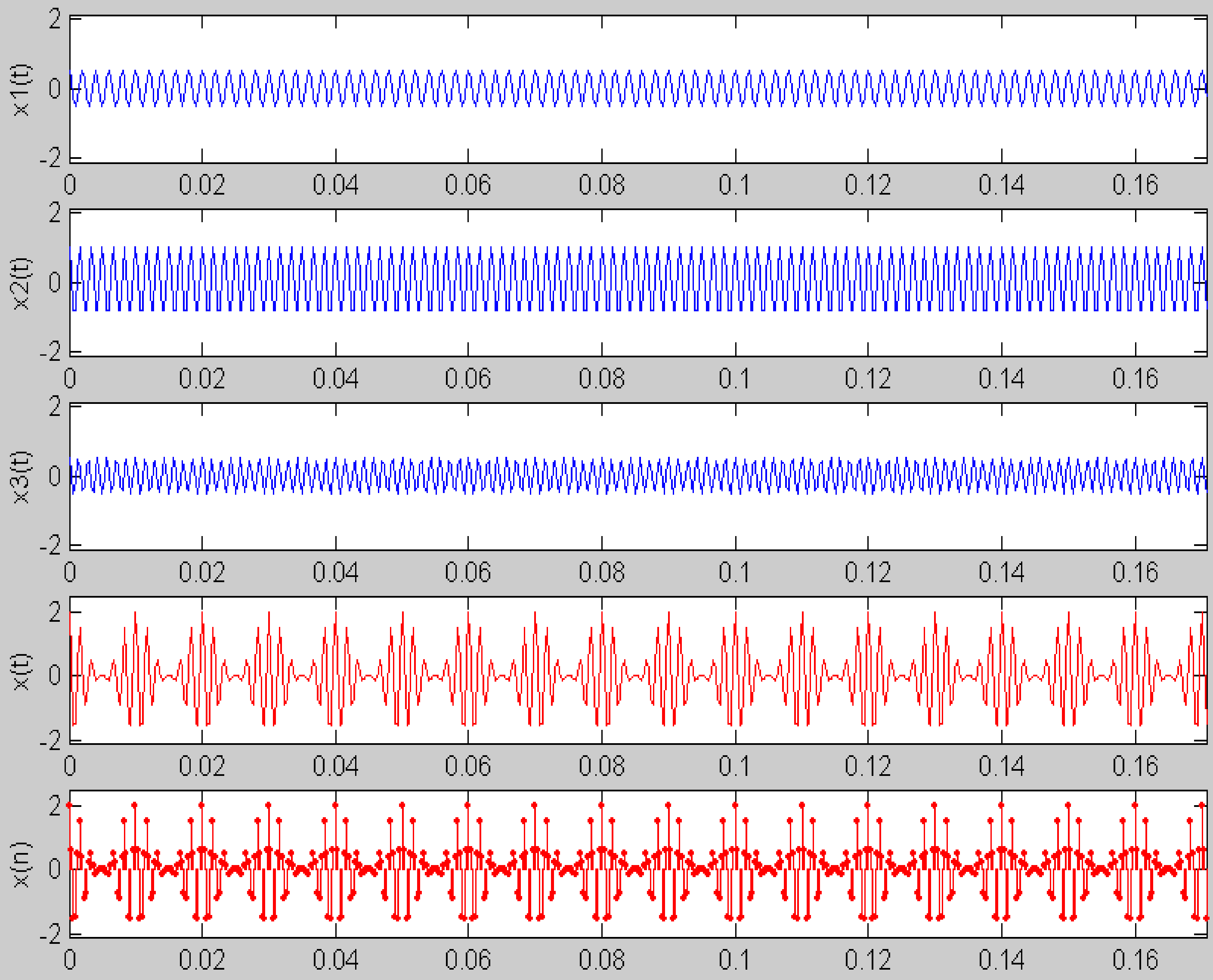
$\therefore$抽样点数至少为14点

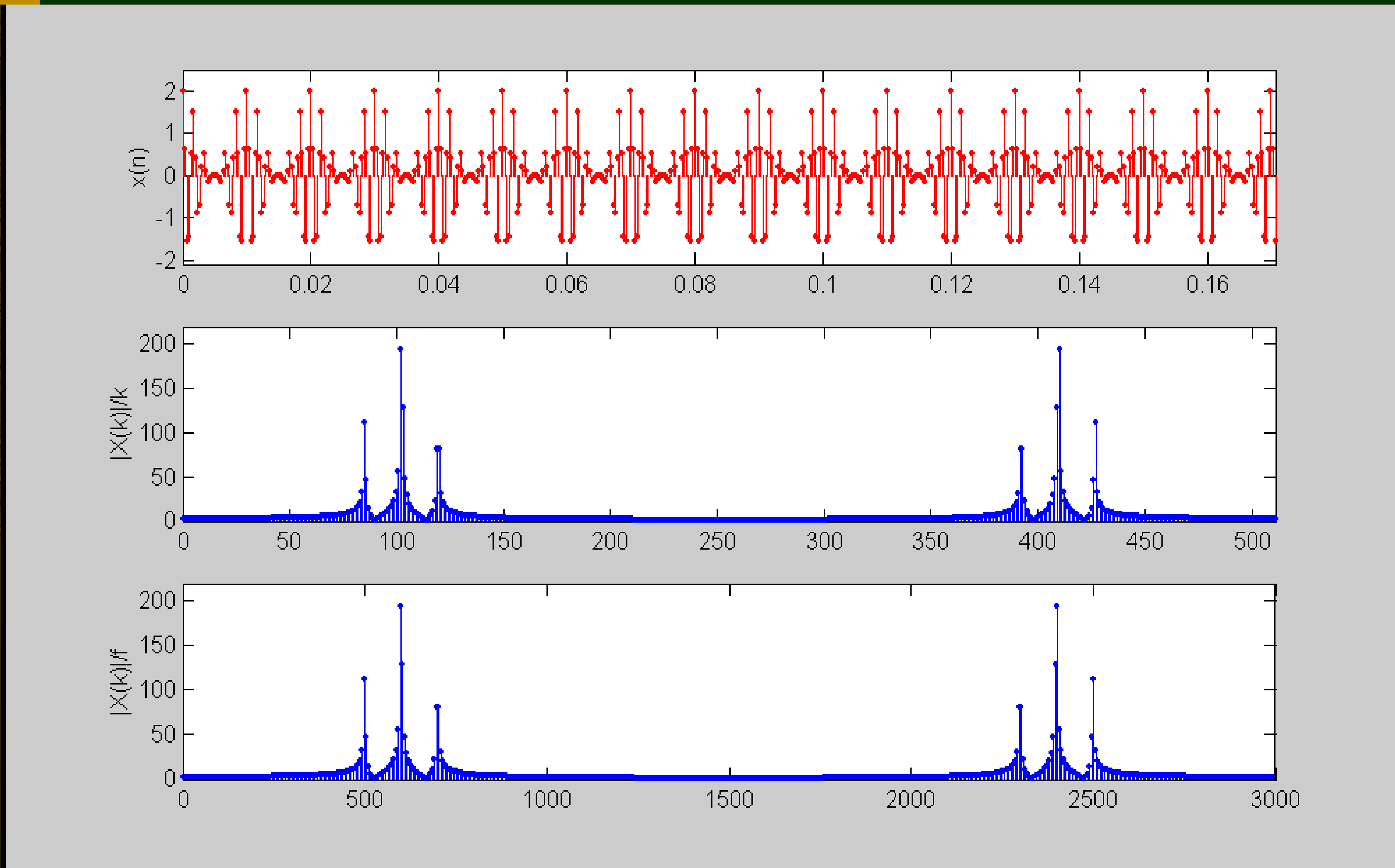
或者因为频率分量分别为500、600、700Hz

得 $F_0 = 100\text{Hz}$

$$N = f_s / F_0 = 1400/100 = 14$$

$\therefore$最小记录点数$N = 14$


x1(t)
x2(t)
x3(t)
x(t)
x(n)
2
0
-2
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0.12
0.14
0.16



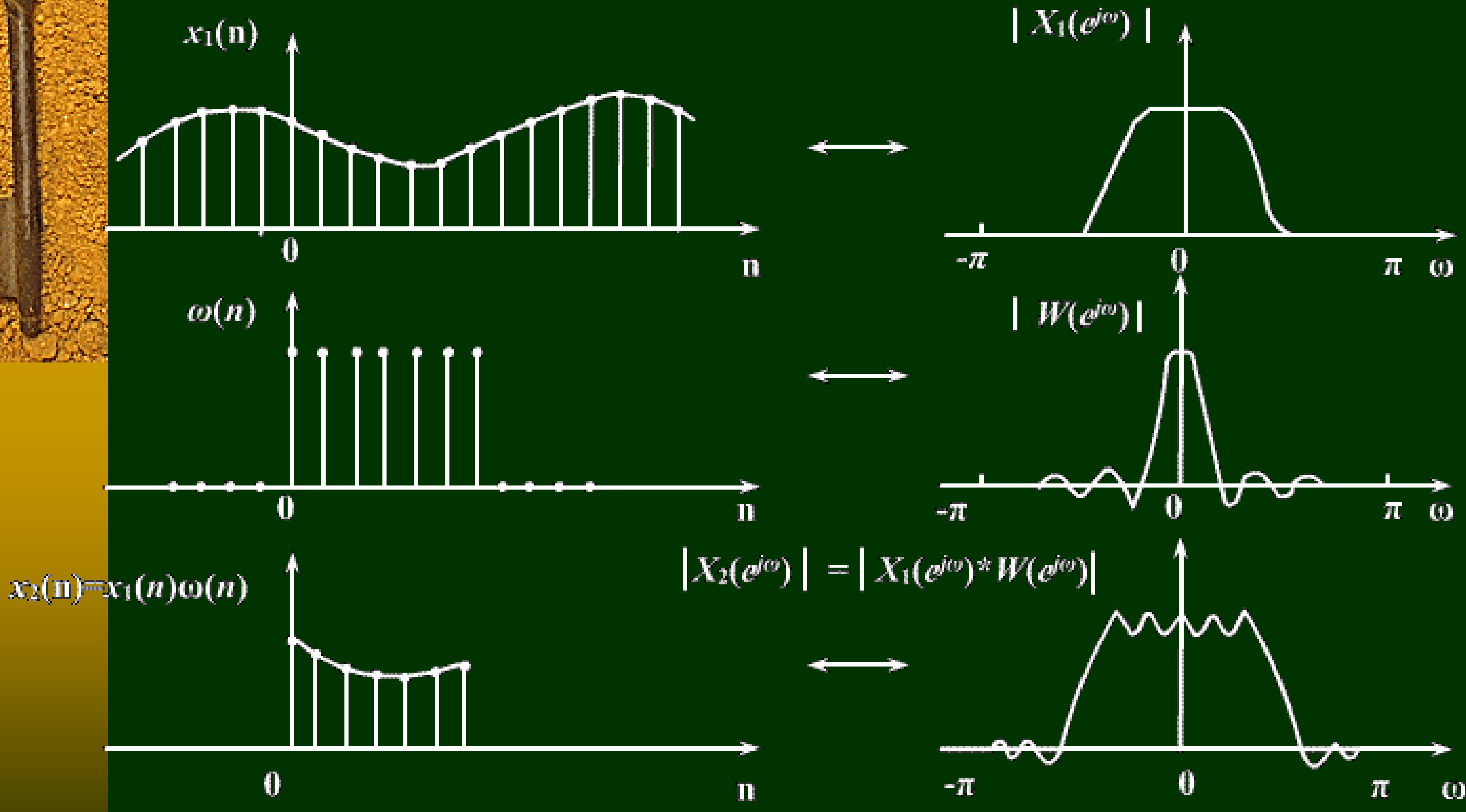
$$\omega = \Omega T = 2\pi f / f_s$$

$$\omega = 2\pi k / N$$

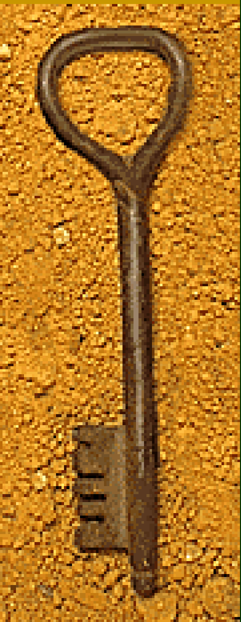
$$f = f_s * k / N$$

频谱泄漏

对时域截短，使频谱变宽拖尾，称为泄漏

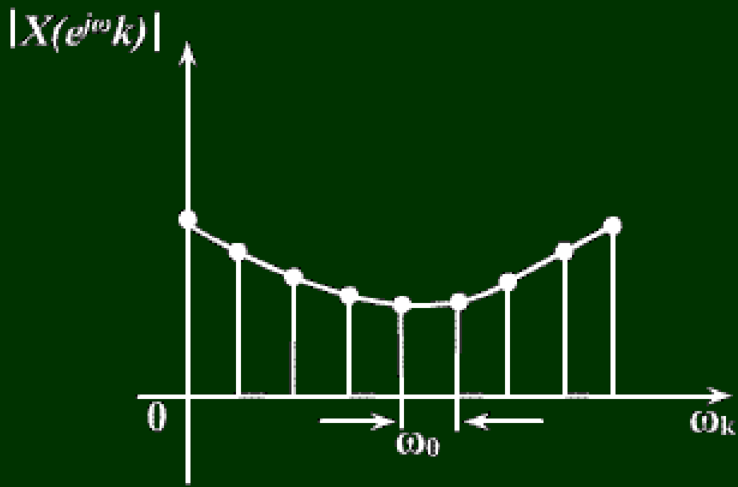


改善方法：　1）增加$x(n)$长度　2）缓慢截短



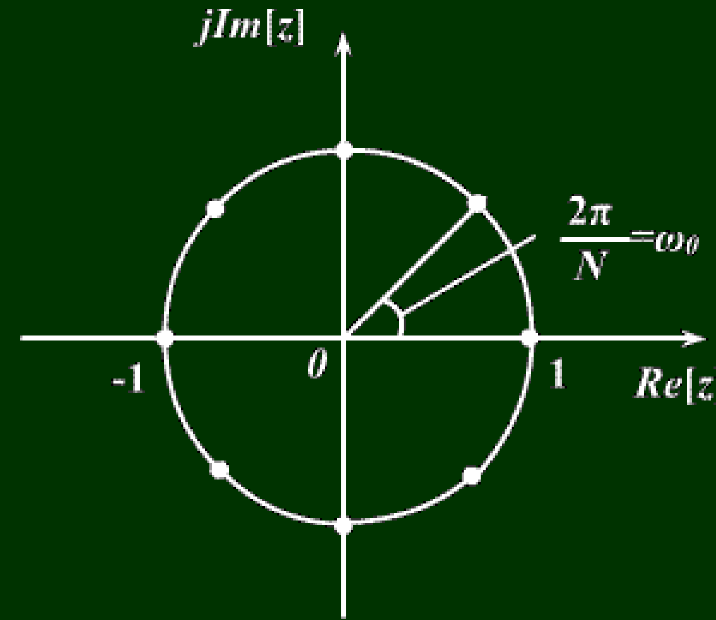
栅栏效应

DFT只计算离散点（基频F_0的整数倍处）的频谱，而不是连续函数



(a) $\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\Omega_0}{f_s} = \frac{2\pi F_0}{f_s}$

$F_0 = \frac{f_s}{N}$



(b)

改善方法：

增加频域抽样点数N（时域补零），使谱线更密

频率分辨率

$$F_0 = 1/T_0$$

提高频率分辨率方法：

增加信号实际记录长度

补零并不能提高频率分辨率

八、序列的抽取与插值

信号时间尺度变换（抽样频率的变换）

抽取：减小抽样频率

插值：加大抽样频率

1、序列的抽取

将$x(n)$的抽样频率减小D倍

每D个抽样中取一个，D为整数，称为抽样因子

相当于抽样间隔增加D倍后对时域连续信号的抽样

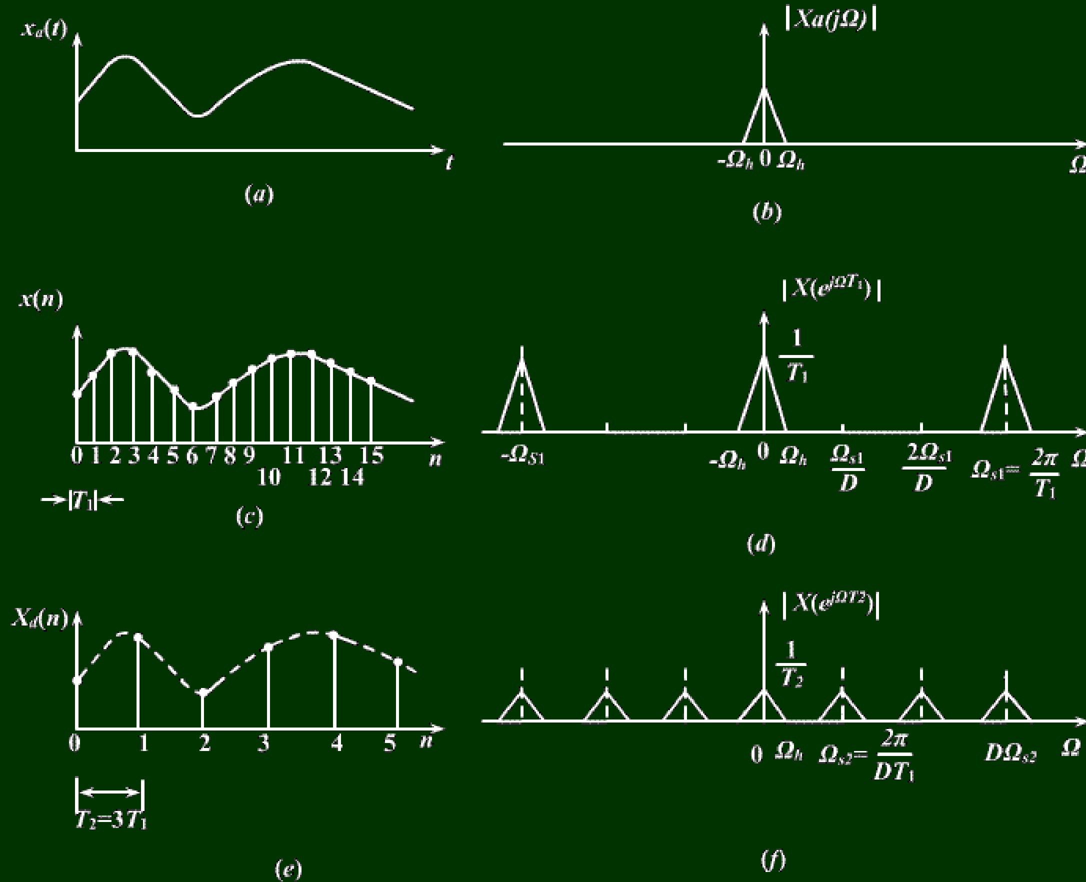
$$T^{'} = DT \qquad \Omega_s^{'} = \frac{2\pi}{T^{'}} = \frac{2\pi}{DT} = \frac{\Omega_s}{D}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{\omega - 2\pi k}{T})$$

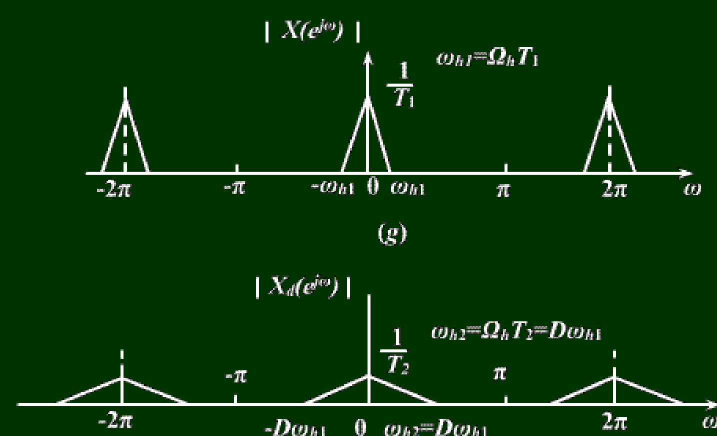
$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T^{'}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s^{'}) \qquad \omega = \Omega T$$

$$= \frac{1}{DT}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\frac{\Omega_s}{D})$$

$$= \frac{1}{DT}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{\omega - 2\pi k}{DT})$$



$-f_s$	$-f_s/2$	0	$f_s/2$	f_s	f
$-\Omega_s$	$-\Omega_s/2$	0	$\Omega_s/2$	Ω_s	$\Omega=2\pi f$
-2π	$-\pi$	0	π	2π	$\omega=2\pi f/f_s$
-1	-0.5	0	0.5	1	$f'=f/f_s$



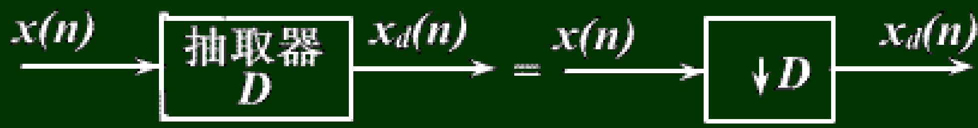
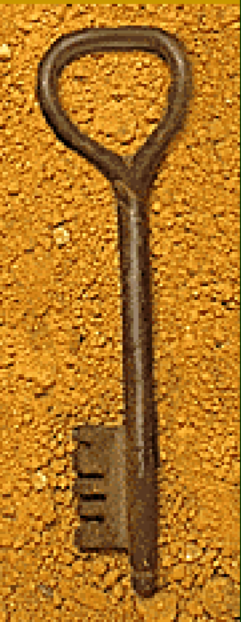
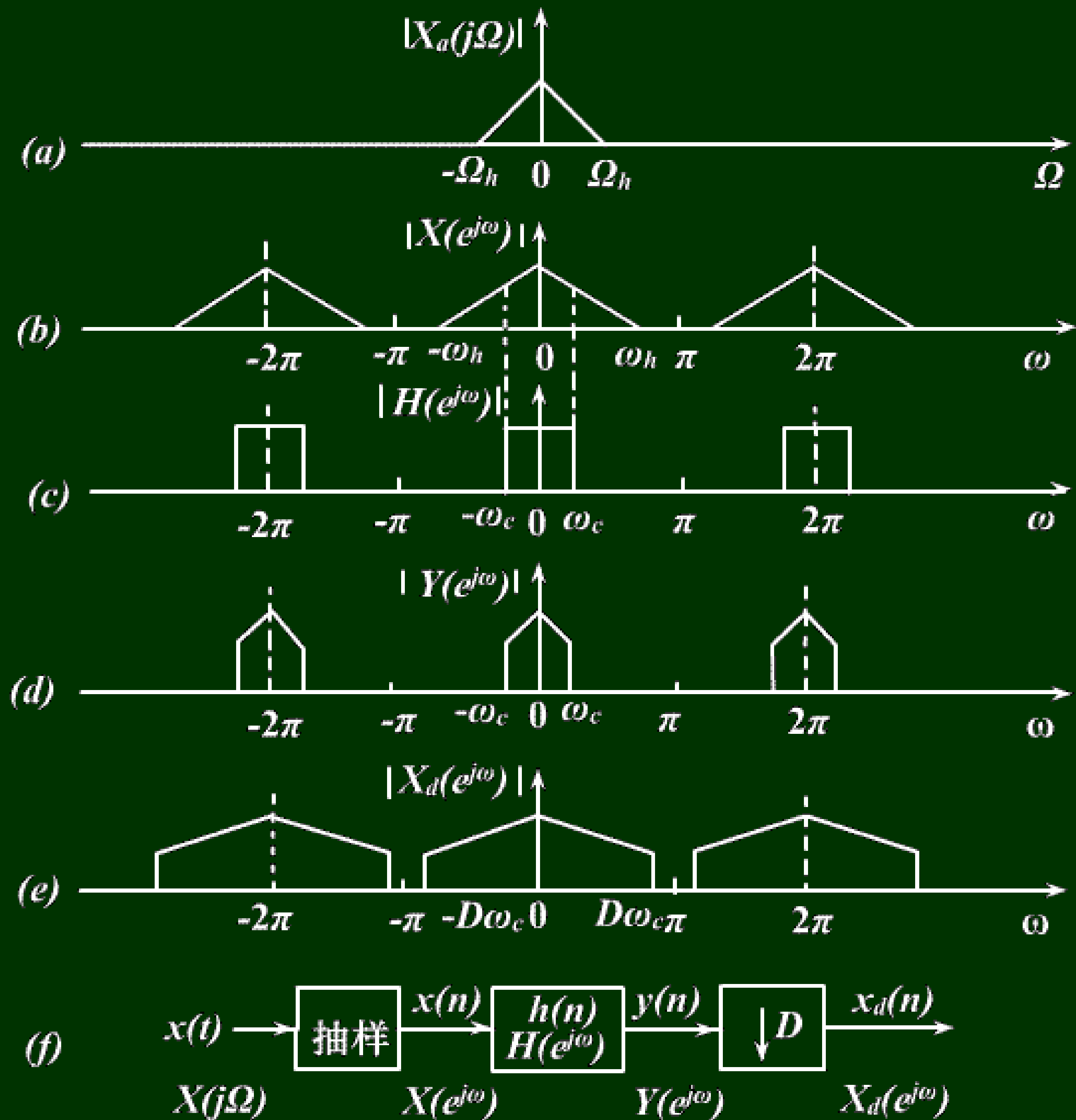
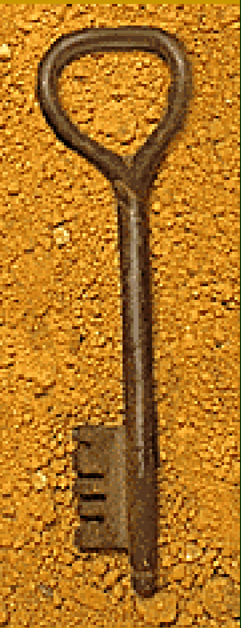


图3-20 抽取器及其框图表示

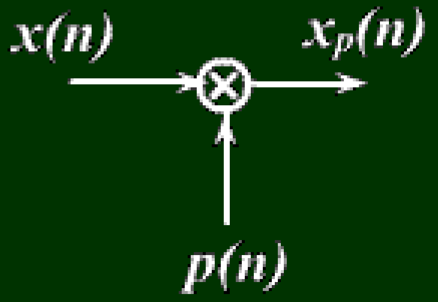




|Xa(jΩ)|
(a)
-Ωh
0
Ωh
Ω
|X(e^jω)|
(b)
-2π
-π
-ωh
0
ωh
π
2π
ω
|H(e^jω)|
(c)
-2π
-π
-ωc
0
ωc
π
2π
ω
|Y(e^jω)|
(d)
-2π
-π
-ωc
0
ωc
π
2π
ω
|Xd(e^jω)|
(e)
-2π
-π
-Dωc
0
Dωc
π
2π
ω
(f)
x(t)
X(jΩ)
抽样
x(n)
X(e^jω)
h(n)
H(e^jω)
y(n)
Y(e^jω)
↓D
xd(n)
Xd(e^jω)



序列域直接抽取：



时域序列乘脉冲串

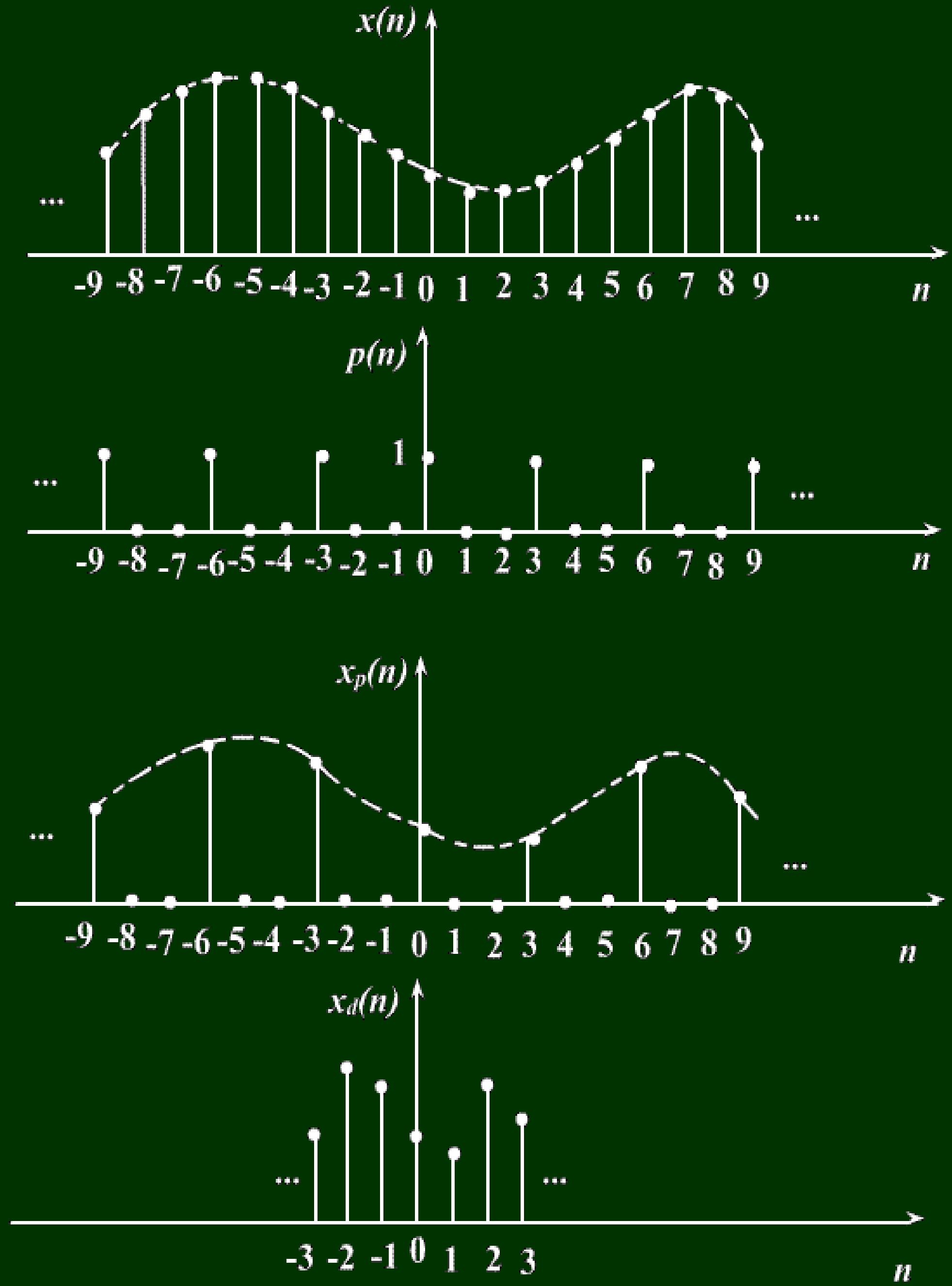
$$p(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kD)$$

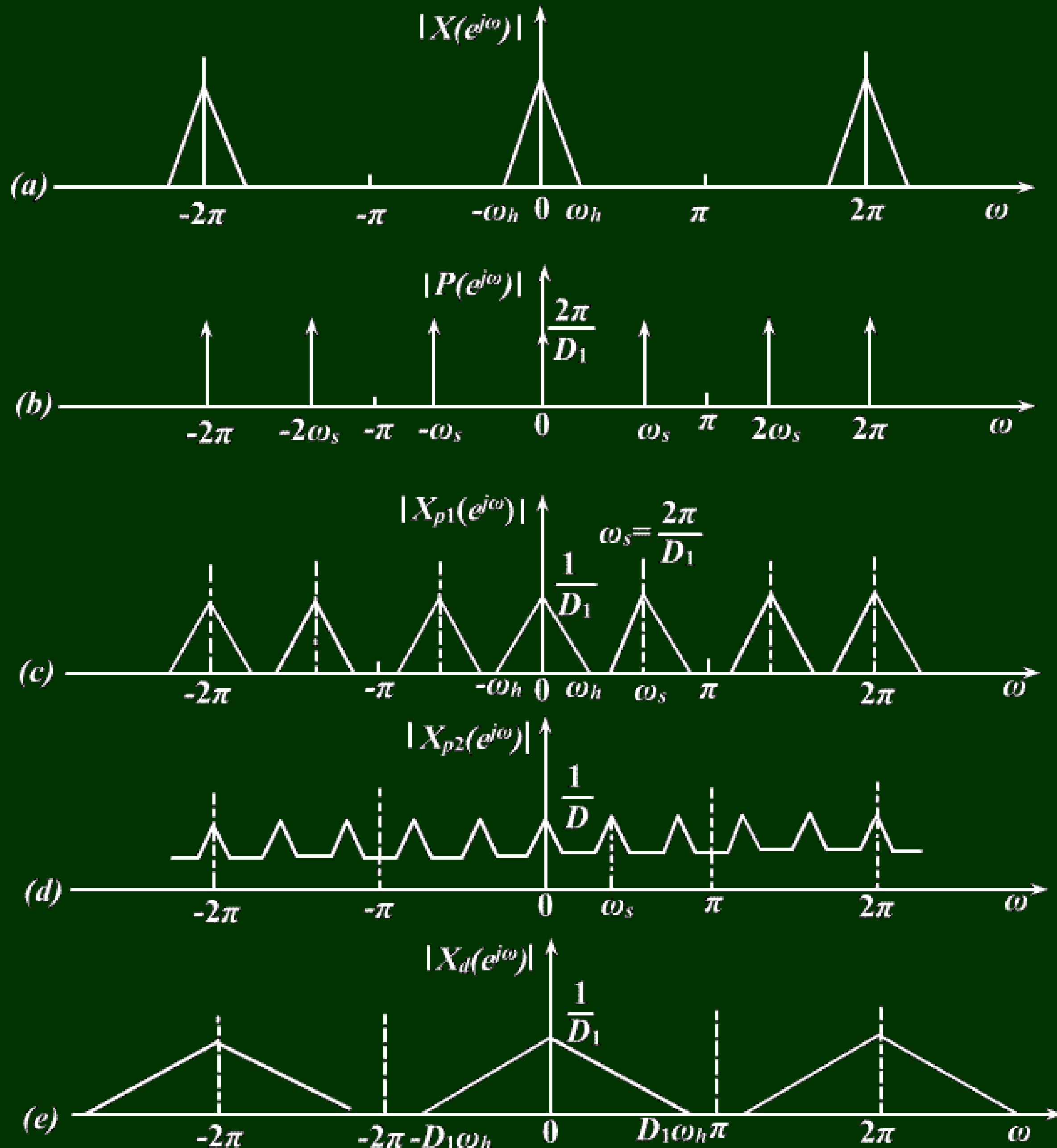
$$x_p(n)=x(n)\cdot p(n)$$

$$X_p(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(e^{j\theta})X(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

$$=\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1}X(e^{j(\omega-k\omega_s)})$$

$$X_d(e^{j\omega})=X_p(e^{j\frac{\omega}{D}})$$


x(n)
... -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ...
n
p(n)
1
... -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ...
n
xp(n)
... -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ...
n
xd(n)
... -3 -2 -1 0 1 2 3 ...
n



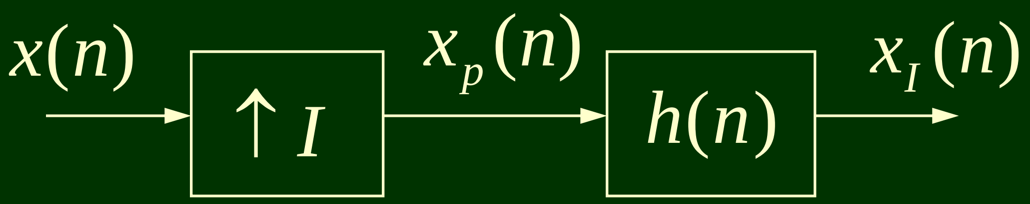
|X(e^{jω})|
(a)
-2π
-π
-ω_h
0
ω_h
π
2π
ω
|P(e^{jω})|
2π/D_1
(b)
-2π
-2ω_s
-π
-ω_s
0
ω_s
π
2ω_s
2π
ω
|X_{p1}(e^{jω})|
ω_s = 2π/D_1
1/D_1
(c)
-2π
-π
-ω_h
0
ω_h
ω_s
π
2π
ω
|X_{p2}(e^{jω})|
1/D
(d)
-2π
-π
0
ω_s
π
2π
ω
|X_d(e^{jω})|
1/D_1
(e)
-2π
-2π
-D_1ω_h
0
D_1ω_h
π
2π
ω

2、序列的插值

将$x(n)$的抽样频率增加I倍

相邻两点之间等间隔插入 I-1个零点，

I 称为插值因子



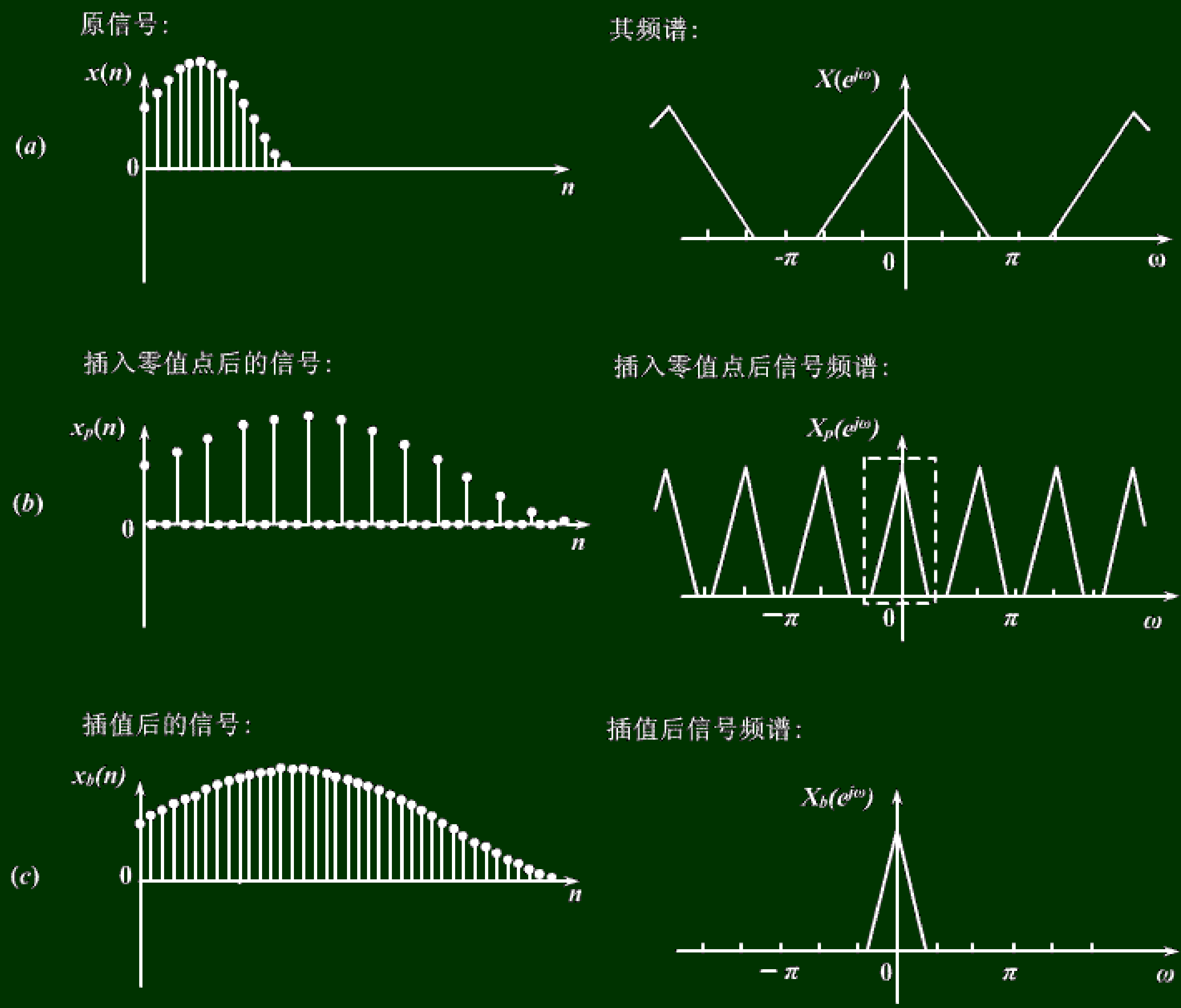
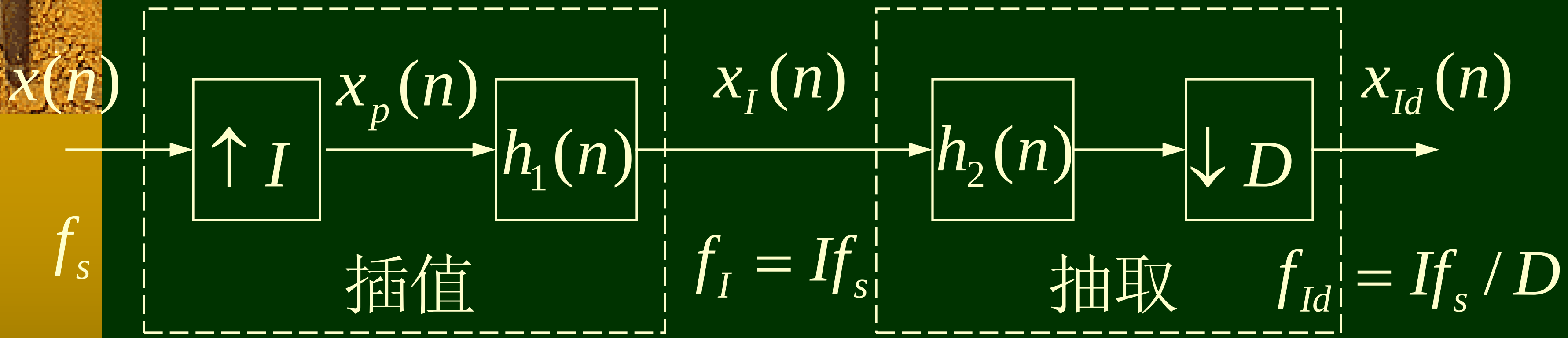

原信号:
其频谱:
(a)
x(n)
0
n
X(e^{jω})
-π
0
π
ω
插入零值点后的信号:
插入零值点后信号频谱:
(b)
x_p(n)
0
n
X_p(e^{jω})
−π
0
π
ω
插值后的信号:
插值后信号频谱:
(c)
x_b(n)
0
n
X_b(e^{jω})
−π
0
π
ω

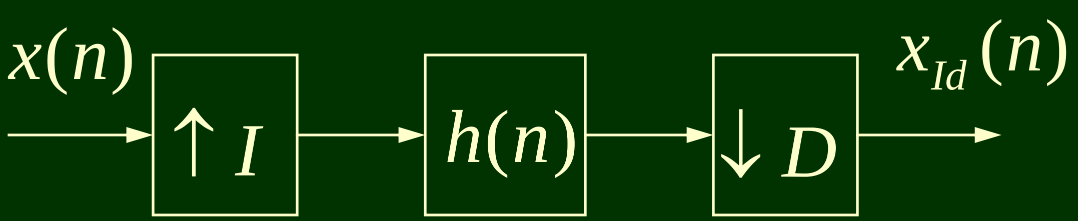
图3-26　插值过程

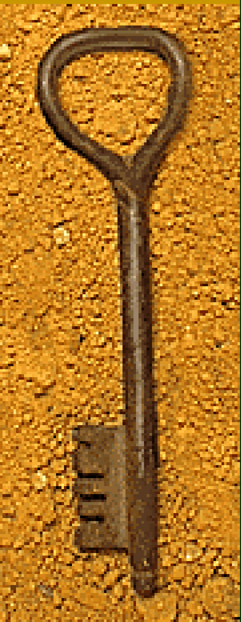
3、比值为有理数的抽样率转换

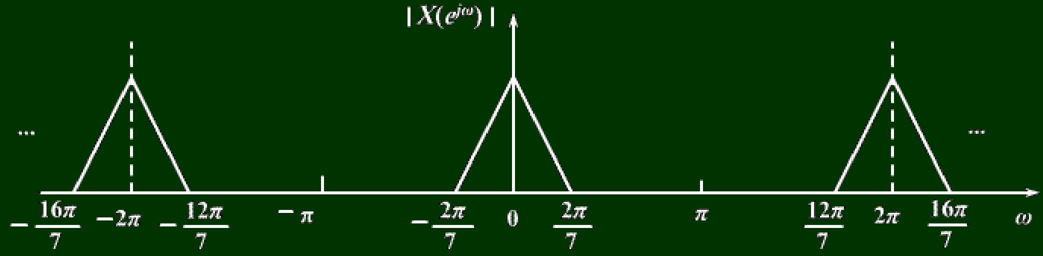
将$x(n)$的抽样频率增加 I/D 倍

先插值 I 倍，再作D倍抽取

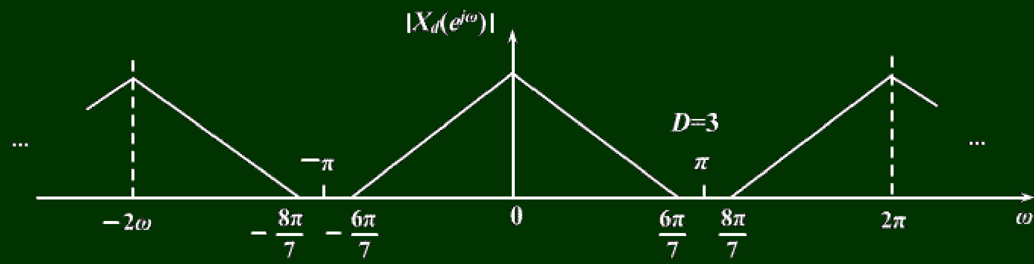




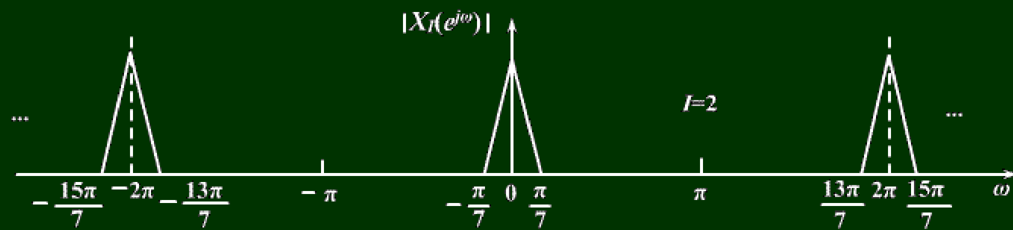



$|X(e^{j\omega})|$
$-\frac{16\pi}{7}$ -2π $-\frac{12\pi}{7}$ $-\pi$ $-\frac{2\pi}{7}$ 0 $\frac{2\pi}{7}$ π $\frac{12\pi}{7}$ 2π $\frac{16\pi}{7}$ ω

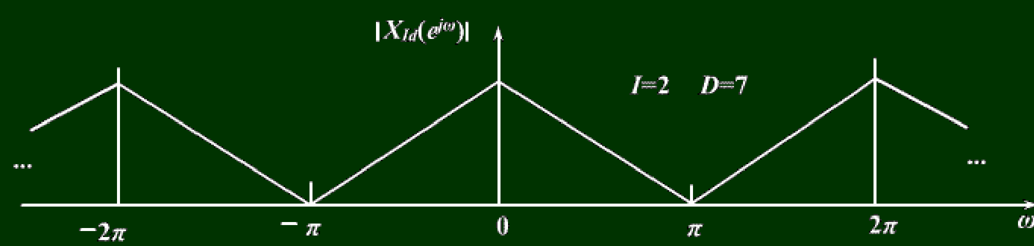
(*a*)


$|X_d(e^{j\omega})|$
$D=3$
-2ω $-\frac{8\pi}{7}$ $-\pi$ $-\frac{6\pi}{7}$ 0 $\frac{6\pi}{7}$ π $\frac{8\pi}{7}$ 2π ω

(b)


$|X_I(e^{j\omega})|$
$I=2$
$-\frac{15\pi}{7}$ -2π $-\frac{13\pi}{7}$ $-\pi$ $-\frac{\pi}{7}$ 0 $\frac{\pi}{7}$ π $\frac{13\pi}{7}$ 2π $\frac{15\pi}{7}$ ω

(*c*)


$|X_{Id}(e^{j\omega})|$
$I=2$ $D=7$
-2π $-\pi$ 0 π 2π ω

(*d*)