第8章 电磁波的辐射

一、辐射的基本概念

二、滞后位

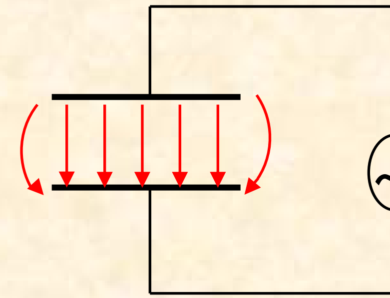
三、电偶极子的辐射

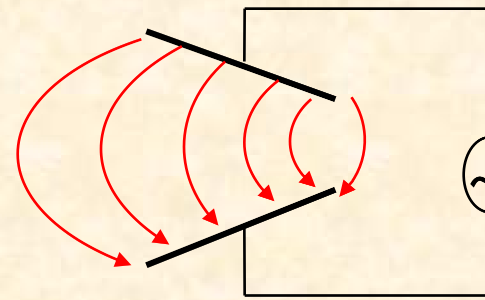
四、磁偶极子的辐射

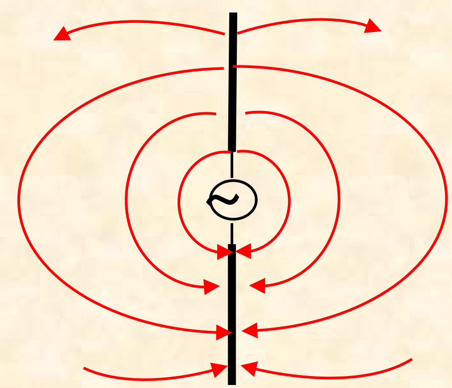
五、对称振子天线的辐射

六、 天线阵的辐射

一、辐射的基本概念







1. 什么是辐射?

- 辐射：随时间变化的电磁场离开波源向空间传播的现象。
- 产生辐射的源称为天线。

2. 辐射产生的必要条件

(1) 时变源存在。

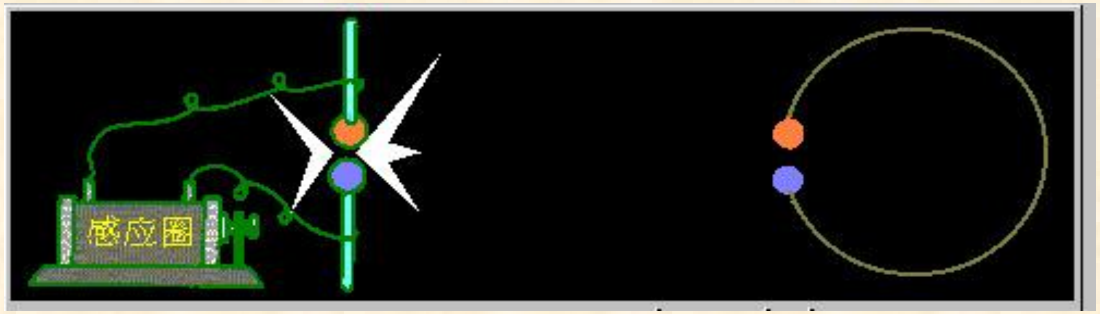
(2) 源电路是开放的。

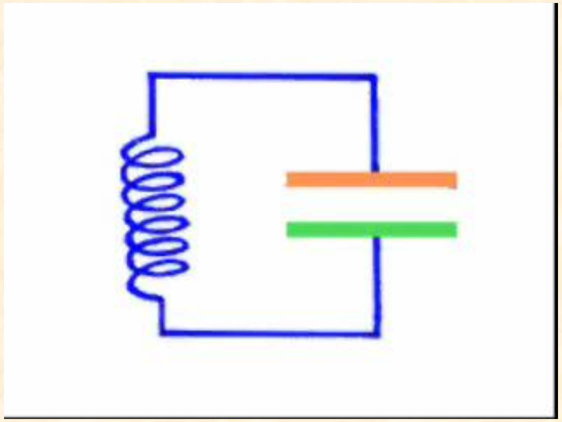
3. 影响辐射强弱的原因

(1) 源电路尺寸与辐射波的波长相比拟时辐射较为明显。

(2) 源电路越开放，辐射就越强。

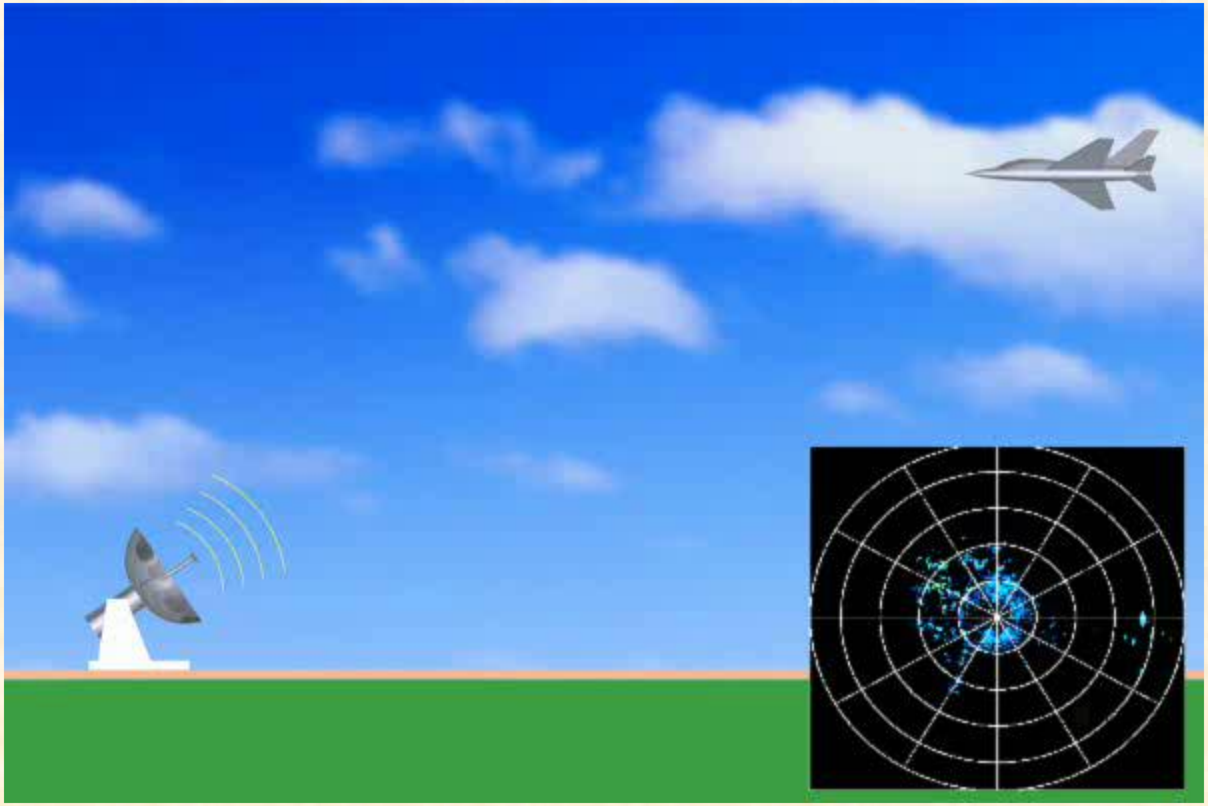
赫兹实验





电偶极子的辐射演示

雷达探测目标演示



二、滞后位

1. 在静态场情况下，矢量位和标量位方程为

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{J} \qquad \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

其解为：
$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}}{R}\mathrm{d}V' \qquad \phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\frac{\rho}{R}\mathrm{d}V'$$

2. 在时变场情况下，动态矢量位和动态标量位满足的方程

麦克斯韦方程：

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_C + \varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\end{cases}$$

已知：$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} \rightarrow \boxed{\vec{H} = \dfrac{1}{\mu}(\nabla\times\vec{A})}$ $\qquad \boxed{\vec{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$

$$\rightarrow \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{A}) \rightarrow \nabla\times(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) = 0 \rightarrow \vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\phi$$

得：
$$\frac{1}{\mu}\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \vec{J}_C + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t})$$

利用矢量恒等式：　$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$

$$\frac{1}{\mu}\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\vec{J}_{\mathrm{C}}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) \longrightarrow \nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}_{\mathrm{C}}+\nabla(\nabla\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial t})$$

洛仑兹规范：$\nabla\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\dfrac{\partial\phi}{\partial t}=0$

同理：$\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho_V}{\varepsilon}$

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2}=-\mu\vec{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{C}}\\&\nabla^2\phi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho_V}{\varepsilon}\end{aligned}\right\}\text{达朗贝尔方程}$$

对于正弦时变场，时间因子为：$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$　　令：$k^2=\omega^2\mu\varepsilon$

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}+k^2\vec{\boldsymbol{A}}=-\mu\vec{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{C}}$$

$$\nabla^2\phi+k^2\phi=-\frac{\rho_V}{\varepsilon}$$

方程的解为：

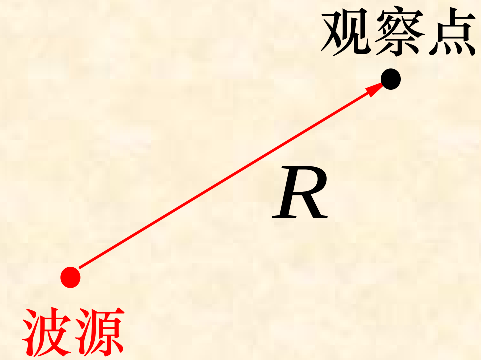
$$\vec{\boldsymbol{A}}(R,t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{C}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kR)}}{R}\mathrm{d}V'$$

$$\phi(R,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\frac{\rho_V\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kR)}}{R}\mathrm{d}V'$$

3. 由 $\vec{A}(R,t)$ 和 $\phi(R,t)$ 的表示式可知

$$\vec{A}(R,t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}_{\mathrm{C}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kR)}}{R}\mathrm{d}V'$$

$$\phi(R,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\frac{\rho_V\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kR)}}{R}\mathrm{d}V'$$



- 场点R处的 $\vec{A}$ 和 ϕ 变化的相位较其源 $\vec{J}$ 和 ρ 落后 $\omega t-kR$ 。
- 该相位用时间表示: $\omega t-kR=\omega(t-\dfrac{k}{\omega}R)=\omega(t-\dfrac{R}{v})=\omega(t-t')$

  式中 $t'=R/v$ 就是波源 $\vec{J}$ 或 ρ 的变化传递到观察点所需要的时间。

> 距离波源R处在t时刻$\vec{A}(R,t)$和 $\phi(R,t)$由前一时刻$(t-t')$的电流$\vec{J}$和电荷密度 ρ 的值决定。因此将$\vec{A}(R,t)$和$\phi(R,t)$ 称为滞后位。

三、电偶极子的辐射

1. 什么是电偶极子?

✧一段通有高频电流的直导线，当导线长度远远小于波长时，该导线被称为电偶极子。

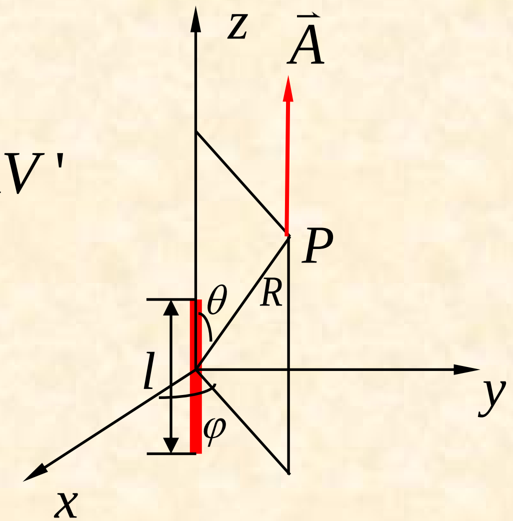
✧当： $l/\lambda<<1$ ，可近似地认为导线上每一点的电流都是等幅同相的。

2. 电偶极子的辐射场

（1）电偶极子的滞后位 $\vec{A}(R)=\dfrac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\dfrac{\vec{J}_{\mathrm{C}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\mathrm{d}V'$

如图所示，已知电流元

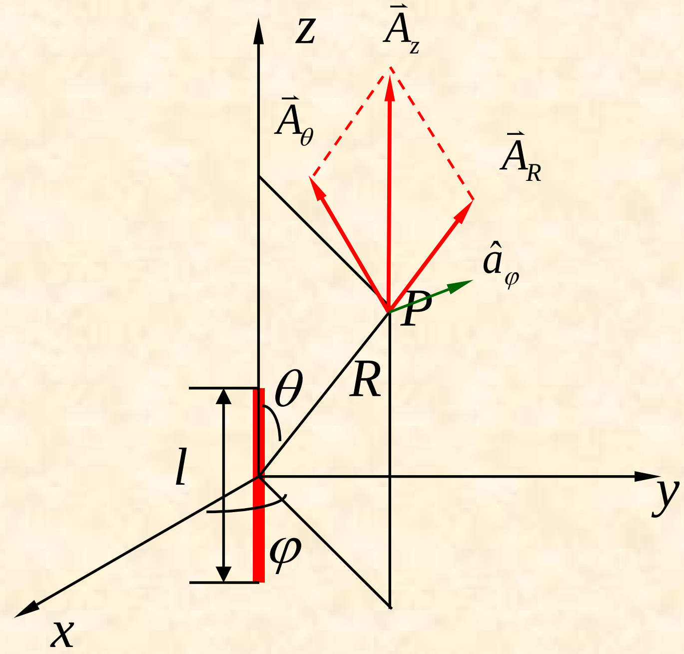
$$I\mathrm{d}l\hat{a}_z=\frac{I}{S}\cdot S\mathrm{d}l\hat{a}_z=\vec{J}_{\mathrm{C}}\mathrm{d}V'$$



$$\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu I}{4\pi}\int_l \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\mathrm{d}l\hat{\boldsymbol{a}}_z = \frac{\mu Il}{4\pi}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\hat{\boldsymbol{a}}_z$$

在球坐标系

$$\begin{cases} A_R = A_z\cos\theta \\ A_\theta = -A_z\sin\theta \\ A_\varphi = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} A_R = \dfrac{\mu Il}{4\pi}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\cos\theta \\ A_\theta = -\dfrac{\mu Il}{4\pi}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\sin\theta \end{cases}$$

（2）电偶极子的电磁场

磁场由：
$$\vec{H}=\frac{1}{\mu}(\nabla\times\vec{A})=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{R^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{a}}_R & R\hat{\boldsymbol{a}}_\theta & R\sin\theta\hat{\boldsymbol{a}}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial R} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ A_R & RA_\theta & 0\end{vmatrix}$$

得：
$$\begin{cases}H_R=H_\theta=0\\ H_\varphi=\dfrac{Il\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{4\pi R}\left(\mathrm{j}k+\dfrac{1}{R}\right)\sin\theta\end{cases}$$

电场由：
$$\nabla\times\vec{H}=\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\longrightarrow\vec{E}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\nabla\times\vec{H}$$

得：
$$\begin{cases}E_R=-\mathrm{j}\dfrac{Il\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{2\pi\omega\varepsilon R^2}\left(\mathrm{j}k+\dfrac{1}{R}\right)\cos\theta\\ E_\theta=-\mathrm{j}\dfrac{Il\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{4\pi\omega\varepsilon R}\left(-k^2+\dfrac{\mathrm{j}k}{R}+\dfrac{1}{R^2}\right)\sin\theta\\ E_\varphi=0\end{cases}$$

（3）近区场 ⟶ 感应场

在靠近电偶极子的区域，当 $kR \ll 1$。此时，$e^{-jkr} \approx 1$，则电磁场可近似为

$$
\begin{cases}
E_R \approx -j\dfrac{Il}{2\pi\omega\varepsilon R^3}\cos\theta \\[2ex]
E_\theta \approx -j\dfrac{Il}{4\pi\omega\varepsilon R^3}\sin\theta \\[2ex]
H_\varphi \approx \dfrac{Il}{4\pi R^2}\sin\theta
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
E_R = -j\dfrac{Il e^{-jkR}}{2\pi\omega\varepsilon R^2}\left(jk + \dfrac{1}{R}\right)\cos\theta \\[2ex]
E_\theta = -j\dfrac{Il e^{-jkR}}{4\pi\omega\varepsilon R}\left(-k^2 + \dfrac{jk}{R} + \dfrac{1}{R^2}\right)\sin\theta \\[2ex]
H_\varphi = \dfrac{Il e^{-jkR}}{4\pi R}\left(jk + \dfrac{1}{R}\right)\sin\theta
\end{cases}
$$

若将 $I = \dfrac{dq}{dt} = j\omega q$ 代入上式

得:

$$
\begin{cases}
E_R = \dfrac{ql}{2\pi\varepsilon R^3}\cos\theta \\[2ex]
E_\theta = \dfrac{ql}{4\pi\varepsilon R^3}\sin\theta
\end{cases}
$$

此结果与电偶极子的静电场分量相似。

（4）远区场 ——→ 辐射场

在远离电偶极子的区域，当 $kR \gg 1$，$1/R^2 \approx 0, 1/R^3 \approx 0$，此时电磁场可近似为：

$$E_\theta = \mathrm{j}\frac{Il\eta}{2\lambda}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\sin\theta$$

$$H_\varphi = \mathrm{j}\frac{Il}{2\lambda}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\sin\theta$$

$$\begin{cases} E_R = -\mathrm{j}\dfrac{Il\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{2\pi\omega\varepsilon R^2}\left(\mathrm{j}k+\dfrac{1}{R}\right)\cos\theta \\ E_\theta = -\mathrm{j}\dfrac{Il\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{4\pi\omega\varepsilon R}\left(-k^2+\dfrac{\mathrm{j}k}{R}+\dfrac{1}{R^2}\right)\sin\theta \\ H_\varphi = \dfrac{Il\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{4\pi R}\left(\mathrm{j}k+\dfrac{1}{R}\right)\sin\theta \end{cases}$$

可见：

- 电场和磁场与 R 成反比；
- 电场和磁场的相位相同；
- 电场和磁场在空间相互垂直，其比值等于媒质的本征阻抗； $\dfrac{E_\theta}{H_\varphi} = \eta$
- 平均坡印廷矢量： $\vec{S}_{rav} = \dfrac{1}{2}\eta\left(\dfrac{Il}{2\lambda R}\right)^2\sin^2\theta\,\vec{a}_R$

✦上式表明有能量向外辐射，说明一个做时谐震荡的电流元可以辐射电磁波。远区场又称为辐射场。

$$E_\theta = \mathrm{j}\frac{Il\eta}{2\lambda}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\sin\theta$$

3. 方向性函数和方向图

（1）方向性函数： 场量随方向变化的函数称为天线的方向性函数。

归一化方向性函数 $F(\theta,\varphi)$ 定义为：

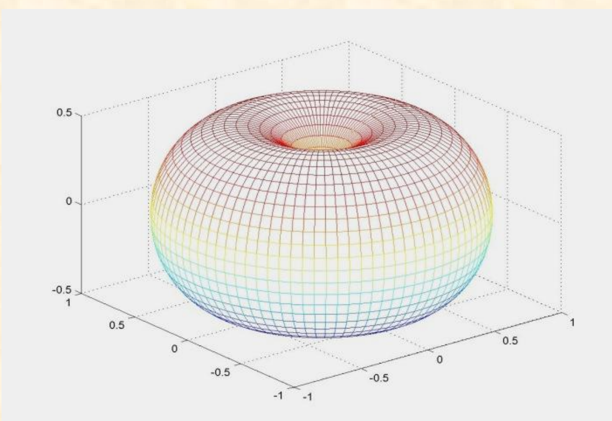
$$F(\theta,\varphi) = \frac{|\vec{E}(\theta,\varphi)|}{|\vec{E}_{\max}|}$$

显然，电偶极子的方向性函数为：

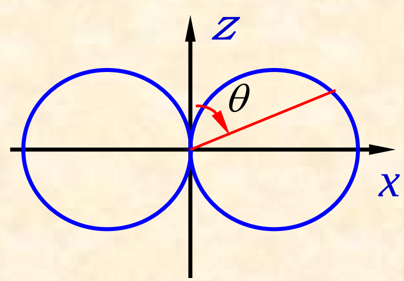
$$F(\theta,\varphi) = \sin\theta$$

（2）方向图： 根据方向性函数画出的图形称为方向图。

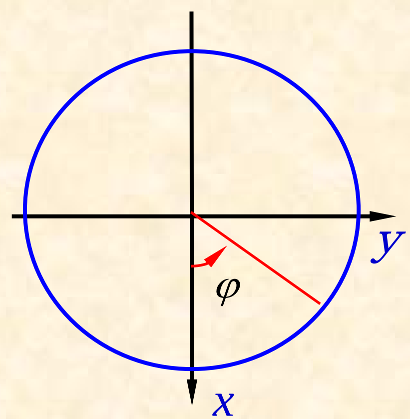
将 $F(\theta,\varphi)=\sin\theta$ 用极坐标画出来。



电偶极子的方向图



$\boldsymbol{E}$ 面方向图



$\boldsymbol{H}$ 面方向图

4、辐射功率

如果用一个大的球面将天线包围起来，则从天线辐射出来的能量必然全部通过这个球面。

$$E_\theta = \mathrm{j}\frac{Il\eta}{2\lambda}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\sin\theta$$

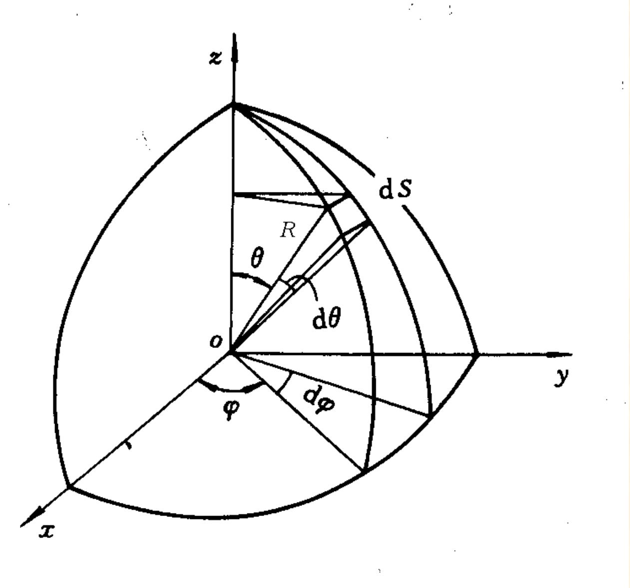
$$H_\varphi = \mathrm{j}\frac{Il}{2\lambda}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\sin\theta$$

$$\vec{S}_{rav} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}\times\vec{H}^*)$$

天线的总辐射功率为： $P_r = \oint_S \vec{\boldsymbol{S}}_{rav}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$

其中： $\vec{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{rav}} = \frac{1}{2}\eta\left(\frac{Il}{2\lambda R}\right)^2\sin^2\theta\hat{\boldsymbol{a}}_R$　　$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\vec{\boldsymbol{a}}_R$

所以： $P_{\mathrm{r}} = \frac{2\pi}{2}\int_0^\pi \eta\left(\frac{Il}{2\lambda R}\right)^2\sin^2\theta R^2\sin$



在自由空间中， 设 $\boxed{\eta=\eta_0=120\pi}$， 则:

5. 辐射电阻

将天线的辐射功率视为电流 I 在一等效电阻上的损耗功率，则该等效电阻称为辐射电阻。

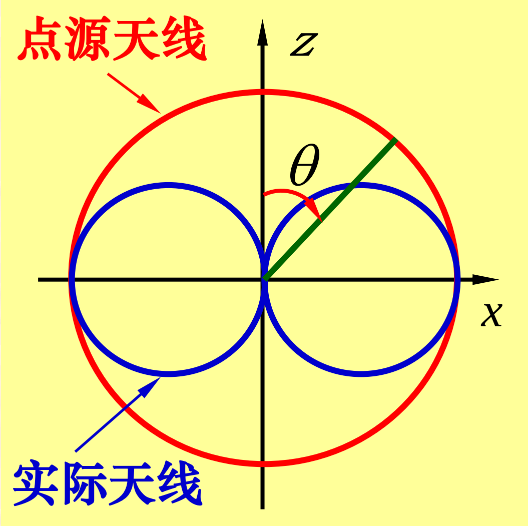
由此假设：$P_r = \frac{1}{2} I^2 R_r \longrightarrow R_r = \frac{2P_r}{I^2}$

已知：$P_r = \frac{\pi}{3}\eta\left(\frac{Il}{\lambda}\right)^2$　　$R_r = \frac{2\pi}{3}\eta\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$

在自由空间中，设 $\boxed{\eta = \eta_0 = 120\pi}$，则：$R_r = 80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$

可见：辐射电阻表示天线的辐射能力，辐射电阻越大，天线的辐射功率越强。

6. 方向性系数



当点源天线的辐射场强与实际天线在最大辐射方向上的场强相同时，点源天线的辐射功率与实际天线的辐射功率之比为方向性系数。

方向性系数表示为：

$$D = \left.\frac{P_{r0}}{P_r}\right|_{E_0=E_{max}}$$

P_{r0}：点源天线的总辐射功率

P_r：实际天线的总辐射功率

对点源天线辐射而言：

$$P_{r0} = |\vec{S}_{rav}|_{max} \times 4\pi R^2 \longrightarrow P_{r0} = 60\pi^2\left(\frac{Il}{\lambda}\right)^2$$

而：$P_r = 40\pi^2\left(\frac{Il}{\lambda}\right)^2$

其中：

$$|\vec{S}_{rav}|_{max} = \left|\frac{1}{2}\eta\left(\frac{Il}{2\lambda R}\right)^2 \sin^2\theta\hat{a}_R\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 15\pi\left(\frac{Il}{\lambda R}\right)^2$$

由此得：

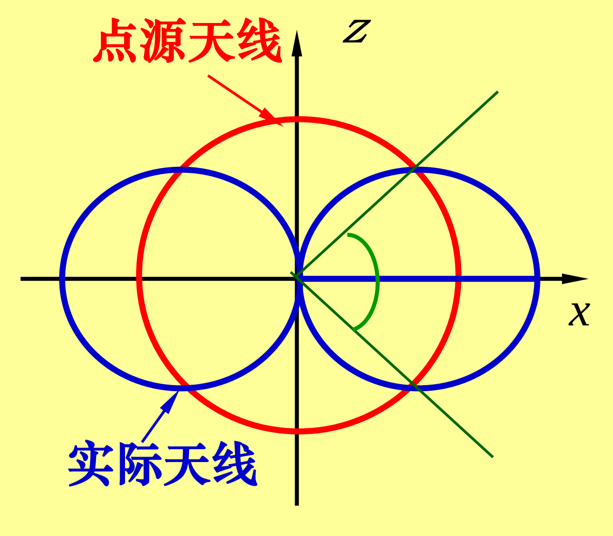
$$\boxed{D = 1.5}$$

方向性系数的另一种定义为：

在相同的辐射功率下，实际天线产生的最大辐射场强 E_{max}^2 与点源天线的辐射场强 E_0^2 之比。

方向性系数又可表示为：

$$D=\frac{E_{max}^2}{E_0^2}\bigg|_{P_r=P_{r0}}$$



7. 半功率波瓣宽度

辐射功率等于最大辐射功率一半时的两个方向之间的夹角。

对电偶极子辐射而言：

$$\sin\theta_{0.5}=0.707 \longrightarrow \theta_{0.5}=\pm\frac{\pi}{4}$$

故半功率波瓣宽度为：

$$2\theta_{0.5}=\frac{\pi}{2}$$

回顾：

第8章 电磁波的辐射

一、辐射的基本概念

1. 什么是辐射？ 2. 辐射产生的必要条件 3. 影响辐射强弱的原因

二、滞后位

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}&=-\mu\vec{J}_C\\ \nabla^2\phi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}&=-\frac{\rho_V}{\varepsilon}\end{aligned}\right\}\xrightarrow[\text{方程}]{\text{达朗贝尔}}\begin{aligned}\vec{A}(R,t)&=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}_C e^{j(\omega t-kR)}}{R}dV'\\ \phi(R,t)&=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\frac{\rho_V e^{j(\omega t-kR)}}{R}dV'\end{aligned}$$

三、电偶极子的辐射

1. 什么是电偶极子？

2. 辐射场：

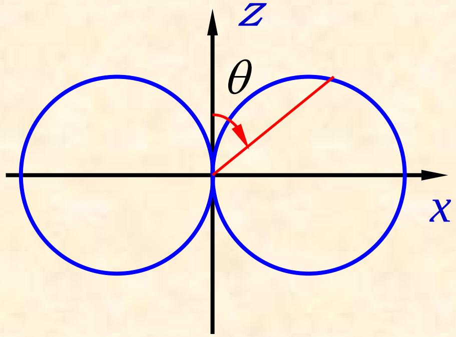
$$\begin{cases}E_\theta=j\dfrac{Il\eta}{2\lambda}\cdot\dfrac{e^{-jkR}}{R}\sin\theta\\ H_\varphi=j\dfrac{Il}{2\lambda}\cdot\dfrac{e^{-jkR}}{R}\sin\theta\end{cases}$$

平均坡印廷矢量：

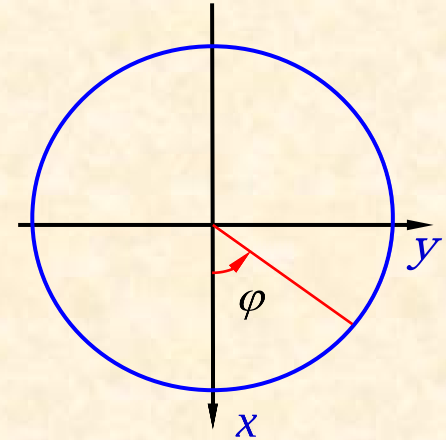
$$\vec{S}_{rav}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}\times\vec{H}^*)=\frac{1}{2}\eta\left(\frac{Il}{2\lambda R}\right)^2\sin^2\theta\hat{\boldsymbol{a}}_R$$

3. 方向性函数为：

$$F(\theta,\varphi)=\frac{|\vec{E}(\theta,\varphi)|}{|\vec{E}_{\max}|}=\sin\theta$$



E 面方向图



H 面方向图

4. 辐射功率：

$$P_{\mathrm{r}}=\frac{\pi}{3}\eta\left(\frac{Il}{\lambda}\right)^2$$

5. 辐射电阻：

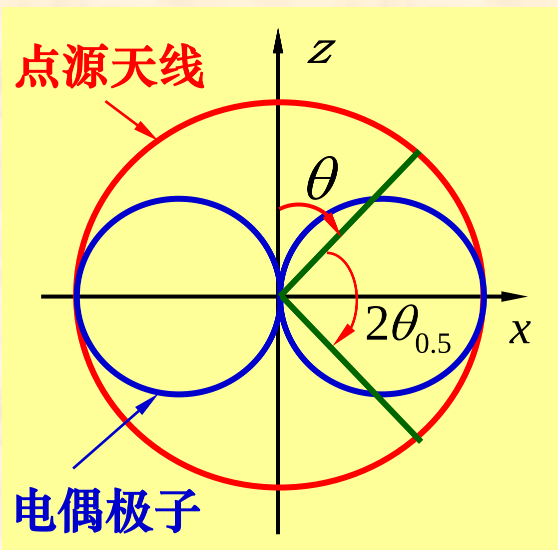
$$R_{\mathrm{r}}=\frac{2\pi}{3}\eta\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

6. 方向性系数：

$$D=\frac{P_{\mathrm{r}0}}{P_{\mathrm{r}}}\bigg|_{E_0=E_{\max}}=1.5$$

7. 半功率波瓣宽度：

$$2\theta_{0.5}=\frac{\pi}{2}$$



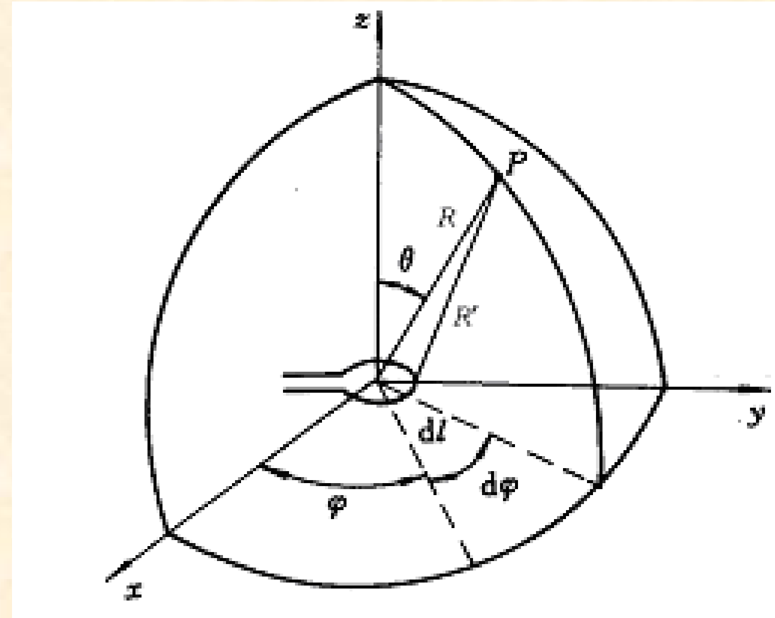
$$\sin\theta=0.707 \longrightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$$

四、磁偶极子的辐射

1. 什么是磁偶极子?

✧一个通有高频电流的小电流环的等效模型称为磁偶极子。

✧磁偶极子是根据电磁对偶性派生出来的概念。



2. 对偶原理的应用

麦克斯韦方程:

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \end{cases}$$

引入磁荷和磁流的概念之后，磁场各物理量就和电场各物理量一一对应起来了。

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_{\mathrm{e}}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{E}=-\vec{J}_{\mathrm{m}}-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho_{\mathrm{e}} \\ \nabla\cdot\vec{B}=\rho_{\mathrm{m}} \end{cases}$$

下标m表示磁量，e 表示电量。

磁流密度

磁荷密度

只有电流源存在时

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}_e=\vec{J}_e+\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}_e}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{E}_e=-\mu\dfrac{\partial\vec{H}_e}{\partial t} \\ \nabla\cdot\varepsilon\vec{E}_e=\rho_e \\ \nabla\cdot\mu\vec{H}_e=0 \end{cases}$$

只有磁流源存在时

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}_m=\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}_m}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{E}_m=-\vec{J}_m-\mu\dfrac{\partial\vec{H}_m}{\partial t} \\ \nabla\cdot\varepsilon\vec{E}_m=0 \\ \nabla\cdot\mu\vec{H}_m=\rho_m \end{cases}$$

对偶量：

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}_e &\leftrightarrow \vec{H}_m \\ \vec{H}_e &\leftrightarrow -\vec{E}_m\end{aligned}}$$

$$\vec{J}_e \leftrightarrow \vec{J}_m$$

$$\rho_e \leftrightarrow \rho_m$$

$$\varepsilon \leftrightarrow \mu$$

$$\mu \leftrightarrow \varepsilon$$

已知：电偶极子的辐射场为

$$E_\theta=\mathrm{j}\frac{Il\eta}{2\lambda}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\sin\theta$$

$$H_\varphi=\mathrm{j}\frac{Il}{2\lambda}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\sin\theta$$

由对偶原理得出：磁偶极子的辐射场

$$E_\phi=-\mathrm{j}\frac{I_m l}{2\lambda}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\sin\theta$$

$$H_\theta=\mathrm{j}\frac{I_m l}{\eta 2\lambda}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\sin\theta$$

磁流源

$$I_m l=\mathrm{j}\omega\mu IS$$

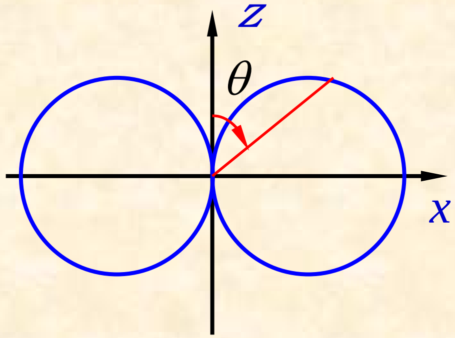
可见：利用对偶原理求解电磁学的一些问题，可大大简化推导过程。

3. 磁偶极子的辐射场

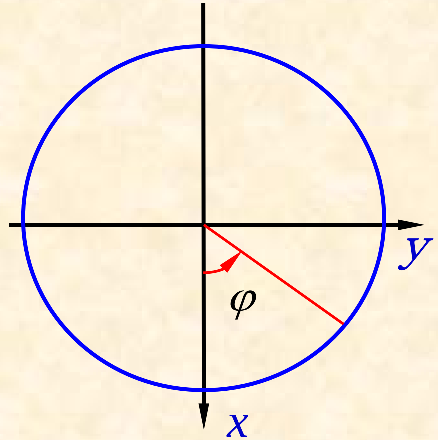
$$\begin{cases} E_{\phi} = \dfrac{\pi IS\eta}{\lambda^2} \cdot \dfrac{e^{-jkR}}{R} \sin\theta \\ H_{\theta} = -\dfrac{\pi IS}{\lambda^2} \cdot \dfrac{e^{-jkR}}{R} \sin\theta \end{cases}$$

4. 方向性函数为：

$$F(\theta,\varphi) = \frac{|\vec{E}(\theta,\varphi)|}{|\vec{E}_{\max}|} = \sin\theta$$



H 面方向图



E 面方向图

5. 辐射功率：

$$P_r = \frac{4\pi^3}{3}\eta\left(\frac{SI}{\lambda^2}\right)^2$$

6. 辐射电阻：

$$R_r = \frac{8\pi^3}{3}\eta\left(\frac{S}{\lambda^2}\right)^2$$

7. 方向性系数：

$$D = \left.\frac{P_{r0}}{P_r}\right|_{E_0 = E_{\max}} = 1.5$$

8. 半功率波瓣宽度：

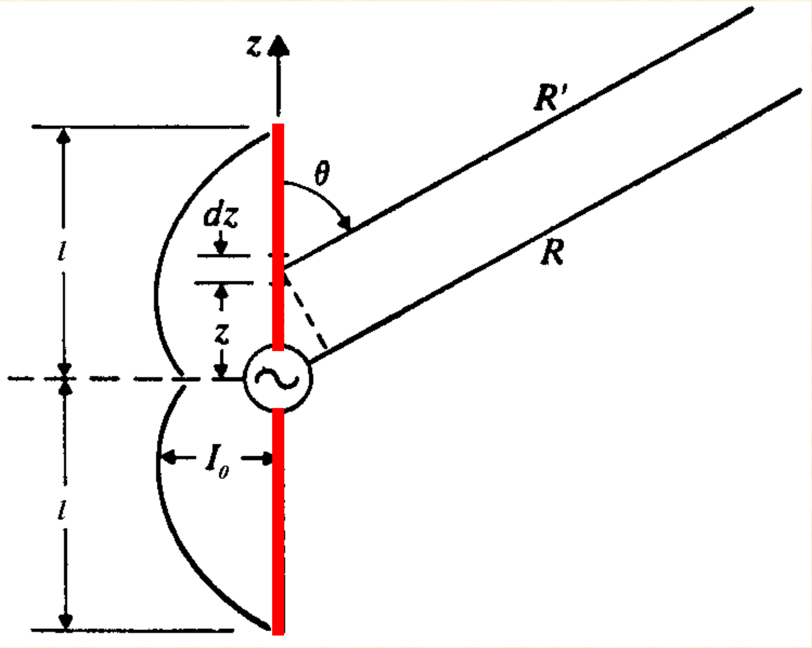
$$2\theta_{0.5} = \frac{\pi}{2}$$

五、对称振子天线的辐射

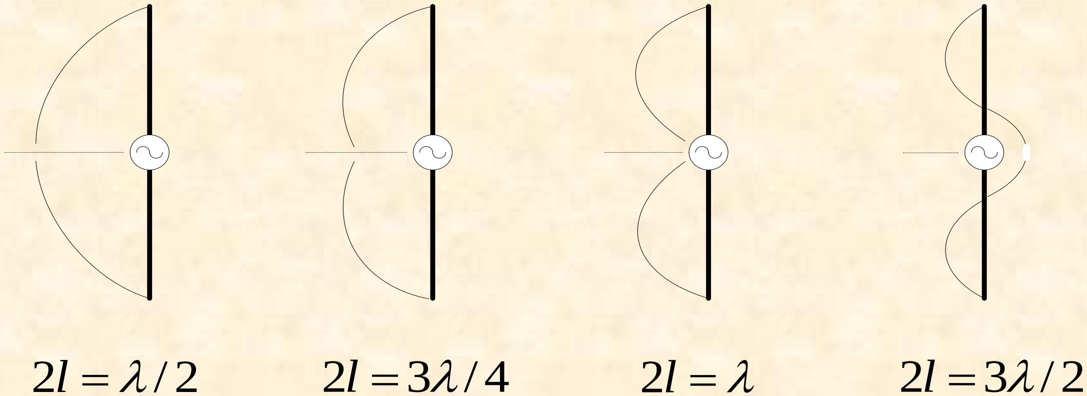
1. 什么是对称振子?

两段长度为 l 的直导线，从中间对称馈电，就构成对称振子。

如图所示:



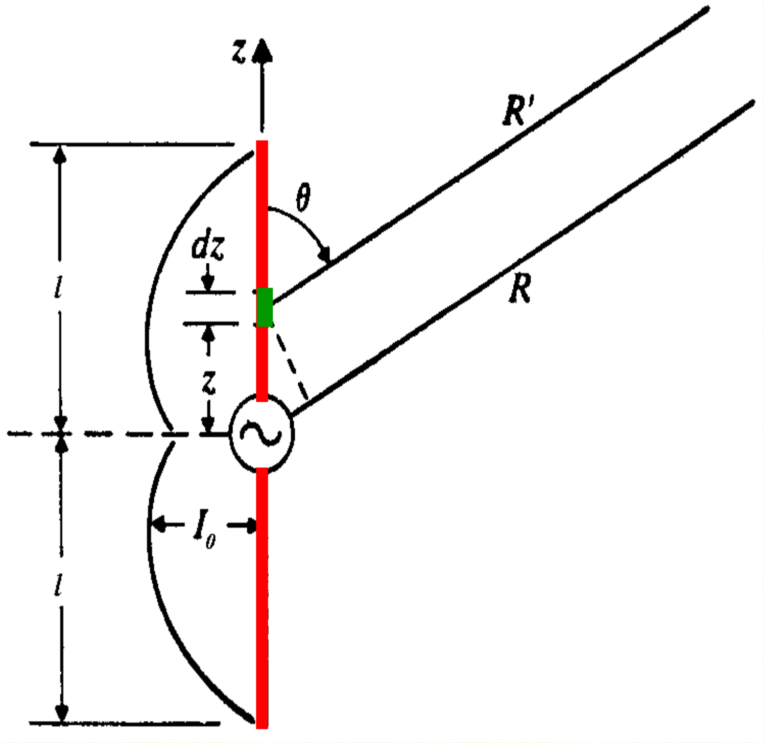
对称振子上的电流分布为: $I = I_0 \sin k(l - |z|)$



2. 对称振子的辐射场

在振子上取一小段dz，将其视为电偶极子，其辐射场为：

$$\mathrm{d}E_\theta = \mathrm{j}\eta \frac{I_0 \sin k(l-|z|)}{2\lambda}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR'}}{R'}\sin\theta\mathrm{d}z$$



该对称振子的辐射场就是整个振子长度上的积分：

$$E_\theta = \int_l \mathrm{d}E_\theta$$

因为：$R \gg l \longrightarrow R' // R$

$$\begin{cases} R' \approx R - z\cos\theta & \text{在指数上} \\ R' \approx R & \text{在分母上} \end{cases}$$

辐射电场为：

$$E_\theta = \mathrm{j}\frac{\eta I_0}{2\lambda R}\sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}\int_{-l}^{l}\sin[k(l-|z|)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz\cos\theta}\mathrm{d}z$$

$$E_\theta = \mathrm{j}\frac{\eta I_0}{2\lambda R}\sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}\int_{-l}^{l}\sin[k(l-|z|)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz\cos\theta}\mathrm{d}z$$

$$= \mathrm{j}\frac{\eta I_0}{2\lambda R}\sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}\{\int_{-l}^{0}\sin[k(l+z)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz\cos\theta}\mathrm{d}z +$$

$$\int_{0}^{l}\sin[k(l-z)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz\cos\theta}\mathrm{d}z\}$$

$$= \mathrm{j}\eta\frac{I_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{2\pi R}\cdot[\frac{\cos(kl\cos\theta)-\cos(kl)}{\sin\theta}]$$

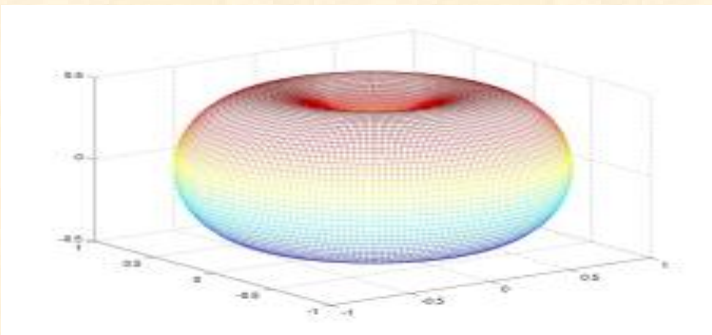
对称振子的辐射磁场：

$$\begin{cases} \vec{E} = \mathrm{j}\eta\dfrac{I_0}{2\pi}\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\cdot[\dfrac{\cos(kl\cos\theta)-\cos(kl)}{\sin\theta}]\hat{a}_\theta \\ \vec{H} = \mathrm{j}\dfrac{I_0}{2\pi}\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\cdot[\dfrac{\cos(kl\cos\theta)-\cos(kl)}{\sin\theta}]\hat{a}_\varphi \end{cases}$$

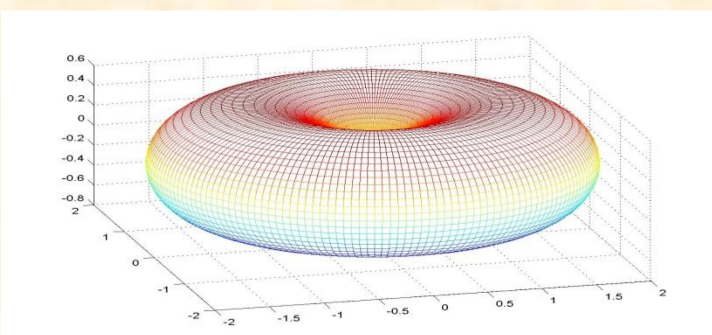
3. 对称振子的方向性函数：

$$F(\theta)=\frac{\cos(kl\cos\theta)-\cos(kl)}{\sin\theta}$$

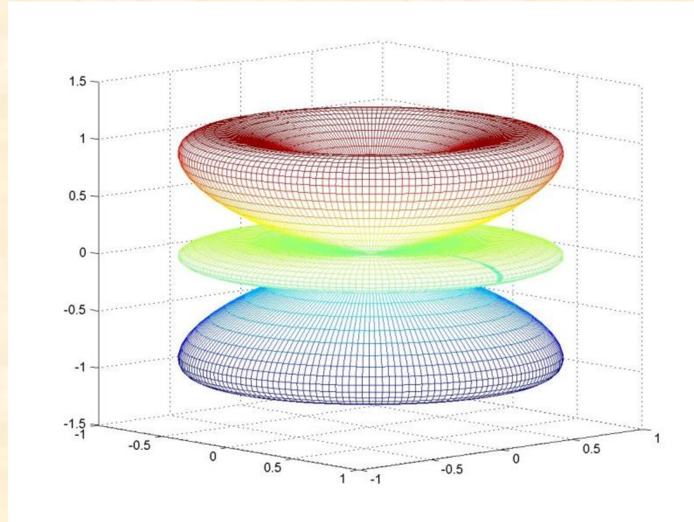
不同长度振子的方向图：



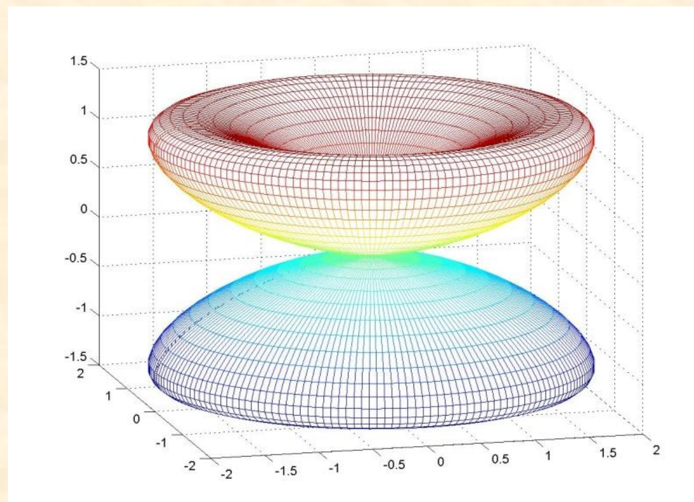
$2l/\lambda=1/2$



$2l/\lambda=1$



$2l/\lambda=3/2$



$2l/\lambda=2$

4. 半波振子的辐射场

已知：对称振子的辐射场：

$$\begin{cases}\vec{E}=\mathrm{j}\eta\dfrac{I_0}{2\pi}\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\cdot[\dfrac{\cos(kl\cos\theta)-\cos(kl)}{\sin\theta}]\hat{a}_\theta\\ \vec{H}=\mathrm{j}\dfrac{I_0}{2\pi}\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\cdot[\dfrac{\cos(kl\cos\theta)-\cos(kl)}{\sin\theta}]\hat{a}_\varphi\end{cases}$$

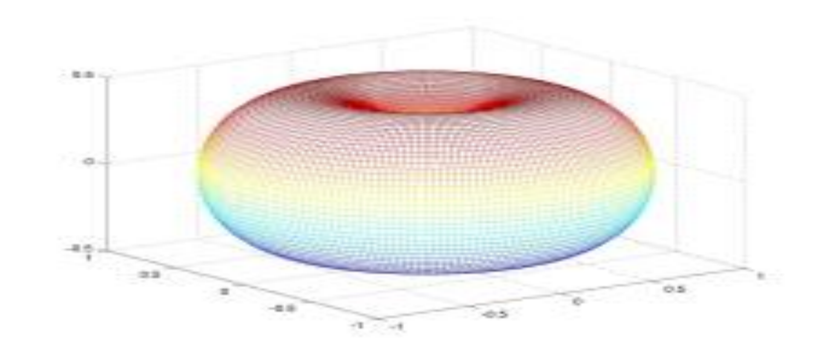
将 $2l=\lambda/2$ 代入上式，得：

(1)半波振子的辐射场

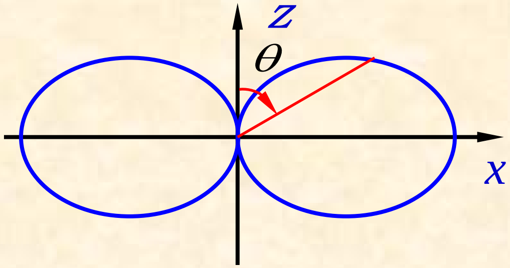
$$\begin{cases}\vec{E}=\mathrm{j}\eta\dfrac{I_0}{2\pi}\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\cdot[\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}]\hat{a}_\theta\\ \vec{H}=\mathrm{j}\dfrac{I_0}{2\pi}\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\cdot[\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}]\hat{a}_\varphi\end{cases}$$

(2)半波振子的方向性函数：

$$F(\theta)=\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}$$



$2l/\lambda=1/2$



E 面方向图

(3)半波振子的平均坡印廷矢量：

$$\vec{\boldsymbol{S}}_{\text{rav}}=\frac{1}{2}\text{Re}(\vec{E}\times\vec{H}^*)=\frac{\eta I_0^2}{8\pi^2R^2}\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}\right)^2\hat{\boldsymbol{a}}_R$$

(4)半波振子的总辐射功率：

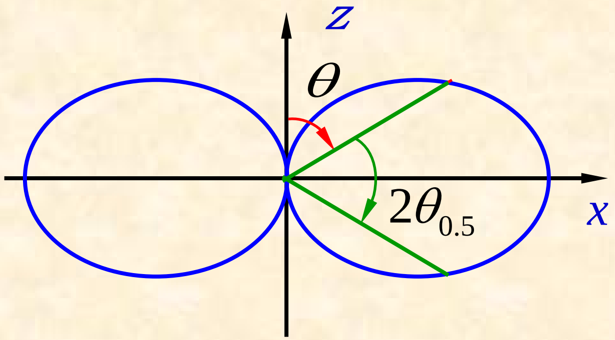
$$P_{\text{rav}}=\oiint_S\vec{S}_{\text{rav}}\cdot\text{d}\vec{S}=\frac{\eta I_o^2}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}\text{d}\theta\text{d}\varphi$$

$$=\frac{1.219}{4\pi}\eta I_o^2$$

(5)辐射电阻： $R_{\text{r}}=\dfrac{2P_{\text{rav}}}{I_o^2}=\dfrac{1.219}{2\pi}\eta\ (\Omega)$

(6)方向性系数： $D=1.64$

(7)半功率波瓣宽度： $2\theta_{0.5}=79^0$



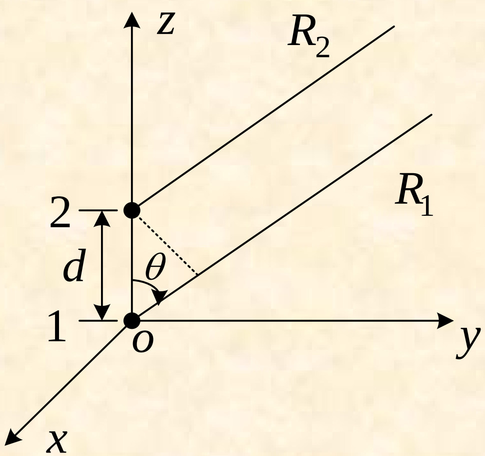
E 面方向图

$$F(\theta)=\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\longrightarrow\theta=50.5^0\longrightarrow\theta_{0.5}=90^0-50.5^0=39.5^0$$

六、 天线阵的辐射

1. 什么是天线阵?

由若干个辐射单元以各种形式（如直线、圆环、三角和平面等）在空间排列组成的天线系统称为天线阵。



(a) 纵向二元阵

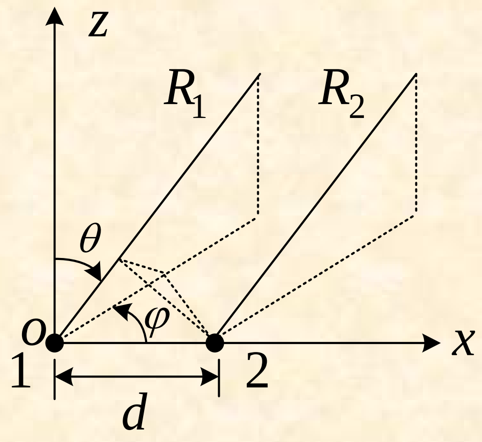
2. 控制天线阵辐射的因素有哪些?

(1) 阵元数目;

(2) 阵元排列方式;

(3) 阵元间距;

(4) 每个阵元的馈电电流的大小和相位。

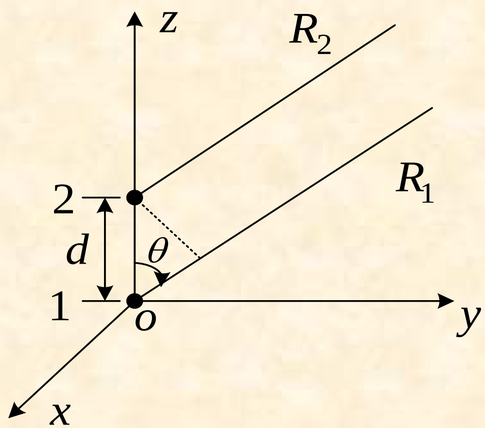


(b) 横向二元阵

3. 二元阵的辐射场

二元阵是由相隔一定距离的两个辐射元组成。

（1）纵向等幅二元阵：$I_2 = I_1 e^{j\xi}$



(a) 纵向二元阵

两单元的辐射电场分别为 ：

$$E_1 = E_m F_0(\theta,\varphi)\frac{e^{-jkR_1}}{R_1}$$

单元辐射电场的幅值

$$E_2 = E_m F_0(\theta,\varphi)\frac{e^{j\xi}\cdot e^{-jkR_2}}{R_2}$$

单元的方向性函数

远区情况： $R \gg d$ $R_1 // R_2$

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= R \\ R_2 &= R - d\cos\theta \end{aligned}\right\}$$

该二元阵的辐射电场：

$$E = E_1 + E_2$$

$$= E_m F_0(\theta,\varphi)\frac{e^{-jkR}}{R}(1 + e^{j\xi}\cdot e^{jkd\cos\theta})$$

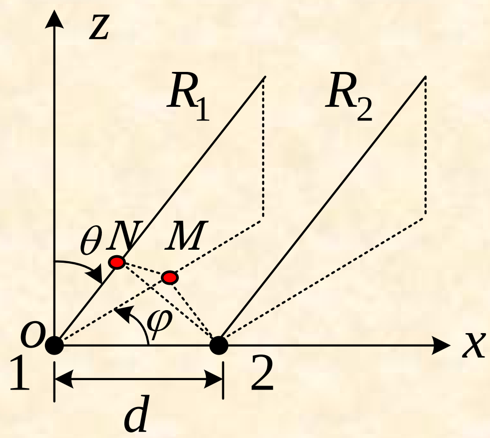
$$= 2E_m \frac{e^{-jkR}}{R} e^{j\frac{\psi}{2}} F_0(\theta,\varphi)\cos(\frac{\psi}{2})$$

其中：$\psi = \xi + kd\cos\theta$

$\cos(\frac{\psi}{2})$ 称为阵因子，用 $f(\psi)$表示：

$$f(\psi) = \cos(\frac{\psi}{2})$$

（2）横向等幅二元阵：$I_2 = I_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\xi}$



(b) 横向二元阵

远区情况：$R \gg d \quad R_1 // R_2$

$$R_2 = R_1 - ON$$

$$OM = d\cos\varphi$$

$$ON = OM\sin\theta$$

所以：
$$\left.\begin{aligned} R_1 &= R \\ R_2 &= R - d\sin\theta\cos\varphi \end{aligned}\right\}$$

同理，两单元的辐射电场分别为：

$$E_1 = E_\mathrm{m} F_0(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR_1}}{R_1}$$

$$E_2 = E_\mathrm{m} F_0(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\xi}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR_2}}{R_2}$$

该二元阵的辐射电场：

$$E = E_1 + E_2$$

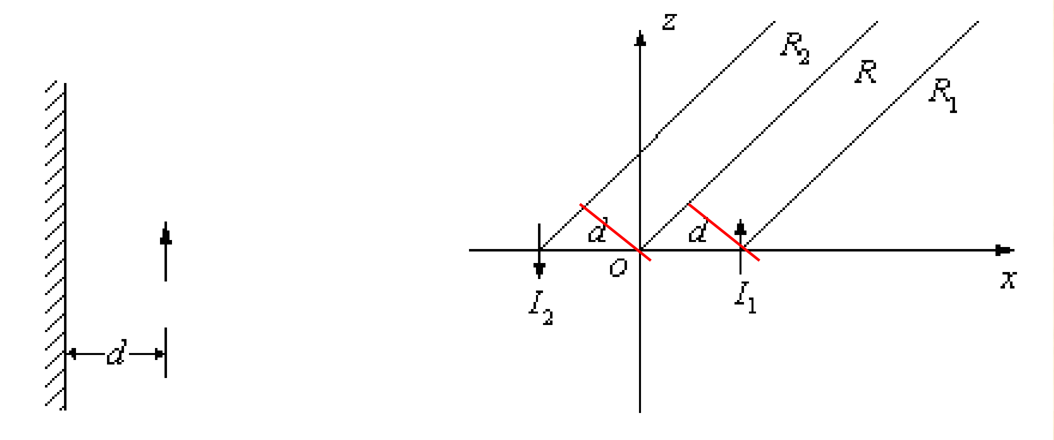
$$= E_\mathrm{m} F_0(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\xi}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}kd\sin\theta\cos\varphi})$$

$$= 2E_\mathrm{m}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\psi}{2}} F_0(\theta,\varphi)\cos(\frac{\psi}{2})$$

其中：$\psi = \xi + kd\sin\theta\cos\varphi$

比较这两种二元阵，其辐射场的表达式形式相同，不同的是两阵元的相位差表示式不一样。

例： 一个长度为 l 的电偶极子，其上电流为$I_0 e^{j\frac{\pi}{2}}$，将它平行地放置于一个无限大导电平板前，和板的距离为$d\,(d=\lambda/4)$，如图所示，求辐射方向图。



解： 由于电偶极子置于无限大导电平板前，用其镜像法，镜像电流与源电流等幅反相，因此构成了等幅反相馈电的二元阵

馈电电流分别为：　$I_1 = I_0 e^{j\frac{\pi}{2}}$　　$I_2 = I_0 e^{-j\frac{\pi}{2}}$

两个阵元辐射场叠加为：

$$E_\theta = j\frac{I_0 l}{2\lambda}\eta\sin\theta[e^{j\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + e^{-j\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-jkR_2}}{R_2}]$$

其中：$R_1 = R - d\sin\theta\cos\varphi$，　$R_2 = R + d\sin\theta\cos\varphi$

在分母中将$R_1 \approx R \approx R_2$代入，得： $E_\theta = \mathrm{j}\dfrac{I_0 l}{\lambda R}\eta \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}\sin\theta\cos(\dfrac{\psi}{2})$

式中： $\psi = \pi + 2kd\sin\theta\cos\varphi$

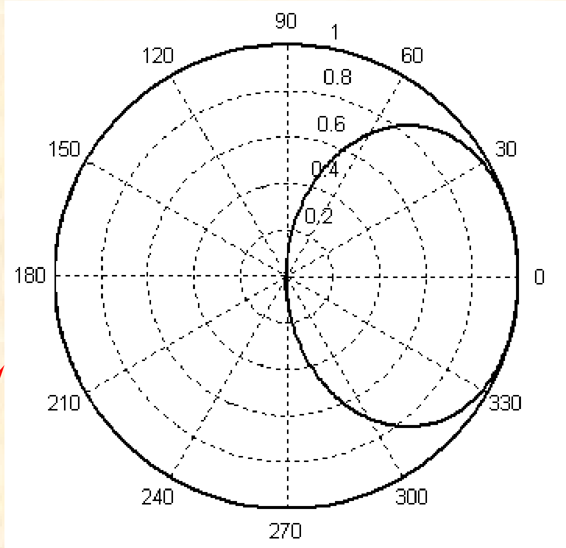
(1)在xOy平面的方向图，$\theta = \dfrac{\pi}{2}, \sin\theta = 1$

此时方向图由阵因子确定

$$f(\psi) = \cos(\frac{\psi}{2}) = \cos(\frac{\pi + 2kd\cos\varphi}{2}) = -\sin(kd\cos\varphi)$$

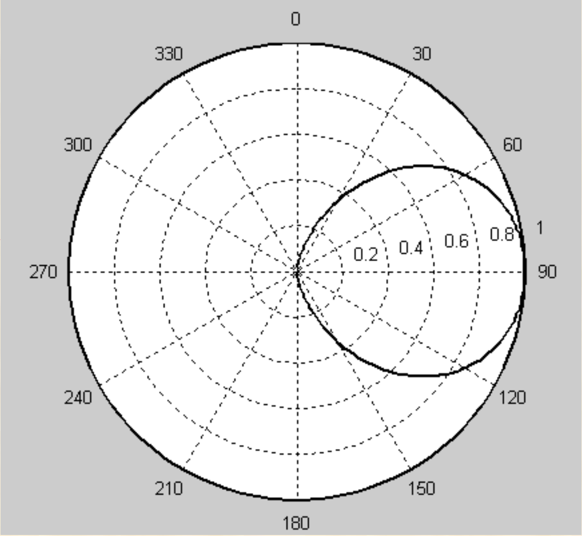
已知： $kd = \dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot\dfrac{\lambda}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

故方向性函数为：$F(\theta,\varphi) = \left|\sin(\dfrac{\pi}{2}\cos\varphi)\right|$



(2)在xOz平面的方向图，$\varphi = 0, \cos\varphi = 1$

$$F(\theta,\varphi) = |F_0(\theta,\varphi) f(\psi)| = \sin\theta\sin(\frac{\pi}{2}\cos\theta)$$



其方向图如图所示。

4. 均匀直线阵

直线阵： 由N个相同的单元天线等间距地排列在一条直线上构成。

均匀直线阵: 若各单元上的馈电电流大小相同，而相位沿线均匀递增或递减，这样的直线阵称为均匀直线阵。

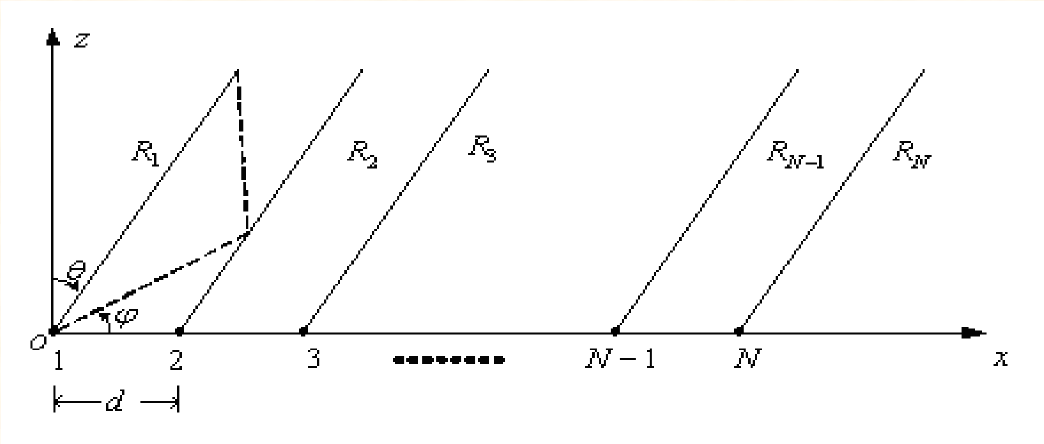
如图所示: N元直线阵

若第1单元的电流为 $I_0 e^{j0}$，

递增的相位值为 ξ，

则第n单元的电流可表示为

$$I_n = I_0 e^{j(n-1)\xi}$$



N元均匀直线阵的辐射场由N个单元的辐射场叠加获得，即

$$E = E_m F_0(\theta,\varphi)\left[\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} \cdot e^{j\xi} + \cdots + \frac{e^{-jkR_N}}{R_N} \cdot e^{j(N-1)\xi}\right]$$

对远场区而言，$R_1, R_2, \cdots, R_N$ 关系为：
$$\begin{cases} R_1 = R \\ R_2 = R - d\sin\theta\cos\varphi \\ R_3 = R - 2d\sin\theta\cos\varphi \\ \vdots \\ R_N = R - (N-1)d\sin\theta\cos\varphi \end{cases}$$

若令：$\psi = \xi + kd\sin\theta\cos\varphi$

则辐射场：

$$E = E_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}F_0(\theta,\varphi)\left[1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\psi}+\cdots+\mathrm{e}^{\mathrm{j}(N-1)\psi}\right]$$

$$\downarrow$$

$$E = E_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}F_0(\theta,\varphi)\left[\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}N\psi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}}\right]$$

$$\downarrow$$

$$E = E_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(N-1)\psi/2}F_0(\theta,\varphi)\left[\frac{\sin(N\psi/2)}{\sin(\psi/2)}\right]$$

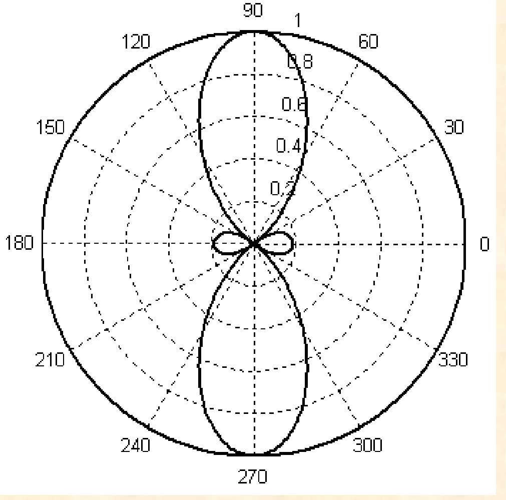
均匀直线阵的归一化阵因子为：$f(\psi) = \dfrac{\sin(N\psi/2)}{N\sin(\psi/2)}$

该直线阵的方向性函数为：$F(\theta,\varphi) = F_0(\theta,\varphi)f(\psi)$

（1）若N=10各单元馈电电流等幅同相，单元间距为 $\lambda/8$

$$\psi = \xi + kd\sin\theta\cos\varphi = \frac{\pi}{4}\sin\theta\cos\varphi$$

方向图：



方向性函数为：

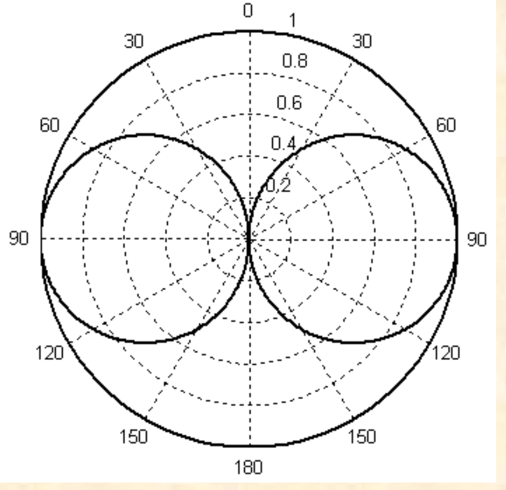
$$F(\theta,\varphi) = F_0(\theta,\varphi) f(\psi) = \sin\theta\left|\frac{\sin(5\psi)}{10\sin(\psi/2)}\right|$$

在H平面内：

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad F(\frac{\pi}{2},\varphi) = \left|\frac{\sin(\frac{5\pi}{4}\cos\varphi)}{10\sin(\frac{\pi}{8}\cos\varphi)}\right|$$

在E平面内：

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \; F(\theta,0) = \sin\theta$$



(2) 当该均匀直线阵的参数为: $\xi=\pi/2,\ N=10\quad d=\lambda/4$

方向性函数为:

$$F(\theta,\varphi)=\sin\theta\left|\frac{\sin(5\psi)}{10\sin(\psi/2)}\right|$$

其中: $\psi=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\varphi$

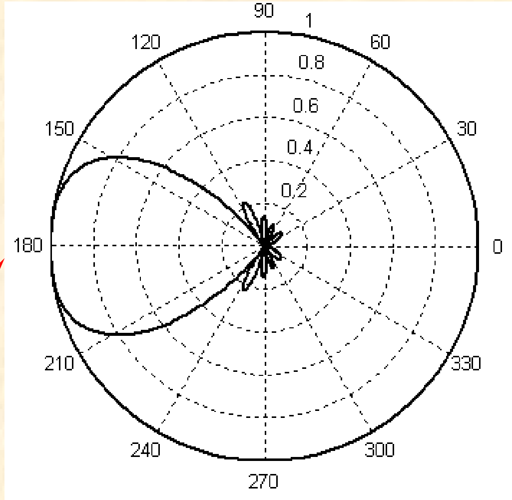
在H平面内:

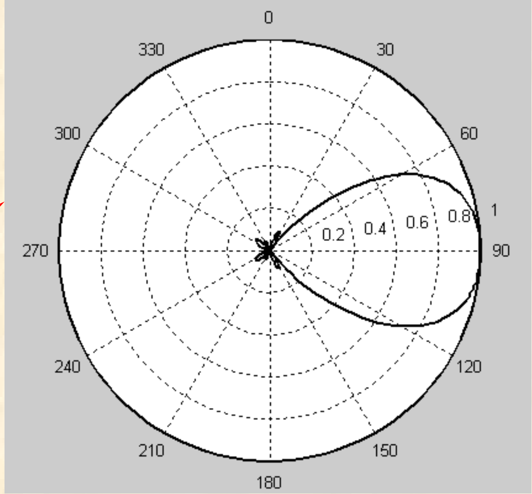
$$\theta=\frac{\pi}{2},\qquad F(\frac{\pi}{2},\varphi)=\left|\frac{\sin(\frac{5\pi}{2}+\frac{5\pi}{2}\cos\varphi)}{10\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cos\varphi)}\right|$$

在E平面内:

$$\varphi=\pi,\ \ F(\theta,0)=\left|\sin\theta\frac{\sin(\frac{5\pi}{2}-\frac{5\pi}{2}\sin\theta)}{10\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\sin\theta)}\right|$$

方向图:

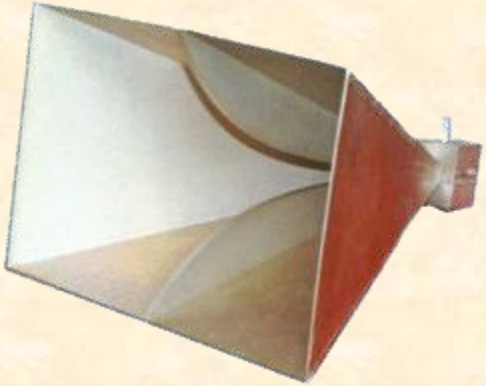




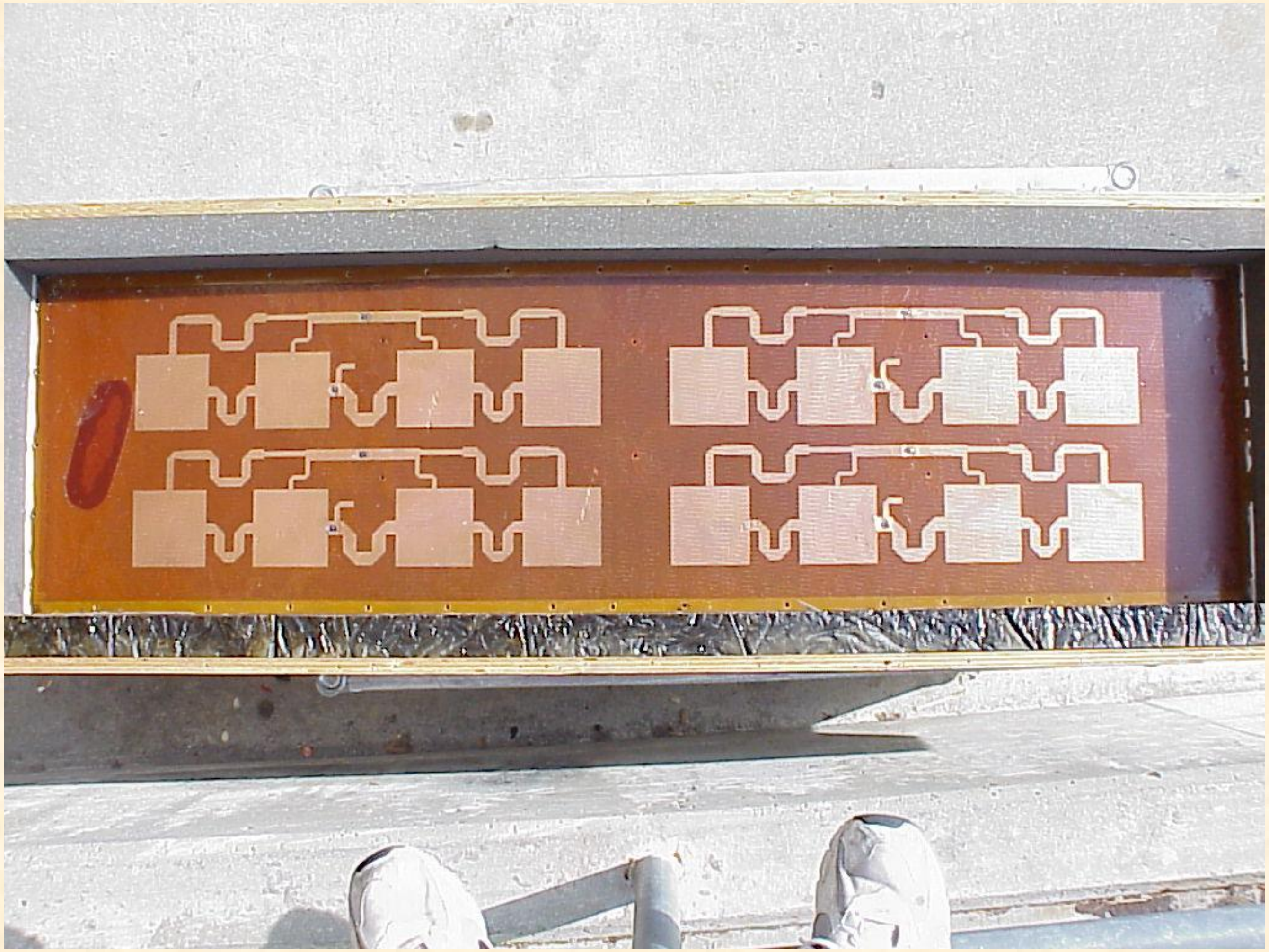
拉杆天线

引向天线

喇叭天线

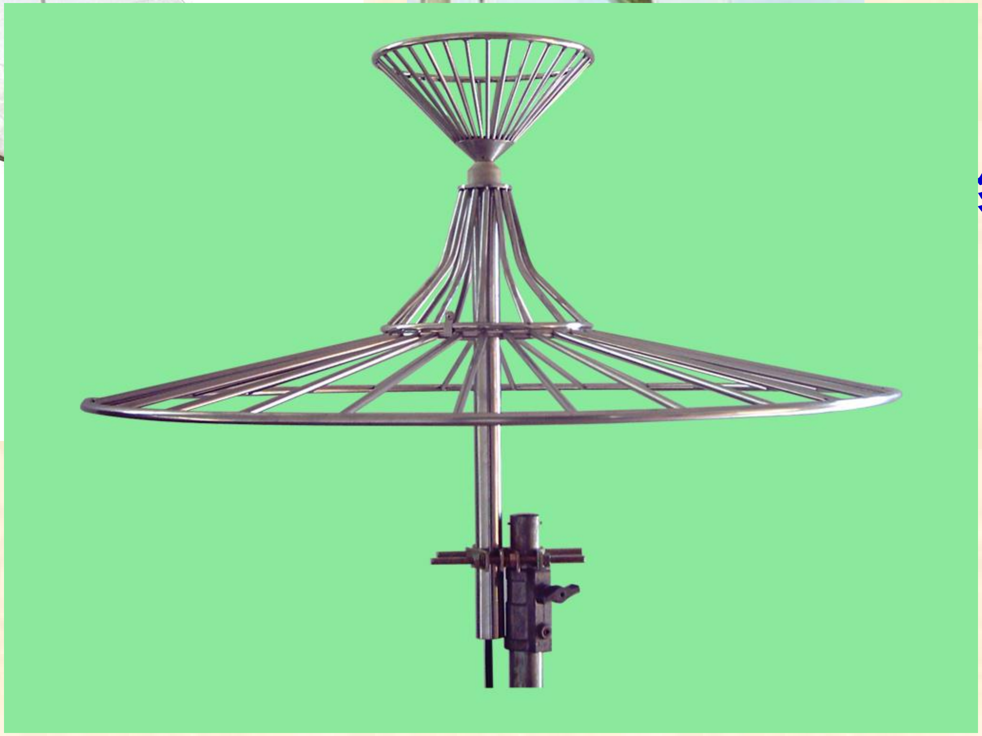


微带天线



卫星接收天线

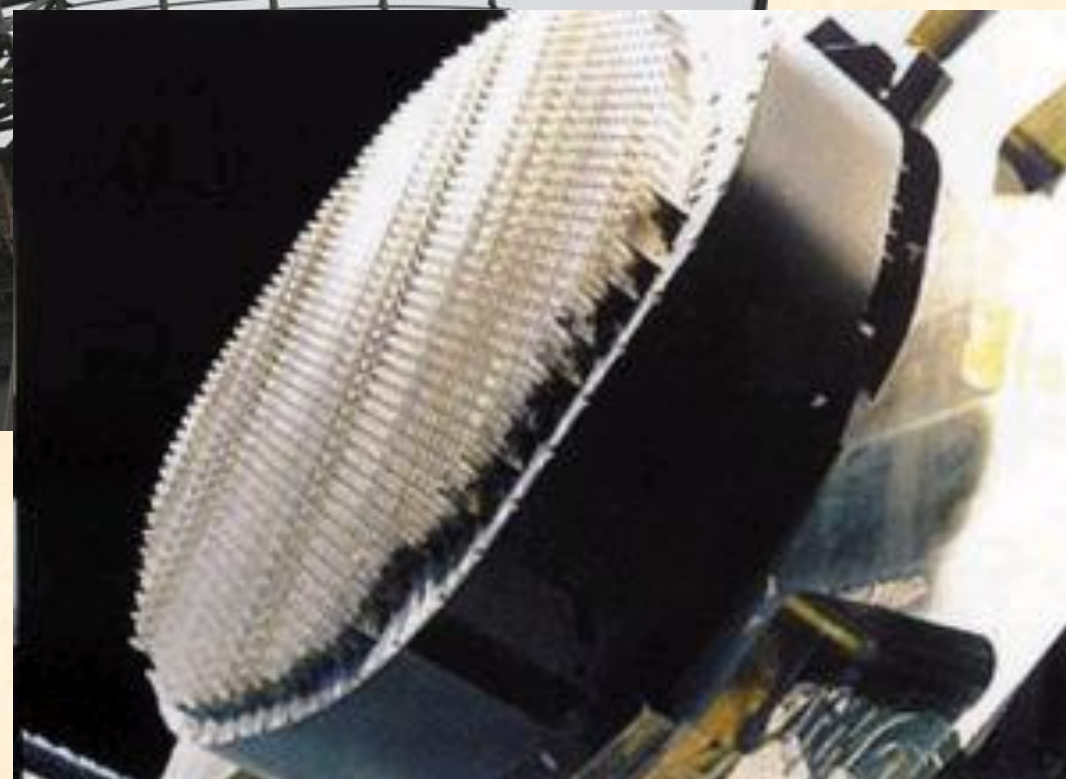
线



宽带全向天线

中国远程相控阵雷达

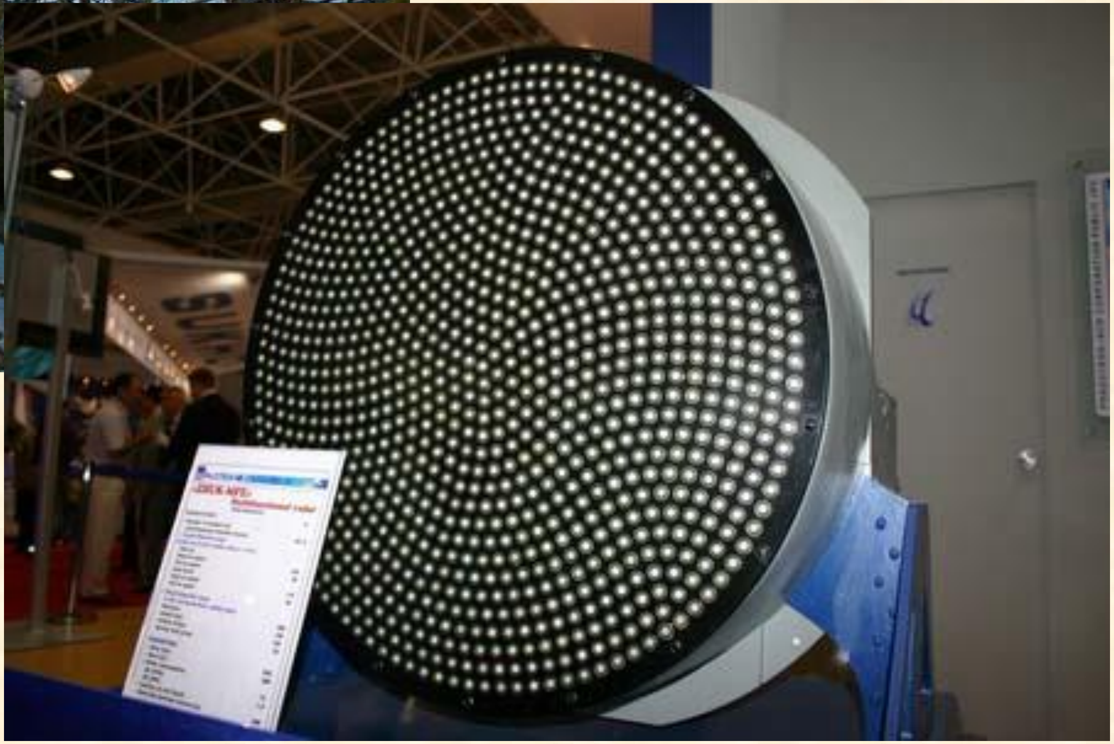
舰载对空搜索雷达天线



相控阵雷达天线

螺旋天线

俄军巨型雷达天线阵列



俄罗斯新型有源相控阵雷达天线