

第七章 动态电路中电压电流的约束关系

当一个实际电路的几何尺寸远远小于工作信号的波长时，我们称它为集总参数电路。集总参数电路中的电压电流受到两类约束，一类约束是拓扑约束，另一类是元件特性的约束。

描述电路中电压电流约束关系的数学方程称为电路方程。

由独立电源和电阻元件构成的电阻电路，其电路方程是一组代数方程。由独立电源和电阻元件以及动态元件构成的动态电路，其电路方程是一组微分方程。

本章首先回顾集总参数电路的基本定律和几种常用的电阻元件的电压电流关系。然后介绍两种储能元件——电容元件和电感元件。最后介绍电路微分方程的建立和开关电路中初始条件的确定。

§ 7-1 集总参数电路中电压电流的约束关系

一、基尔霍夫定律

基尔霍夫定律描述集总参数电路中各电流之间以及各电压之间的约束关系。

基尔霍夫电流定律(KCL): 在任一时刻, 流出集总参数电路中任一结点或封闭面的全部支路电流的代数和等于零。其数学表达式为:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0 \quad (7-1)$$

基尔霍夫电压定律(KVL): 在任一时刻, 集总参数电路中任一回路或闭合路径的全部支路电压的代数和等于零。其数学表达式为

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0 \quad (7-2)$$

基尔霍夫定律给集总参数电路中的电压或电流施加了一种线性约束。它反映电路中各元件的连接关系, 与元件的特性和参数无关。它适用于任何集总参数电路, 也就是说它既适用于由独立电源和电阻元件构成的电阻电路, 也适用于由独立电源和电阻元件以及动态元件构成的动态电路。

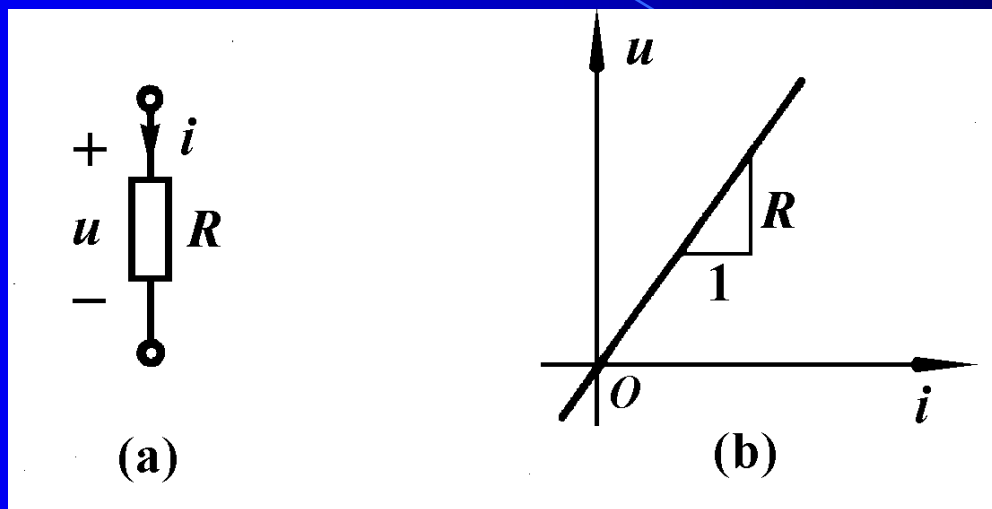
二、电阻元件的电压电流关系

我们将实际电路抽象为电路模型来进行研究，集总参数电路的电路模型是由一些理想的电路元件连接而成。现代电路理论规定了几种电路元件来模拟各种实际的电路。这些电路元件的不同特性对电路中的电压电流也施加了一种约束关系。

在电阻电路分析中定义了以下几种常用的电阻元件。

1. 线性电阻

线性电阻的符号和特性曲线如图(a)和(b)所示。



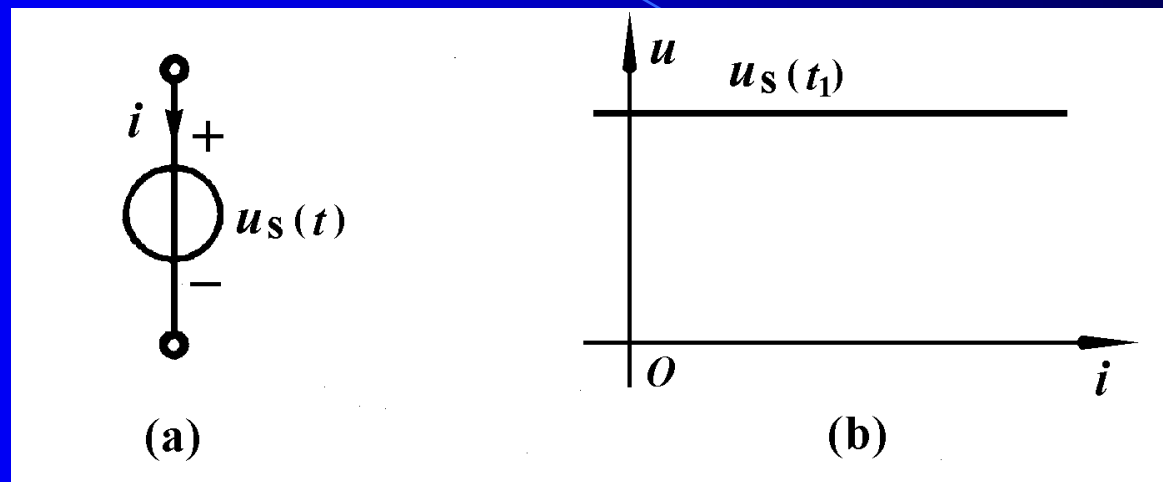
$$u(t) = Ri(t) \quad (7-3)$$

线性电阻的定义是在任一时刻，其电压和电流由 ui 平面上通过原点的直线所确定的二端元件，称为线性电阻元件。

数学表达式 $u=Ri$ 中的 R 称为电阻，是表示线性电阻特性的一个参数。

2.独立电压源

独立电压源的符号和特性曲线如图(a)和(b)所示:

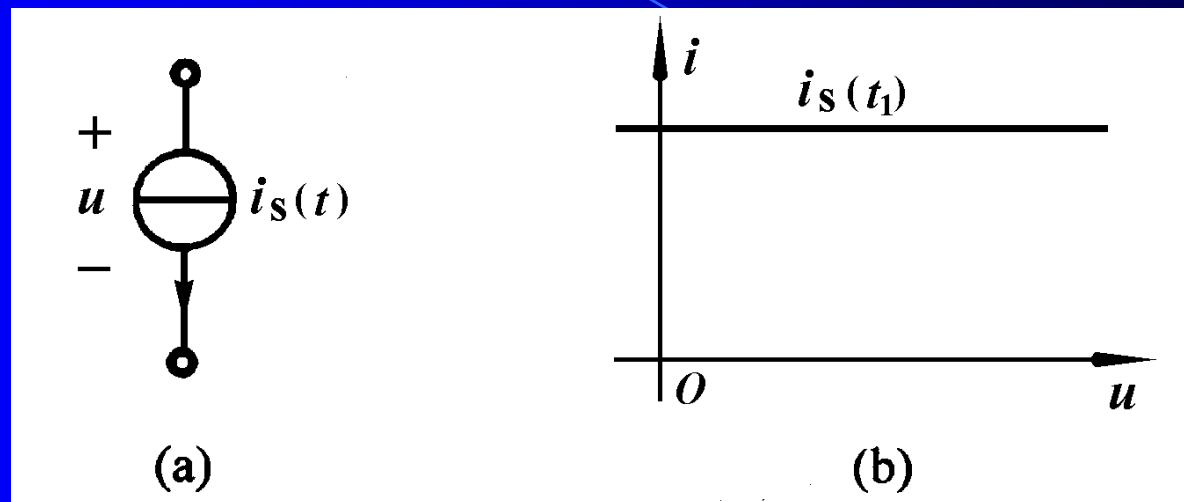


$$u(t) = u_S(t) \quad (7-4)$$

独立电压源的定义是在任一时刻，其电压 $u(t)$ 按照给定的规律 $u_S(t)$ 变化，而与其中电流无关的二端元件，称为独立电压源，简称电压源。 $u_S(t)$ 为常数的电压源称为直流电压源。

3. 独立电流源

独立电流源符号和特性曲线如图(a)和(b)所示:



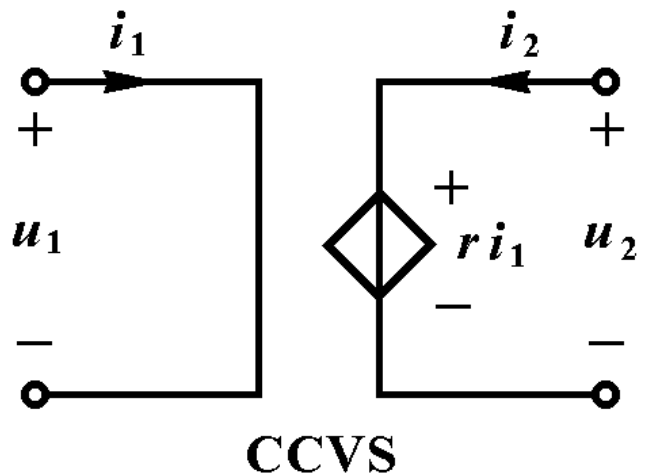
$$i(t) = i_s(t) \quad (7-5)$$

独立电流源的定义是在任一时刻，其电流 $i(t)$ 按照给定的规律 $i_s(t)$ 变化，而与其中电压无关的二端元件，称为独立电流源，简称电流源。 $i_s(t)$ 为常数的电流源称为直流电流源。

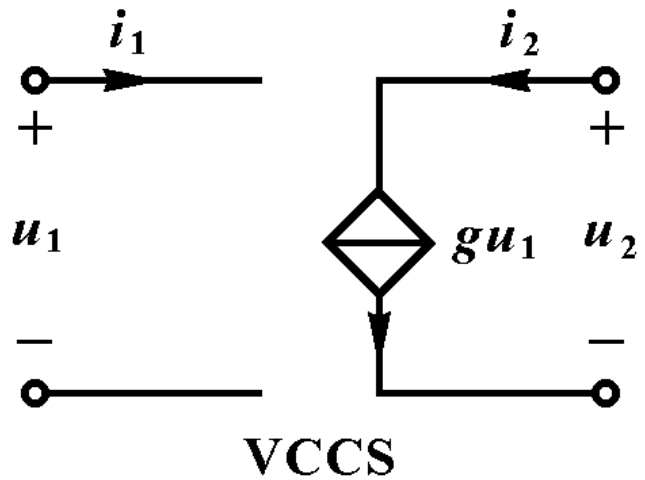
4.受控源和理想变压器

受控源和理想变压器都是一种双口电阻元件，它们的电压电流关系由两个代数方程描述。受控源一条支路的电压或电流受到另外一条支路电压或电流的控制，有以下四种类型。

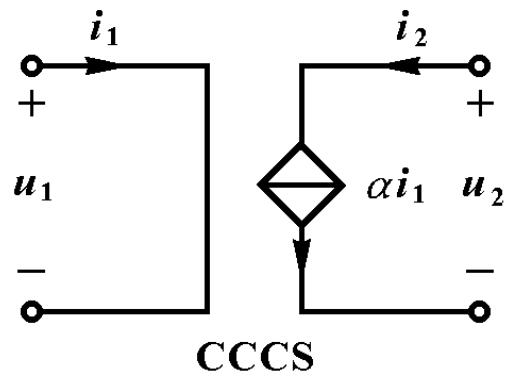
理想变压器唯一的参数是 n ，称为变比。受控源和理想变压器的元件符号和电压电流关系如下图所示：



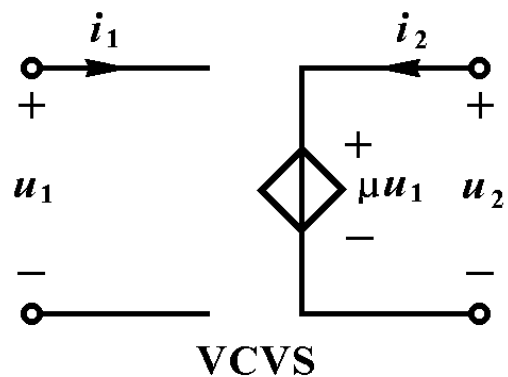
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (7-6)$$



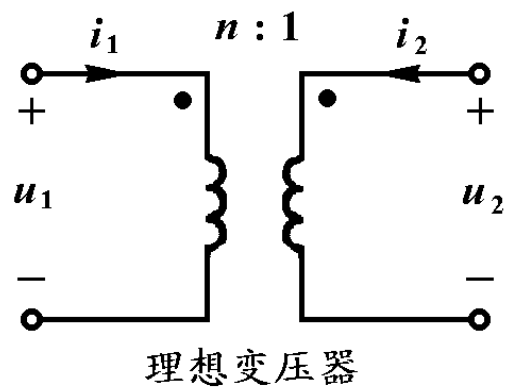
$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (7-7)$$



$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (7-8)$$



$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (7-9)$$



$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (7-10)$$

综上所述，无论是二端电阻元件或者是电阻双口元件，它们的电压电流间存在一种代数约束关系。

由电路元件特性确定的这种约束关系，称为元件约束。

由KCL和KVL确定的约束关系，称为拓扑约束。

§7-2 电容元件

一、电容元件

电容元件的定义是：如果一个二端元件在任一时刻，其电荷与电压之间的关系由 uq 平面上一条曲线所确定，则称此二端元件为电容元件。

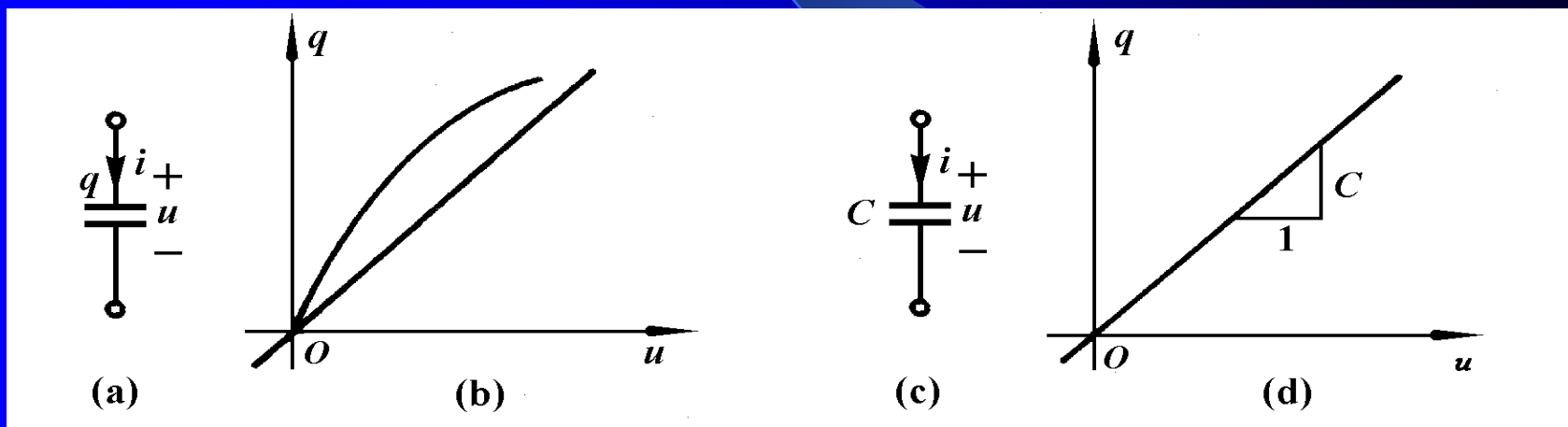


图7-5

电容元件的符号和特性曲线如图7-5(a)和(b)所示。

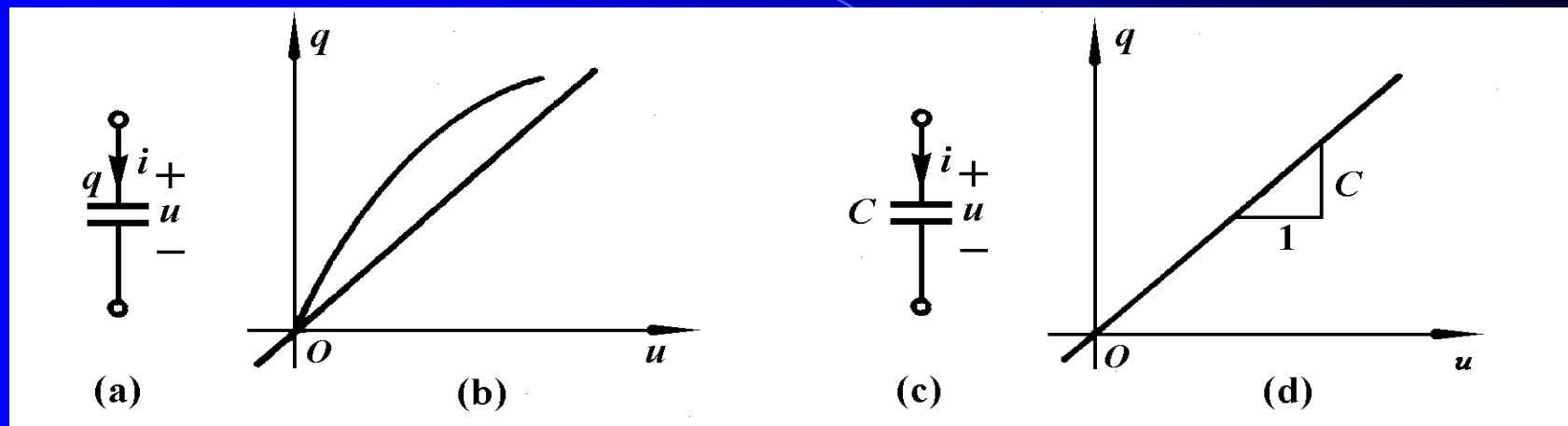


图7-5

a) 电容元件的符号

(c) 线性时不变电容元件的符号

b) 电容元件的特性曲线

(d) 线性时不变电容元件的特性曲线

其特性曲线是通过坐标原点一条直线的电容元件称为线性电容元件，否则称为非线性电容元件。

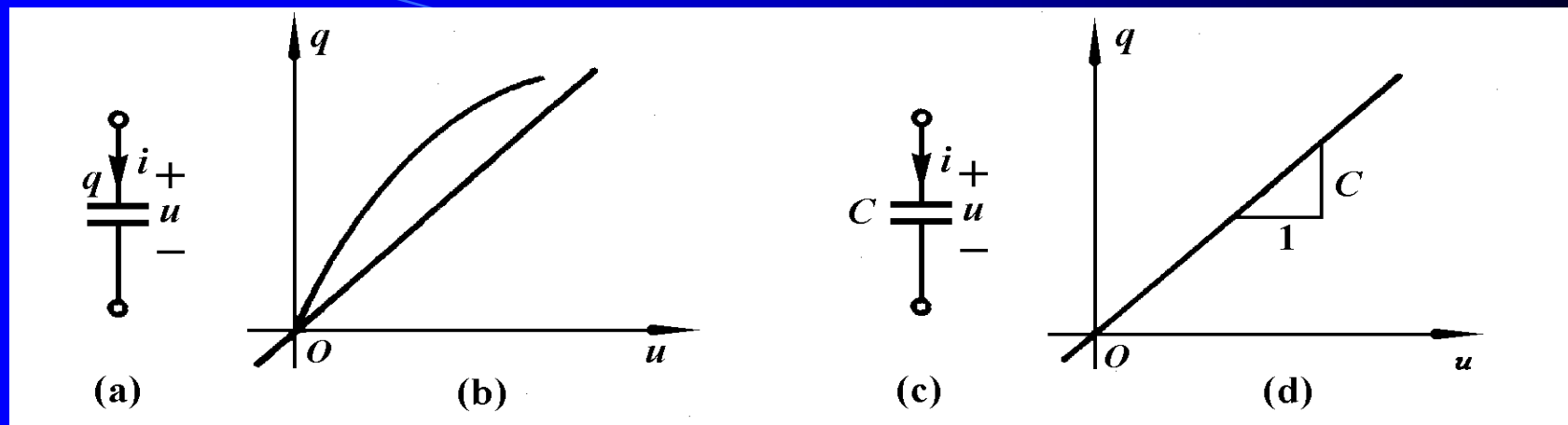


图7-5

线性时不变电容元件的符号与特性曲线如图(c)和(d)所示，它的特性曲线是一条通过原点不随时间变化的直线，其数学表达式为

$$q = Cu \quad (7-11)$$

式中的系数 C 为常量，与直线的斜率成正比，称为电容，单位是法[拉]，用F表示。

实际电路中使用的电容器类型很多，电容的范围变化很大，大多数电容器的漏电很小，在工作电压低的情况下，可以用一个电容作为它的电路模型。当其漏电不能忽略时，则需要用一个电阻与电容的并联作为它的电路模型。

在工作频率很高的情况下，还需要增加一个电感来构成电容器的电路模型，如图7-6所示。

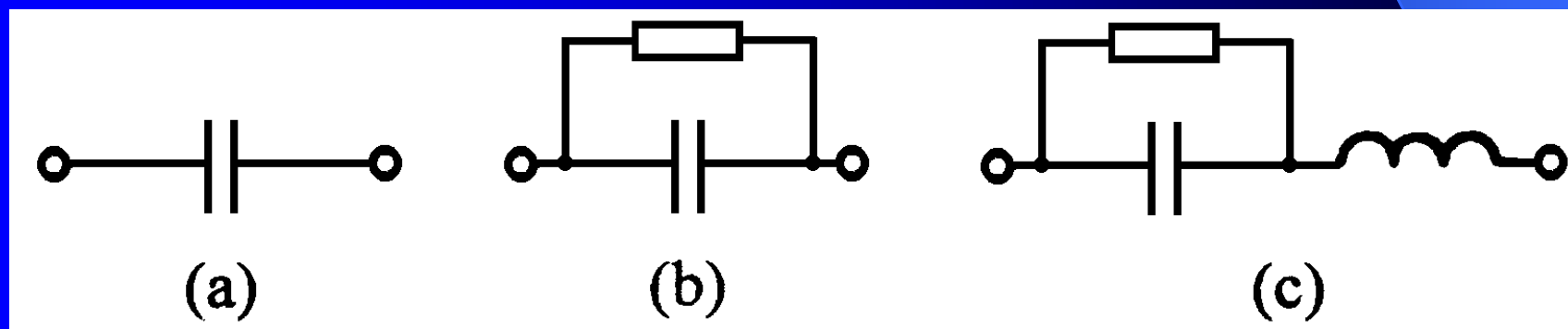


图7-6 电容器的几种电路模型

二、电容元件的电压电流关系

对于线性时不变电容元件来说，在采用电压电流关联参考方向的情况下，可以得到以下关系式

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu)}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad (7-12)$$

此式表明**电容中的电流与其电压对时间的变化率成正比**，它与电阻元件的电压电流之间存在确定的约束关系不同，电容电流与此时刻电压的数值之间并没有确定的约束关系。

在直流电源激励的电路模型中，当各电压电流均不随时间变化的情况下，电容元件相当于一个开路($i=0$)。

在已知电容电压 $u(t)$ 的条件下，用式(7-12)容易求出其电流 $i(t)$ 。例如已知 $C=1\mu\text{F}$ 电容上的电压为 $u(t)=10\sin(5t)\text{V}$ ，其波形如图7-7(a)所示，与电压参考方向关联的电流为

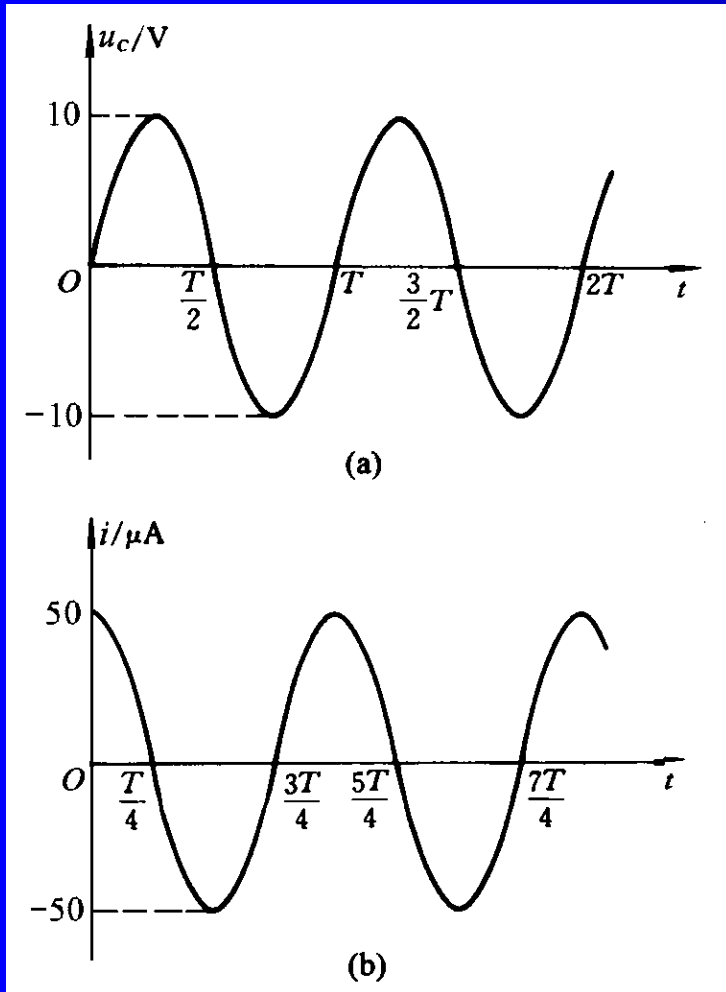


图7-7

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{du}{dt} \\ &= 10^{-6} \times \frac{d[10\sin(5t)]}{dt} \\ &= 50 \times 10^{-6} \cos(5t) \text{ A} \\ &= 50 \cos(5t) \mu\text{ A} \end{aligned}$$

例7-1 已知 $C=0.5\mu\text{F}$ 电容上的电压波形如图7-8(a)所示, 试求电压电流采用关联参考方向时的电流 $i_C(t)$,并画出波形图。

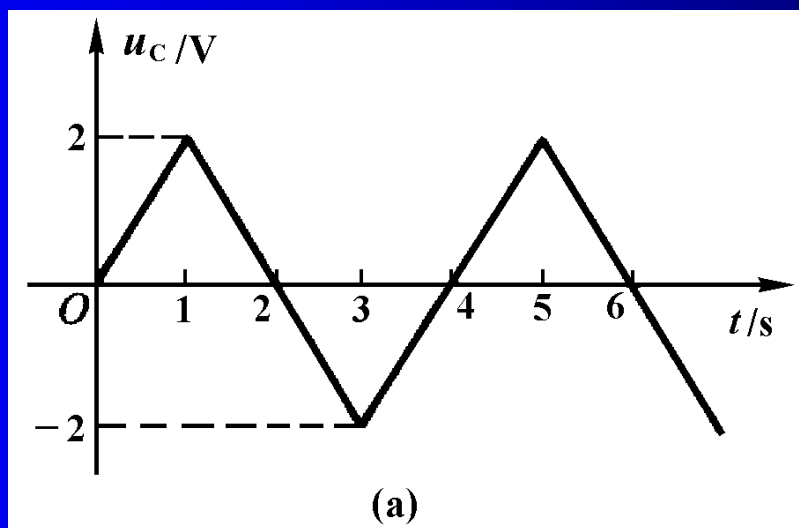


图7-8 例7-1

解：根据图7-8(a)波形的具体情况，按照时间分段来进行计算

1. 当 $0 \leq t \leq 1\text{s}$ 时， $u_C(t) = 2t$ ，根据式7-12可以得到

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = 0.5 \times 10^{-6} \frac{d(2t)}{dt} = 1 \times 10^{-6} \text{ A} = 1 \mu\text{A}$$

2. 当 $1\text{s} \leq t \leq 3\text{s}$ 时， $u_C(t) = 4 - 2t$ ，根据式7-12可以得到

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = 0.5 \times 10^{-6} \frac{d(4 - 2t)}{dt} = -1 \times 10^{-6} \text{ A} = -1 \mu\text{A}$$

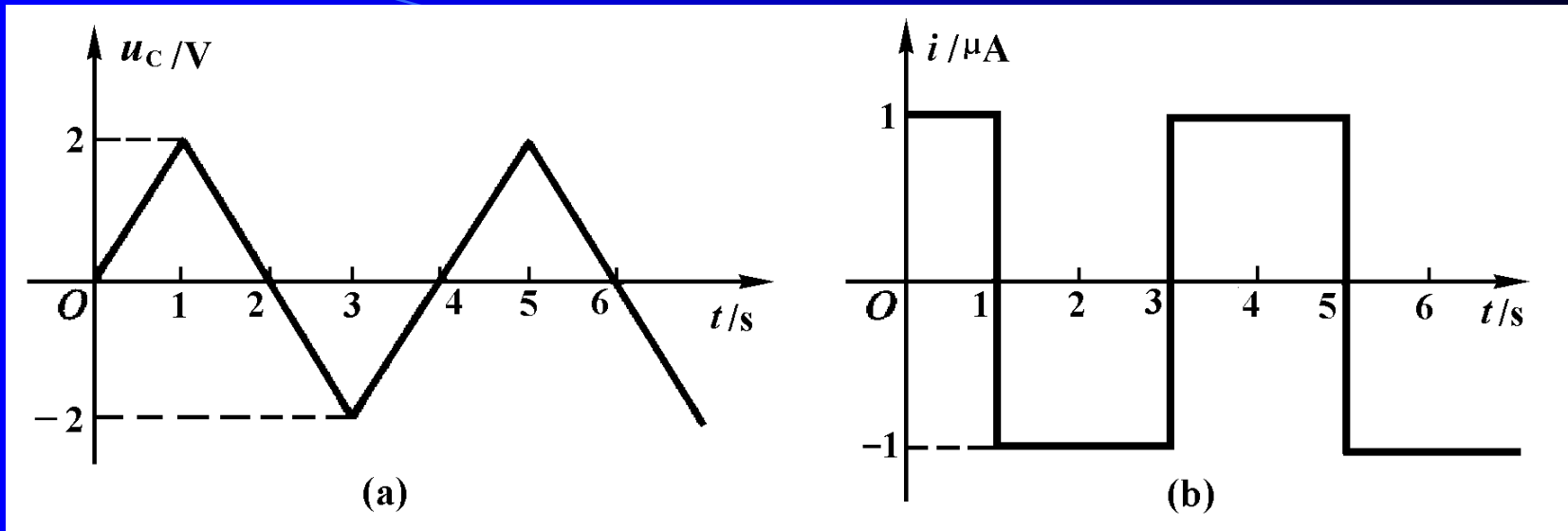


图7-8 例7-1

3. 当 $3s \leq t \leq 5s$ 时, $u_C(t) = -8 + 2t$, 根据式7-12可以得到

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = 0.5 \times 10^{-6} \frac{d(-8 + 2t)}{dt} = 1 \times 10^{-6} A = 1 \mu A$$

4. 当 $5s \leq t$ 时, $u_C(t) = 12 - 2t$, 根据式7-12可以得到

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = 0.5 \times 10^{-6} \frac{d(12 - 2t)}{dt} = -1 \times 10^{-6} A = -1 \mu A$$

在已知电容电流 $i_C(t)$ 的条件下，其电压 $u_C(t)$ 为

$$\begin{aligned}u_C(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_C(\xi) d\xi + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\xi) d\xi \\ &= u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\xi) d\xi\end{aligned}\quad (7-13)$$

其中 $u_C(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_C(\xi) d\xi$ 称为电容电压的初始值。

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_C(\xi) d\xi + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\xi) d\xi = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (7-13)$$

从上式可以看出电容具有两个基本的性质

(1) 电容电压的记忆性。

从式(7-13)可见,任意时刻 T 电容电压的数值 $u_C(T)$,要由从 $-\infty$ 到时刻 T 之间的全部电流 $i_C(t)$ 来确定。也就是说,此时刻以前流过电容的任何电流对时刻 T 的电压都有一定的贡献。这与电阻元件的电压或电流仅仅取决于此时刻的电流或电压完全不同,我们说电容是一种记忆元件。

例7-2 $C=0.5\mu\text{F}$ 的电容电流波形如图7-9(b)所示，试求电容电压 $u_c(t)$ 。

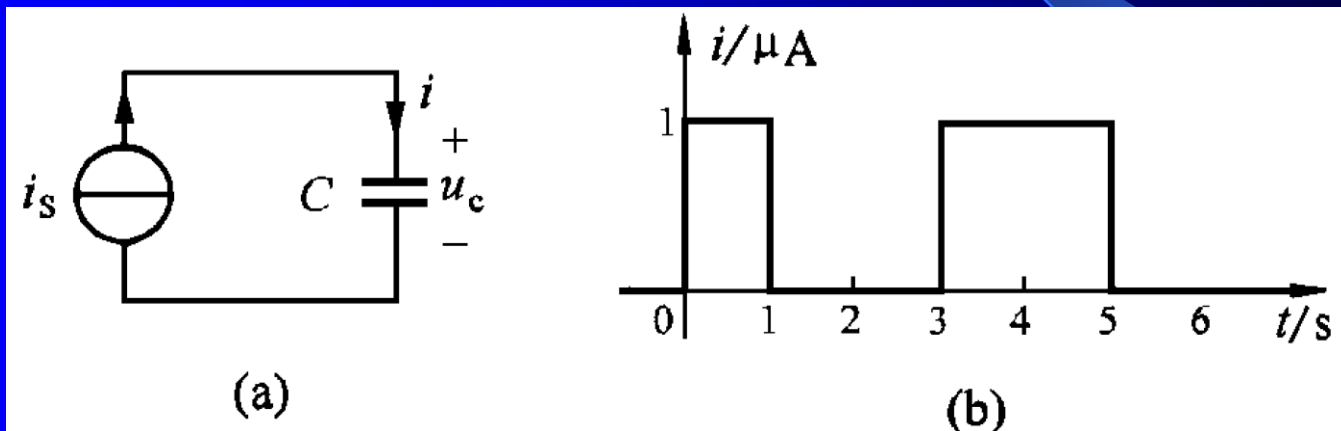
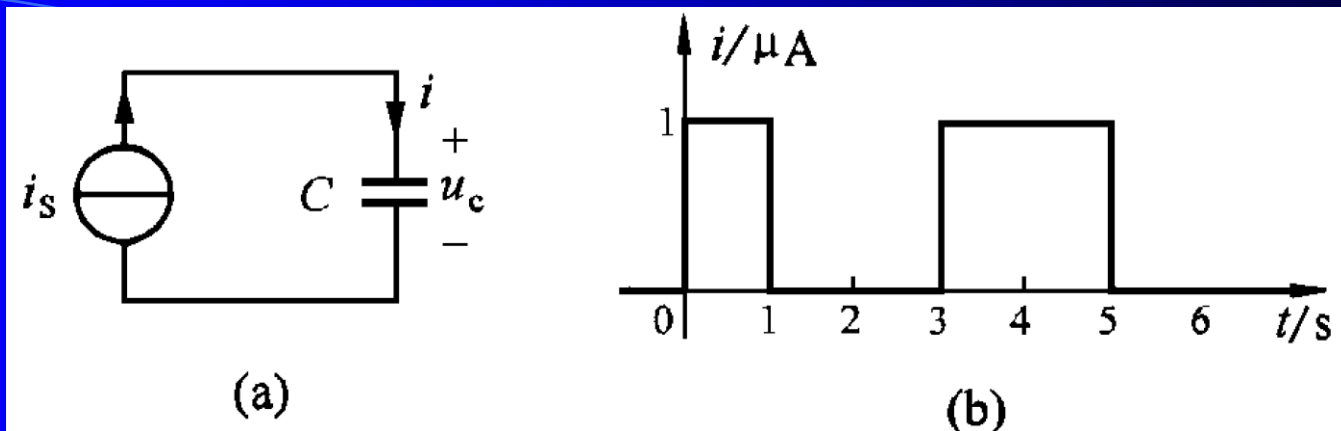


图7-9



解：根据图(b)波形的情况，按照时间分段来进行计算

1. 当 $t \leq 0$ 时， $i_C(t) = 0$ ，根据式7-13可以得到

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\xi) d\xi = 2 \times 10^6 \int_{-\infty}^t 0 d\xi = 0$$

2. 当 $0 \leq t < 1\text{s}$ 时， $i_C(t) = 1\mu\text{A}$ ，根据式7-13可以得到

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\xi) d\xi = u_C(0) + 2 \times 10^6 \int_0^t 10^{-6} d\xi = 0 + 2t = 2t$$

当 $t = 1\text{s}$ 时 $u_C(1\text{s}) = 2\text{V}$

3. 当 $1s \leq t < 3s$ 时, $i_C(t)=0$, 根据式7-13可以得到

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\xi) d\xi = u_C(1) + 2 \times 10^6 \int_1^t 0 d\xi = 2V + 0 = 2V$$

当 $t = 3s$ 时 $u_C(3s) = 2V$

4. 当 $3s \leq t < 5s$ 时, $i_C(t)=1\mu A$, 根据式7-13可以得到

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\xi) d\xi = u_C(3) + 2 \times 10^6 \int_3^t 10^{-6} d\xi = 2 + 2(t - 3)$$

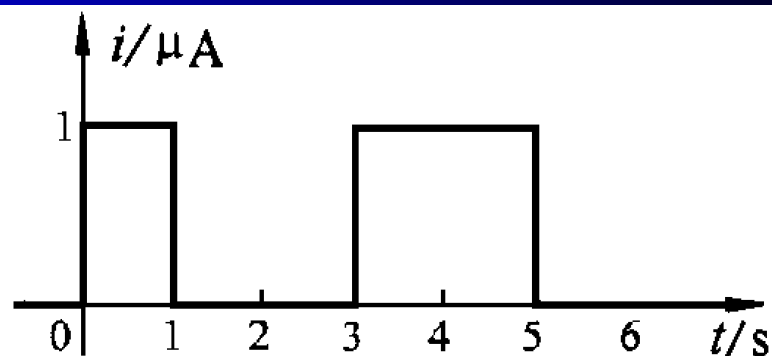
当 $t = 5s$ 时 $u_C(5s) = 2V + 4V = 6V$

5. 当 $5s \leq t$ 时, $i_C(t)=0$, 根据式7-13可以得到

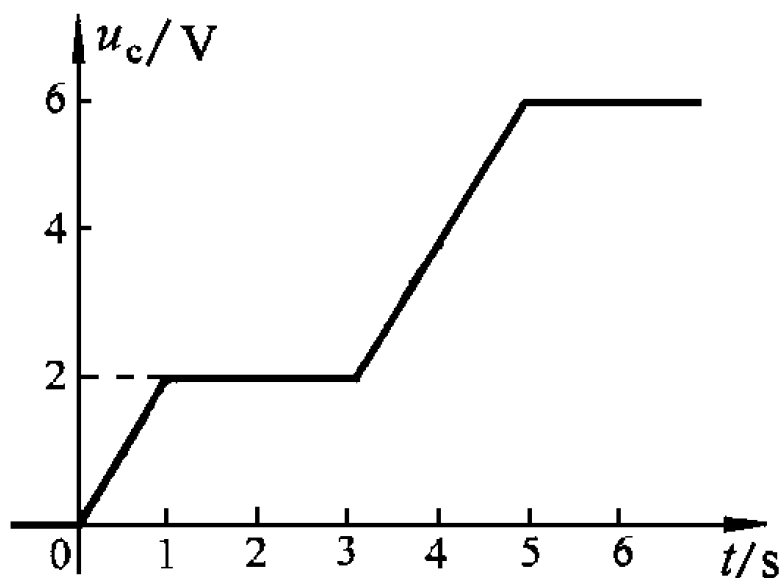
$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\xi) d\xi = u_C(5) + 2 \times 10^6 \int_5^t 0 d\xi = 6V + 0 = 6V$$

根据以上计算结果，可以画出电容电压的波形如图(c)所示，由此可见任意时刻电容电压的数值与此时刻以前的全部电容电流均有关系。

例如，当 $1\text{s} < t < 3\text{s}$ 时，电容电流 $i_C(t) = 0$ ，但是电容电压并不等于零，电容上的 2V 电压是 $0 < t < 1\text{s}$ 时间内电流作用的结果。



(b)



(c)

图7-9

图7-10(a)所示的峰值检波器电路，就是利用电容的记忆性，使输出电压波形[如图(b)中实线所示]保持输入电压 $u_{in}(t)$ 波形[如图(b)中虚线所示]中的峰值。

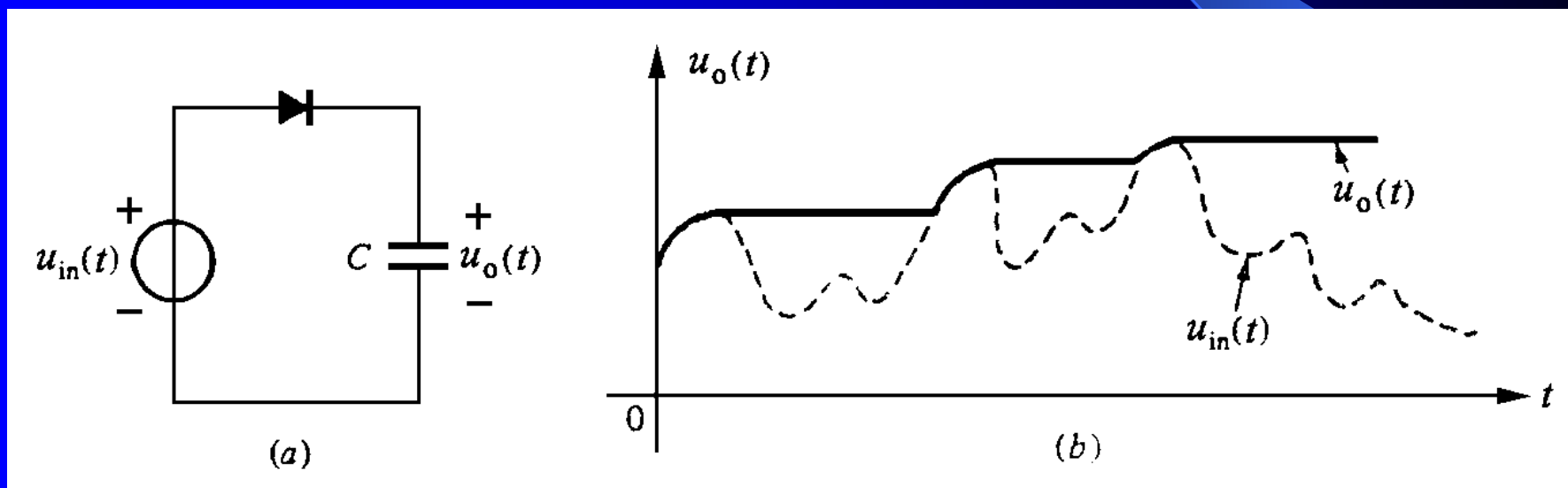


图7-10 峰值检波器电路的输入输出波形

(2) 电容电压的连续性

从例7-2的计算结果可以看出，电容电流的波形是不连续的矩形波，而电容电压的波形是连续的。从这个平滑的电容电压波形可以看出电容电压是连续的一般性质。即电容电流在闭区间 $[t_1, t_2]$ 有界时，电容电压在开区间 (t_1, t_2) 内是连续的。这可以从电容电压、电流的积分关系式中得到证明。

将 $t=T$ 和 $t=T+dt$ 代入式(7-13)中，其中 $t_1 < T < t_2$ 和 $t_1 < T+dt < t_2$ 得到

$$\Delta u = u_C(T+dt) - u_C(T) = \frac{1}{C} \int_T^{T+dt} i_C(\xi) d\xi \Big|_{dt \rightarrow 0} \rightarrow 0 \quad \text{当 } i(\xi) \text{ 有界时}$$

当电容电流有界时，电容电压不能突变的性质，常用下式表示

$$u_C(t_+) = u_C(t_-)$$

对于初始时刻 $t=0$ 来说，上式表示为

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \quad (7-14)$$

利用电容电压的连续性，可以确定电路中开关发生作用后一瞬间的电容电压值，下面举例加以说明。

例7-3 图7-11所示电路的开关闭合已久，求开关在 $t=0$ 时刻断开瞬间电容电压的初始值 $u_C(0_+)$ 。

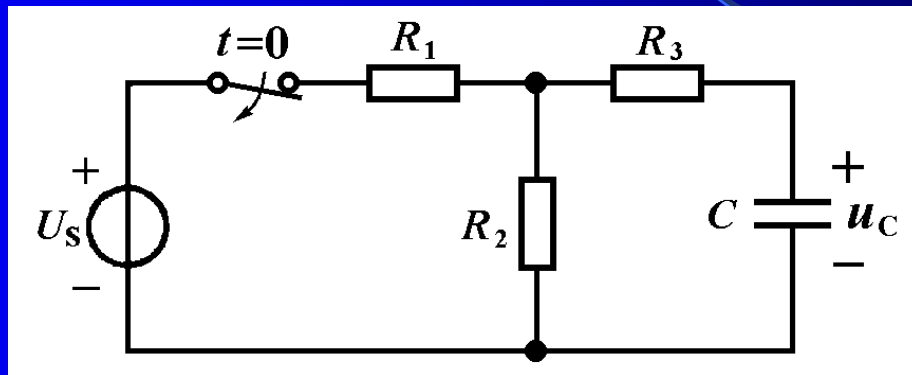


图7-11

解：开关闭合已久，各电压电流均为不随时间变化的恒定值，造成电容电流等于零，即

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = 0$$

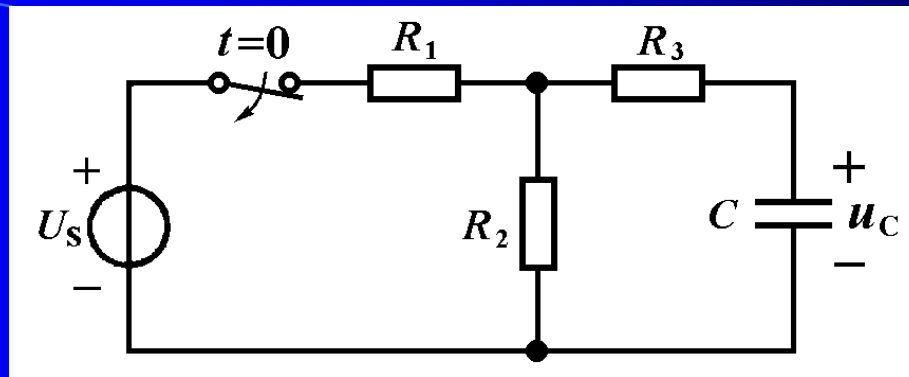


图7-11

电容相当于开路。此时电容电压为

$$u_C(0_-) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_s$$

当开关断开时，在电阻 R_2 和 R_3 不为零的情况下，电容电流为有限值，电容电压不能跃变，由此得到

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_s$$

例7-4 电路如图7-12所示。已知两个电容在开关闭合前一瞬间的电压分别为 $u_{C1}(0_-)=0\text{V}$, $u_{C2}(0_-)=6\text{V}$, 试求在开关闭合后一瞬间, 电容电压 $u_{C1}(0_+)$, $u_{C2}(0_+)$ 。

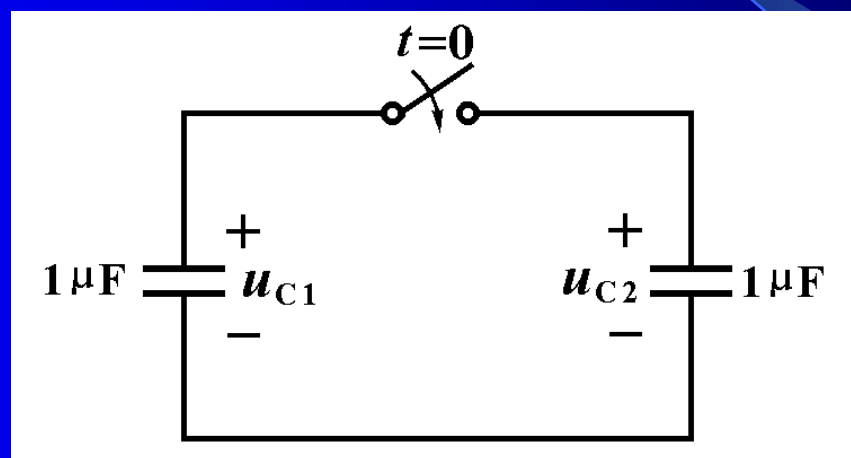


图7-12 例7-4

解: 开关闭合后, 两个电容并联, 按照KVL的约束, 两个电容电压必须相等, 得到以下方程

$$u_{C1}(0_+) = u_{C2}(0_+)$$

再根据在开关闭合前后结点的总电荷相等的电荷守恒定律，可以得到以下方程

$$C_1 u_{C1}(0_+) + C_2 u_{C2}(0_+) = C_1 u_{C1}(0_-) + C_2 u_{C2}(0_-)$$

联立求解以上两个方程，代入数据后得到

$$u_{C1}(0_+) = u_{C2}(0_+) = 3V$$

两个电容的电压都发生了变化， $u_{C1}(t)$ 由0V升高到3V， $u_{C2}(t)$ 则由6V降低到3V。从物理上讲，这是因为电容 C_2 上有3微库仑的电荷移动到 C_1 上所形成的结果，由于电路中电阻为零，电荷的移动可以迅速完成而不需要时间，从而形成无穷大的电流，造成电容电压可以发生跃变。

三、电容的储能

在电压电流采用关联参考方向的情况下，电容的吸收功率为

$$p(t) = u(t)i(t) = u(t)C \frac{du}{dt}$$

由此式可以看出电容是一种储能元件，它在从初始时刻 t_0 到任意时刻 t 时间内得到的能量为

$$\begin{aligned} W(t_0, t) &= \int_{t_0}^t p(\xi) d\xi = C \int_{t_0}^t u(\xi) \frac{du}{d\xi} d\xi \\ &= C \int_{u(t_0)}^{u(t)} u du = \frac{1}{2} C [u^2(t) - u^2(t_0)] \end{aligned}$$

若电容的初始储能为零，即 $u(t_0)=0$ ，则任意时刻储存在电容中的能量为

$$W_C(t) = \frac{1}{2} C u^2(t) \quad (7-15)$$

此式说明某时刻电容的储能取决于该时刻电容的电压值，与电容的电流值无关。

电容电压的绝对值增大时，电容储能增加；电容电压的绝对值减小时，电容储能减少。

$$W_C(t) = \frac{1}{2} C u^2(t) \quad (7-15)$$

当 $C>0$ 时， $W(t)$ 不可能为负值，电容不可能放出多于它储存的能量，这说明电容是一种储能元件。由于电容电压确定了电容的储能状态，称电容电压为状态变量。

从式(7-15)也可以理解为什么电容电压不能轻易跃变，这是因为电容电压的跃变要伴随电容储存能量的跃变，在电流有界的情况下，是不可能造成电场能量发生跃变和电容电压发生跃变的。

§7-3 电感元件

一、电感元件

如果一个二端元件在任一时刻，其磁通链与电流之间的关系由 $i - \psi$ 平面上一条曲线所确定，则称此二端元件为电感元件。电感元件的符号和特性曲线如图7-13(a)和(b)所示。

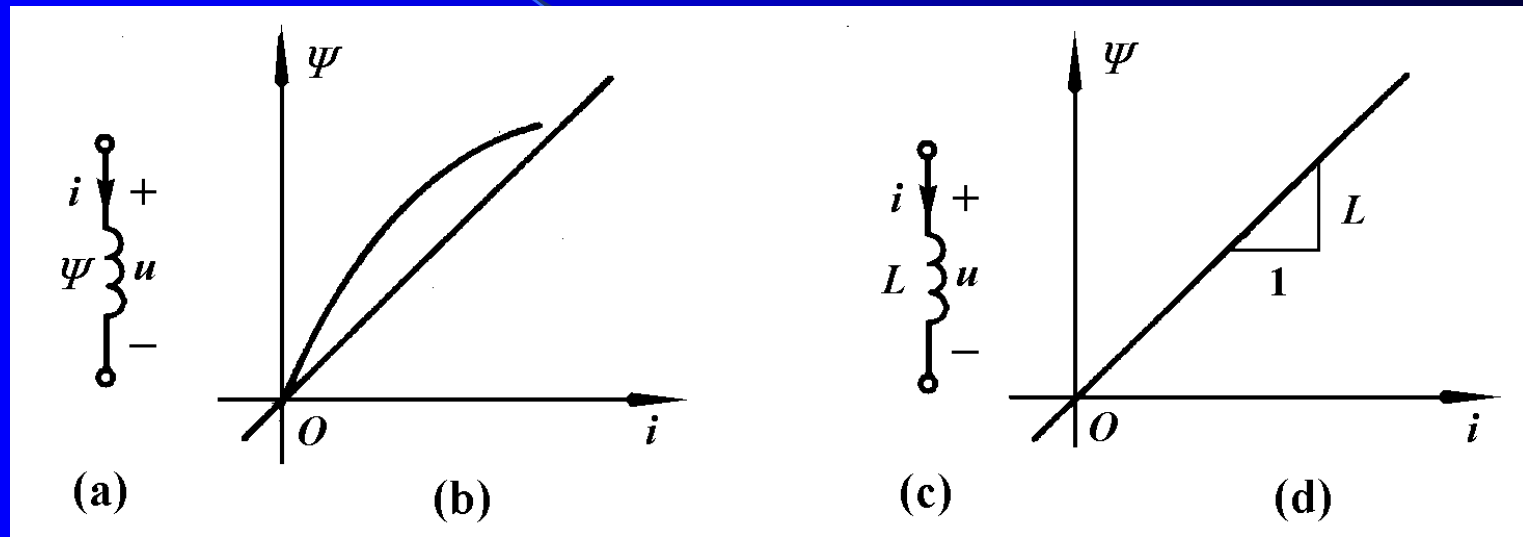


图7-13

(a) 电感元件的符号

(b) 电感元件的特性曲线

(c) 线性时不变电感元件的符号

(d) 线性时不变电感的特性曲线

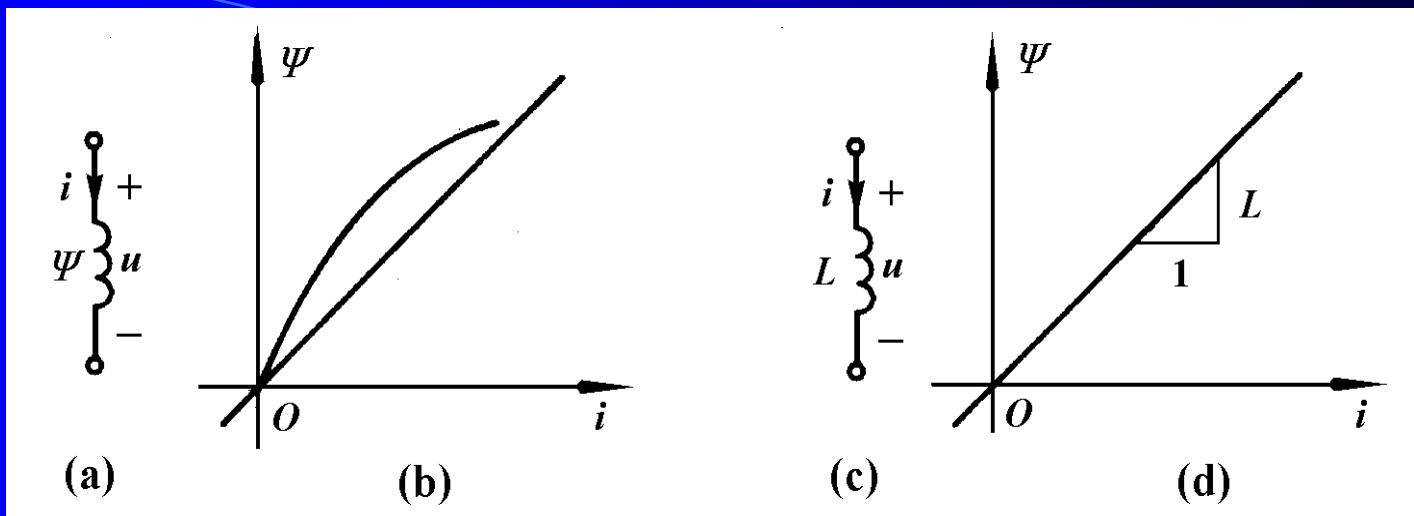


图7-13

其特性曲线是通过坐标原点一条直线的电感元件称为线性电感元件，否则称为非线性电感元件。线性时不变电感元件的符号与特性曲线如图(c)和(d)所示，它的特性曲线是一条通过原点不随时间变化的直线，其数学表达式为

$$\psi = Li \quad (7-16)$$

式中的系数 L 为常量，与直线的斜率成正比，称为电感，单位是亨[利]，用H表示。

实际电路中使用的电感线圈类型很多，电感的范围变化很大，例如高频电路中使用的线圈容量可以小到几个 μH ($1\mu\text{H}=10^{-6}\text{H}$)，低频滤波电路中使用扼流圈的电感可以大到几亨。电感线圈可以用一个电感或一个电感与电阻的串联作为它的电路模型。在工作频率很高的情况下，还需要增加一个电容来构成线圈的电路模型，如图7-14所示。

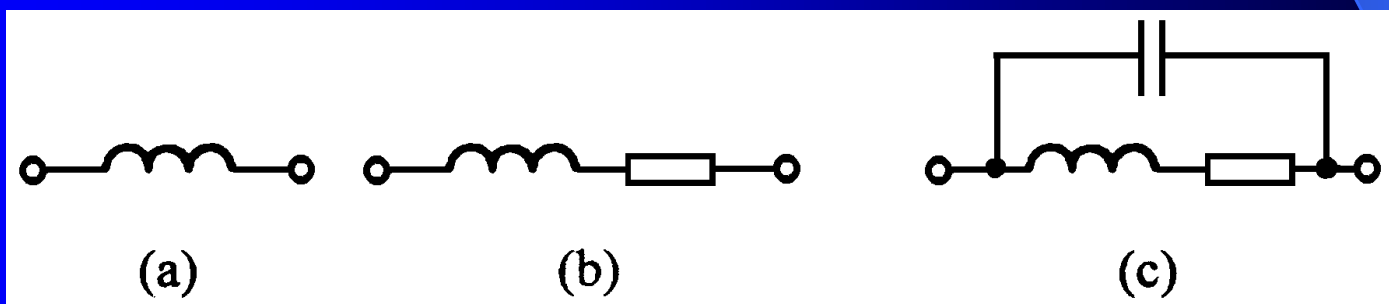


图7-14 电感器的几种电路模型

二、电感的电压电流关系

对于线性时不变电感元件来说，在采用电压电流关联参考方向的情况下，可以得到

$$u(t) = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (7-17)$$

此式表明电感中的电压与其电流对时间的变化率成正比，与电阻元件的电压电流之间存在确定的约束关系不同，电感电压与此时刻电流的数值之间并没有确定的约束关系。

在直流电源激励的电路中，磁场不随时间变化，各电压电流均不随时间变化时，电感相当于一个短路($u=0$)。

在已知电感电流*i(t)*的条件下，用式(7-17)容易求出其电压*u(t)*。

例如*L=1mH*的电感上，施加电流为*i(t)=10sin(5t)A*时，其关联参考方向的电压为

$$\begin{aligned}u(t) &= L \frac{di}{dt} = 10^{-3} \times \frac{d[10 \sin(5t)]}{dt} \\ &= 50 \times 10^{-3} \cos(5t) \text{V} = 50 \cos(5t) \text{mV}\end{aligned}$$

电感电压的数值与电感电流的数值之间并无确定的关系，例如将电感电流增加一个常量*k*，变为*i(t)=k+10sin5tA*时，电感电压不会改变，这说明电感元件并不具有电阻元件在电压电流之间有确定关系的特性。

例7-5 电路如图7-15(a)所示, 已知 $L=5\mu\text{H}$ 电感上的电流波形如图7-15(b)所示, 求电感电压 $u(t)$,并画出波形图。

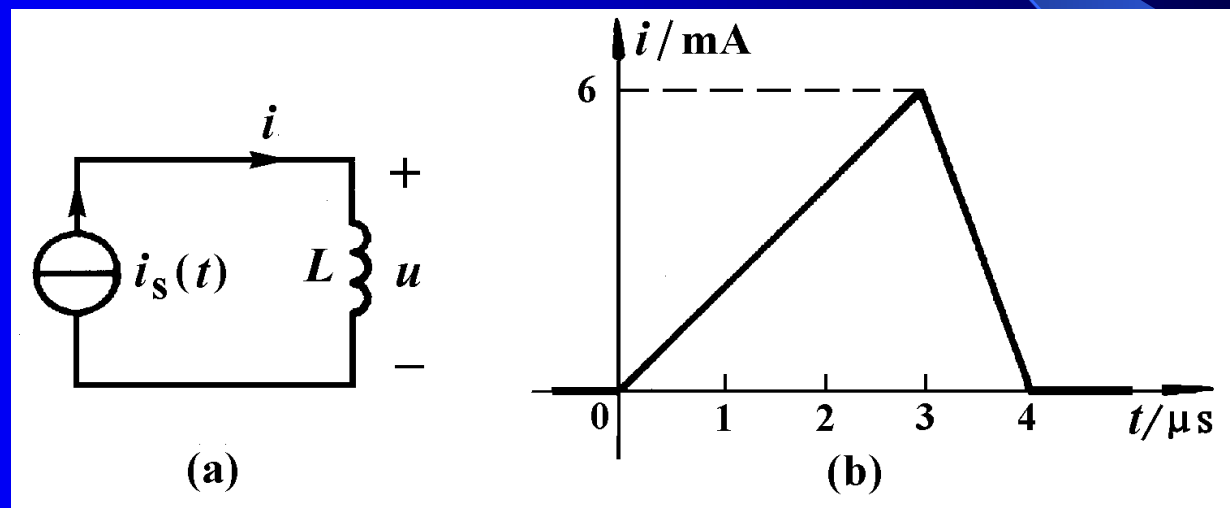
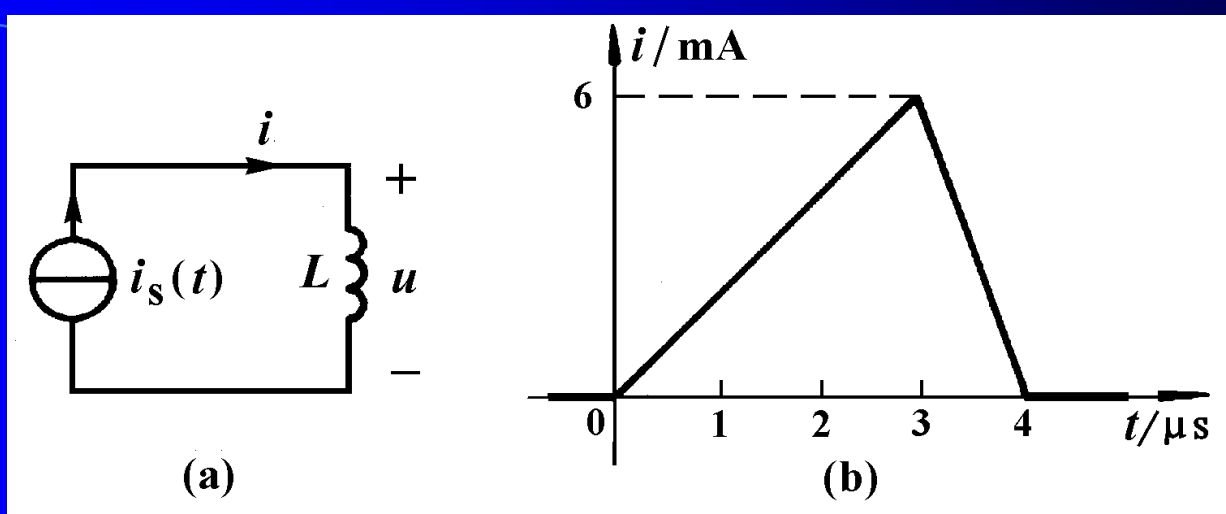


图7-15 例7-5



解：根据图7-15(b)波形的具体情况，按照时间分段来进行计算

1. 当 $t \leq 0$ 时， $i(t) = 0$ ，根据式7-17可以得到

$$u(t) = L \frac{di}{dt} = 5 \times 10^{-6} \frac{d(0)}{dt} = 0$$

2. 当 $0 \leq t \leq 3 \mu\text{s}$ 时， $i(t) = 2 \times 10^3 t$ ，根据式7-17可以得到

$$u(t) = L \frac{di}{dt} = 5 \times 10^{-6} \frac{d(2 \times 10^3 t)}{dt} = 10 \times 10^{-3} \text{ V} = 10 \text{ mV}$$

3. 当 $3\mu\text{s} \leq t \leq 4\mu\text{s}$ 时, $i(t) = 24 \times 10^3 - 6 \times 10^3 t$, 根据式 7-17 可以得到

$$\begin{aligned} u(t) &= L \frac{di}{dt} \\ &= 5 \times 10^{-6} \frac{d(24 \times 10^3 - 6 \times 10^3 t)}{dt} \\ &= -30 \times 10^{-3} \text{ V} = -30 \text{ mV} \end{aligned}$$

4. 当 $4\mu\text{s} \leq t$ 时, $i(t) = 0$, 根据式 7-17 可以得到

$$u(t) = L \frac{di}{dt} = 5 \times 10^{-6} \frac{d(0)}{dt} = 0$$

根据以上计算结果，画出相应的波形，如图7-15(c)所示。这说明电感电流为三角波形时，其电感电压为矩形波形。

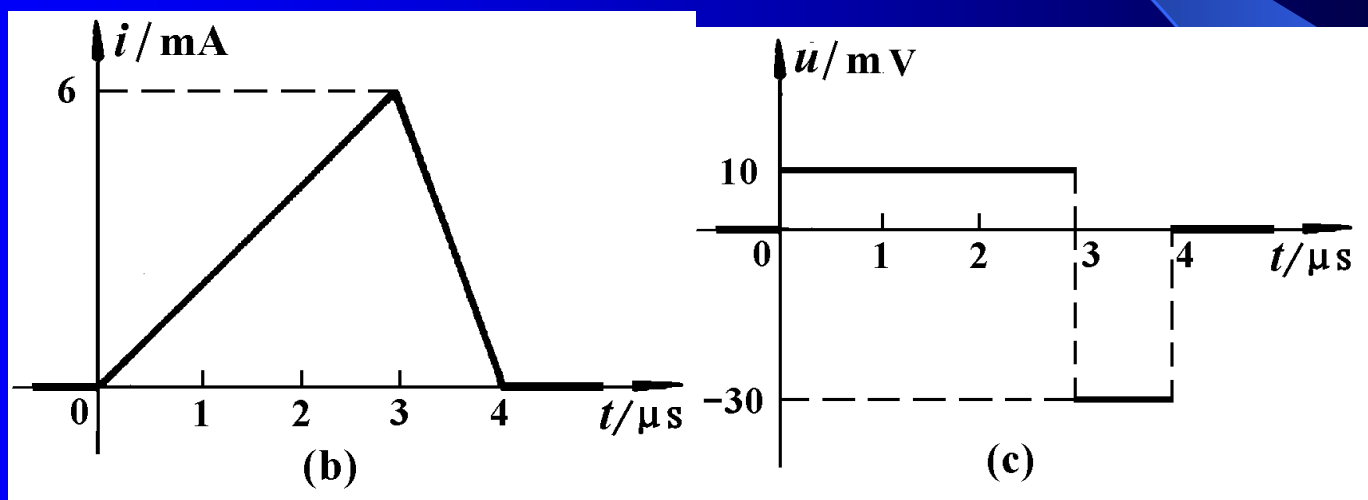


图7-15

在已知电感电压 $u_L(t)$ 的条件下，其电流 $i_L(t)$ 为

$$\begin{aligned}i_L(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\xi) d\xi \\ &= i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\xi) d\xi\end{aligned}\quad (7-18)$$

其中

$$i_L(0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L(\xi) d\xi$$

称为电感电流的初始值。

从上式可以看出电感具有两个基本的性质。

(1) 电感电流的记忆性。

从式(7-18)可见,任意时刻 T 电感电流的数值 $i_L(T)$,要由从 $-\infty$ 到时刻 T 之间的全部电压来确定。

也就是说,此时刻以前在电感上的任何电压对时刻 T 的电感电流都有一份贡献。这与电阻元件的电压或电流仅取决于此时刻的电流或电压完全不同,我们说电感是一种记忆元件。

例7-6 电路如图7-16(a)所示，已知 $L=0.5\text{mH}$ 的电感电压波形如(b)所示，试求电感电流。

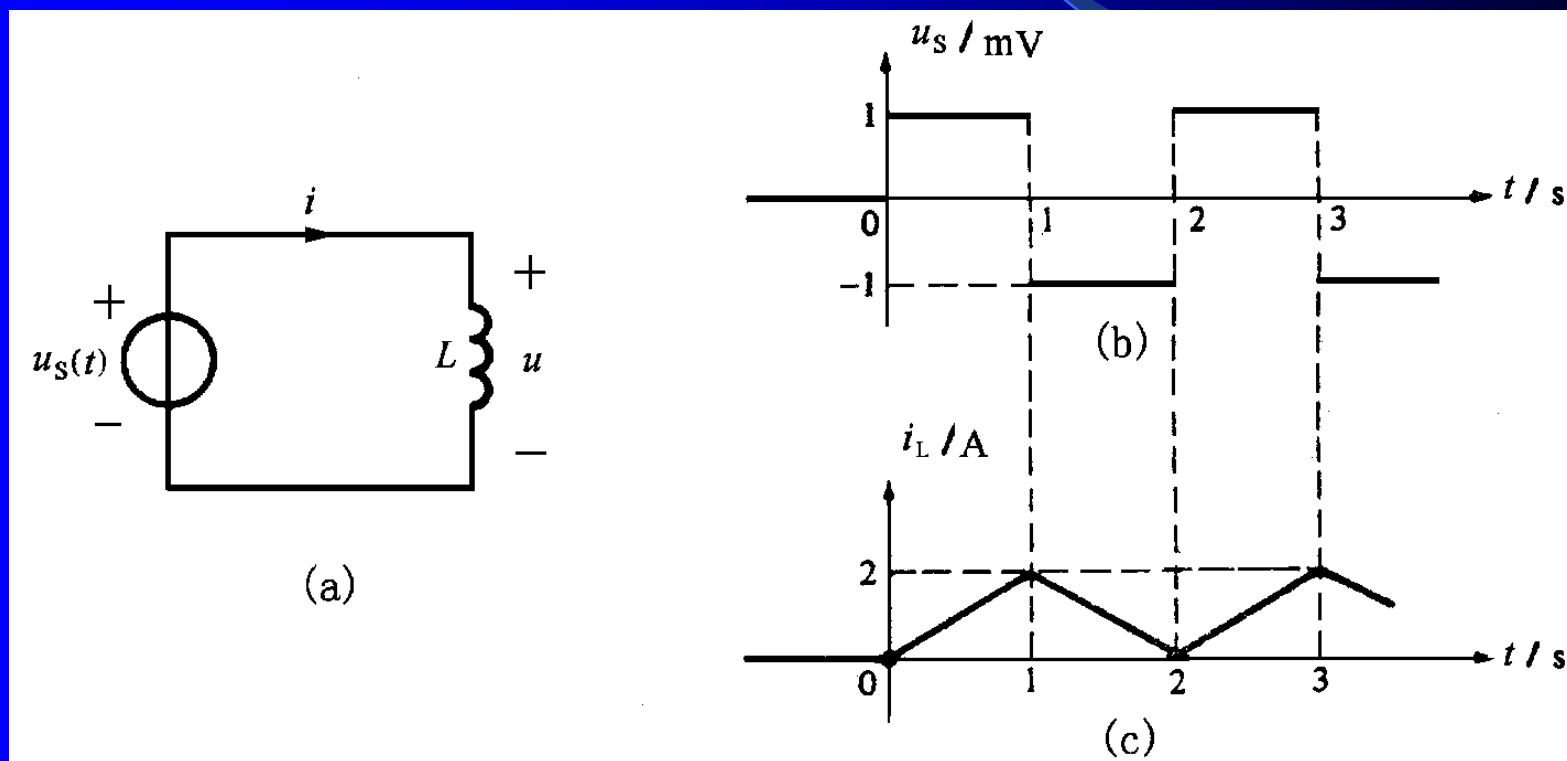
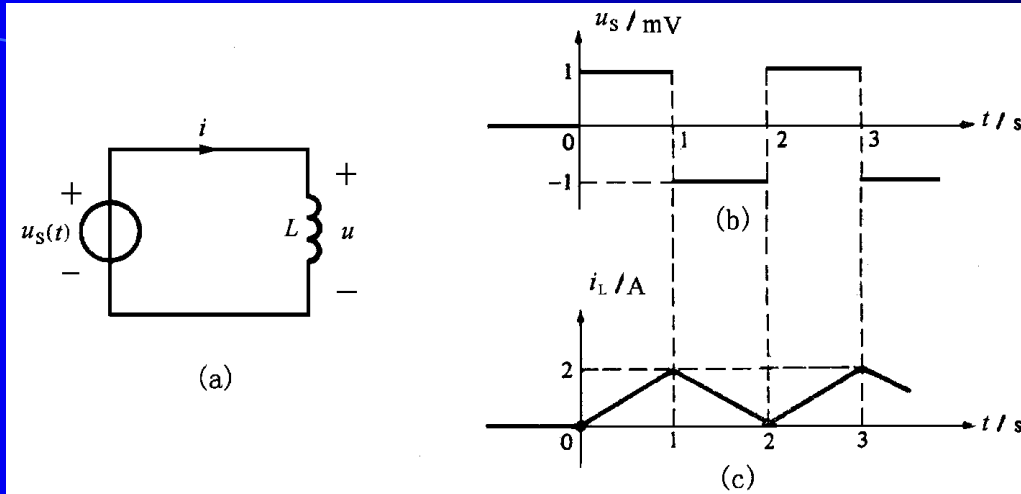


图7-16



解：根据图(b)波形，按照时间分段来进行积分运算

1. 当 $t < 0$ 时， $u(t) = 0$ ，根据式 7-18 可以得到

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi = 2 \times 10^3 \int_{-\infty}^t 0 d\xi A = 0$$

2. 当 $0 < t < 1s$ 时， $u(t) = 1mV$ ，根据式 7-18 可以得到

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi = i_L(0) + 2 \times 10^3 \int_0^t 10^{-3} d\xi = 0 + 2tA = 2tA$$

当 $t = 1s$ 时 $i_L(1s) = 2A$

3. 当 $1s < t < 2s$ 时, $u(t) = -1mV$, 根据式 7-18 可以得到

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi = i_L(1) + 2 \times 10^3 \int_1^t -10^{-3} d\xi = 2A - 2(t-1)A$$

当 $t = 2s$ 时 $i_L(2s) = 0A$

4. 当 $2s < t < 3s$ 时, $u(t) = 1mV$, 根据式 7-18 可以得到

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi = i_L(2) + 2 \times 10^3 \int_2^t 10^{-3} d\xi = 0 + 2(t-2)A$$

当 $t = 3s$ 时 $i_L(3s) = 2A$

5. 当 $3s < t < 4s$ 时, $u(t) = -1mV$, 根据式 7-18 可以得到

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi = i_L(3) + 2 \times 10^3 \int_3^t (-10^{-3}) d\xi = 2A - 2(t-3)A$$

当 $t = 4s$ 时 $i_L(4s) = 0A$

(2) 电感电流的连续性

从电感电压、电流的积分关系式可以看出,电感电压在闭区间 $[t_1, t_2]$ 有界时,电感电流在开区间 (t_1, t_2) 内是连续的。

$$\begin{aligned}\Delta i &= i_L(t_+) - i_L(t_-) \\ &= \frac{1}{L} \int_{t_-}^{t_+} u_L(\xi) d\xi \rightarrow 0\end{aligned}$$

当 $u_L(\xi)$ 有界时

也就是说，当电感电压有界时，电感电流不能跃变，只能连续变化，即存在以下关系

$$i_L(t_+) = i_L(t_-)$$

对于初始时刻 $t=0$ 来说，上式表示为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) \quad (7-19)$$

利用电感电流的连续性，可以确定电路中开关发生作用后一瞬间的电感电流值。

例7-7 图7-17(a)所示电路的开关闭合已久，求开关在 $t=0$ 断开时电容电压和电感电流的初始值 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 。

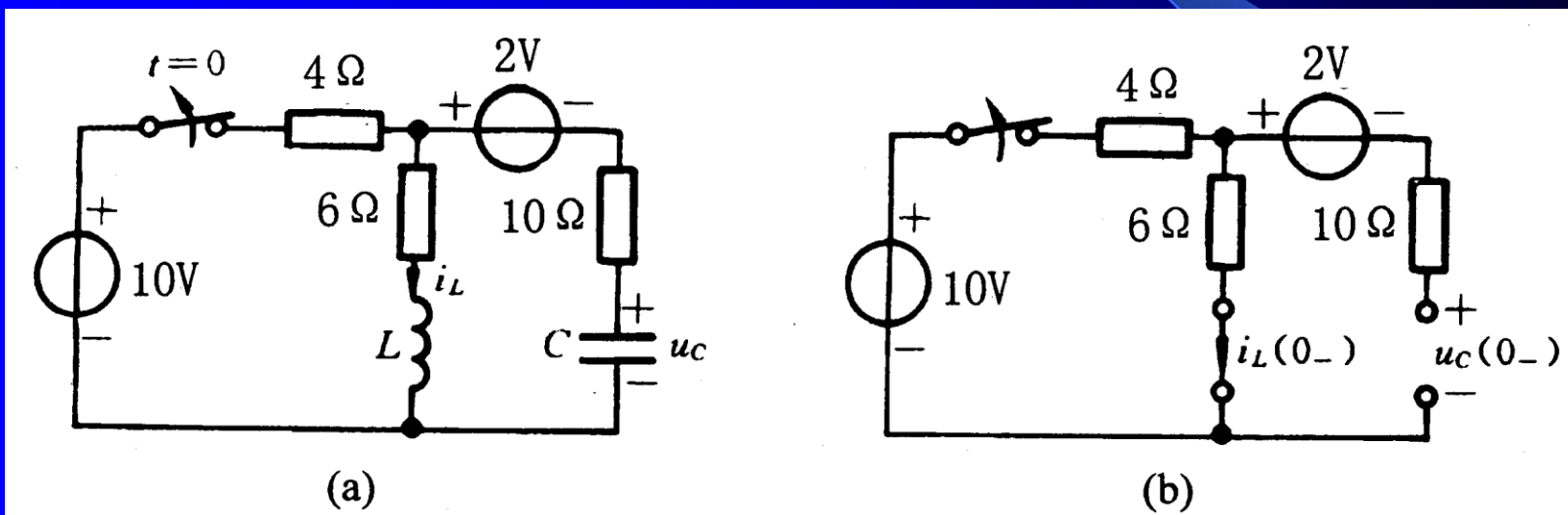
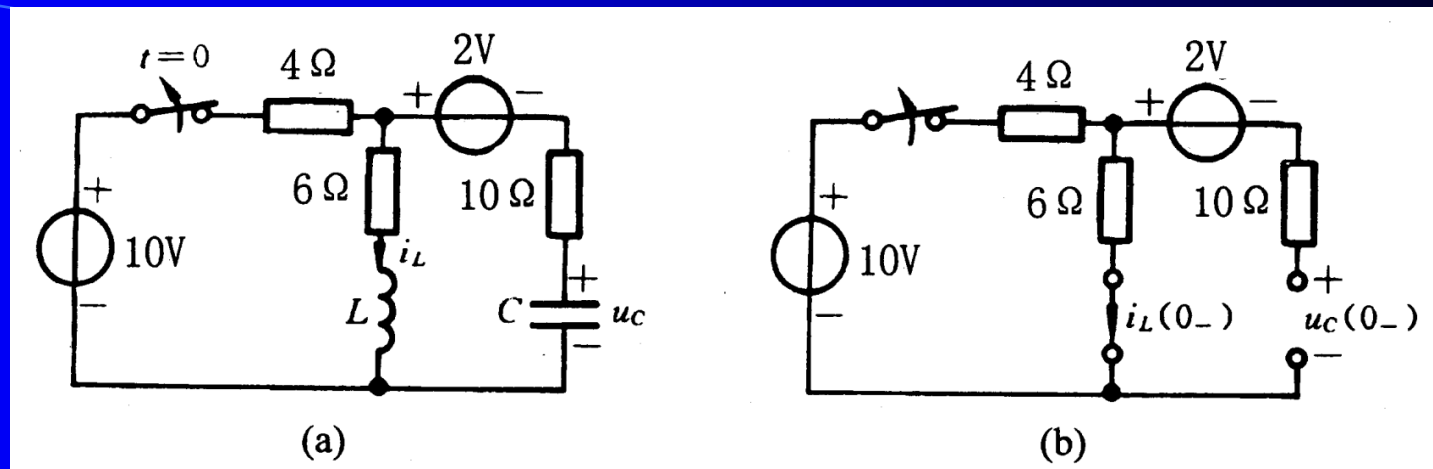


图7-17



解：由于各电压电流均为不随时间变化的恒定值，电感相当于短路；电容相当于开路，如图(b)所示。

此时

$$i_L(0_-) = \frac{10\text{V}}{4\Omega + 6\Omega} = 1\text{A}$$

$$u_C(0_-) = \frac{6\Omega}{4\Omega + 6\Omega} \times 10\text{V} - 2\text{V} = 4\text{V}$$

当开关断开时，电感电流不能跃变；电容电压不能跃变。

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\text{A} \quad u_C(0_+) = u_C(0_-) = 4\text{V}$$

三、电感的储能

在电压电流采用关联参考方向的情况下，电感的吸收功率为

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) \\ &= i(t)L \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

当 $p > 0$ 时，电感吸收功率；当 $p < 0$ 时，电感发出功率。

电感在从初始时刻 t_0 到任意时刻 t 时间内得到的能量为

$$\begin{aligned} W(t_0, t) &= \int_{t_0}^t p(\xi) d\xi = L \int_{t_0}^t i(\xi) \frac{di(\xi)}{d\xi} d\xi \\ &= L \int_{i(t_0)}^{i(t)} i di = \frac{1}{2} L [i^2(t) - i^2(t_0)] \end{aligned}$$

若电感的初始储能为零，即 $i(t_0)=0$ ，则任意时刻储存在电感中的能量为

$$W_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) \quad (7-20)$$

此式说明某时刻电感的储能取决于该时刻电感的电流值，与电感的电压值无关。电感电流的绝对值增大时，电感储能增加；电感电流的绝对值减小时，电感储能减少。

由于电感电流确定了电感的储能状态，称电感电流为状态变量。

从式(7-20)也可以理解为什么电感电流不能轻易跃变，这是因为电感电流的跃变要伴随电感储存能量的跃变，在电压有界的情况下，是不可能造成磁场能量发生突变和电感电流发生跃变的。

$$q = Cu$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$$

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\xi) d\xi \\ &= u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

$$W_C(t) = \frac{1}{2} C u^2(t)$$

$$\psi = Li$$

$$u(t) = \frac{d\psi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\xi) d\xi \\ &= i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

§ 7-4 动态电路的电路方程

含有储能元件的动态电路中的电压电流仍然受到KCL、KVL的拓扑约束和元件特性VCR的约束。一般来说，根据KCL、KVL和VCR写出的电路方程是一组微分方程。

由一阶微分方程描述的电路称为一阶电路。

由二阶微分方程描述的电路称为二阶电路。

由 n 阶微分方程描述的电路称为 n 阶电路。

例7-8 列出图7-18所示电路的一阶微分方程。

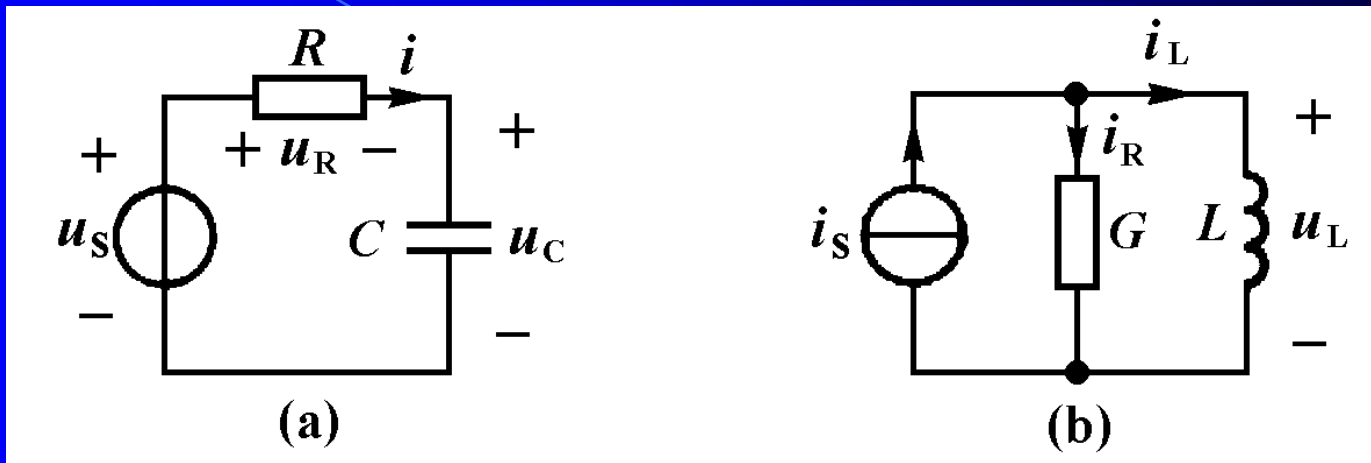
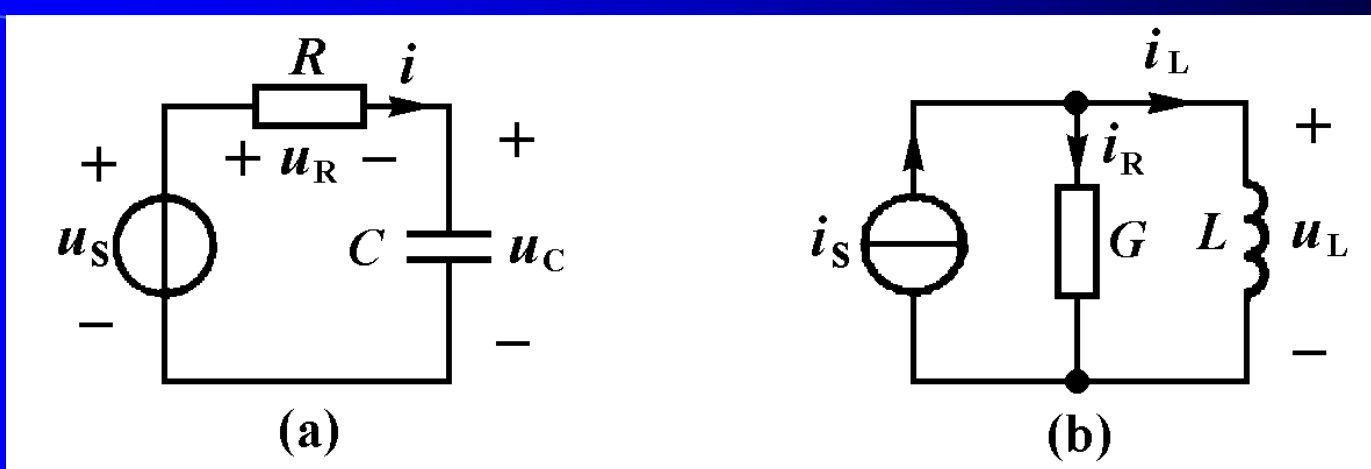


图7-18



解：对于图(a)所示RC串联电路，可以写出以下方程

$$u_S(t) = u_R(t) + u_C(t) = Ri(t) + u_C(t)$$

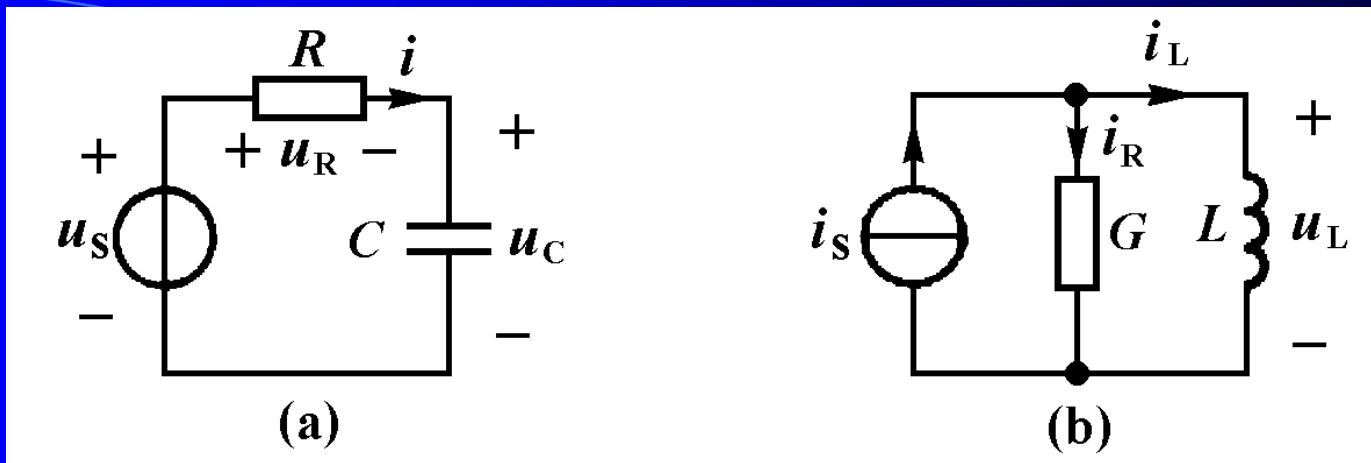
在上式中代入：

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

得到

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u_S(t) \quad (7-21)$$

这是常系数非齐次一阶微分方程，图(a)是一阶电路。



对于图(b)所示 RL 并联电路, 可以写出以下方程

$$i_S(t) = i_R(t) + i_L(t) = Gu_L(t) + i_L(t)$$

在上式中代入:

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

得到

$$GL \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = i_S(t) \quad (7-22)$$

这是常系数非齐次一阶微分方程。图(b)是一阶电路。

例7-9 电路如图7-19(a)所示，以 i_L 为变量列出电路的微分方程。

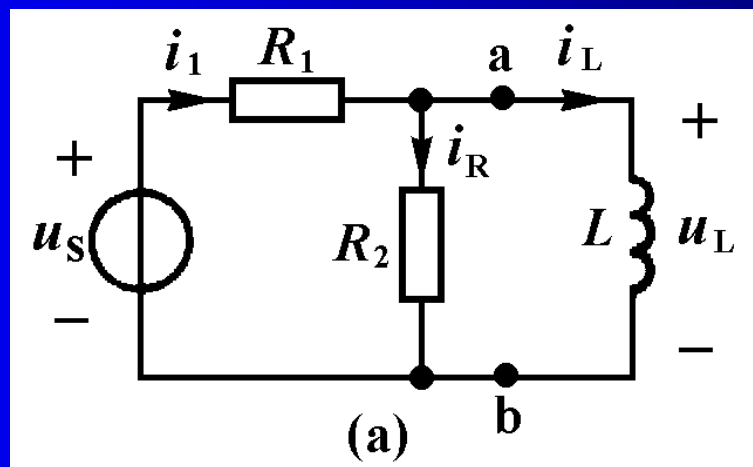
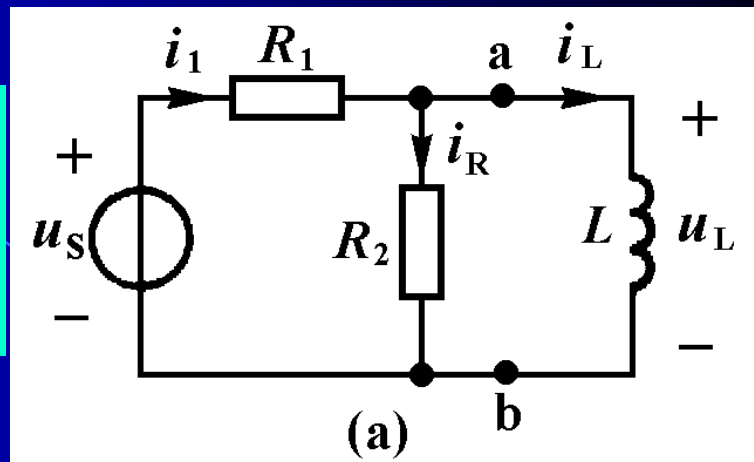


图7-19

解一：列出网孔方程

$$\begin{cases} (R_1 + R_2)i_1 - R_2i_L = u_S & (1) \\ -R_2i_1 + L\frac{di_L}{dt} + R_2i_L = 0 & (2) \end{cases}$$



由式(2)求得

$$i_1 = \frac{L}{R_2} \cdot \frac{di_L}{dt} + i_L$$

代入式(1)得到

$$\frac{(R_1 + R_2)L}{R_2} \frac{di_L}{dt} + (R_1 + R_2)i_L - R_2i_L = u_S$$

整理

$$\frac{(R_1 + R_2)L}{R_2} \frac{di_L}{dt} + R_1i_L = u_S \quad (7-23)$$

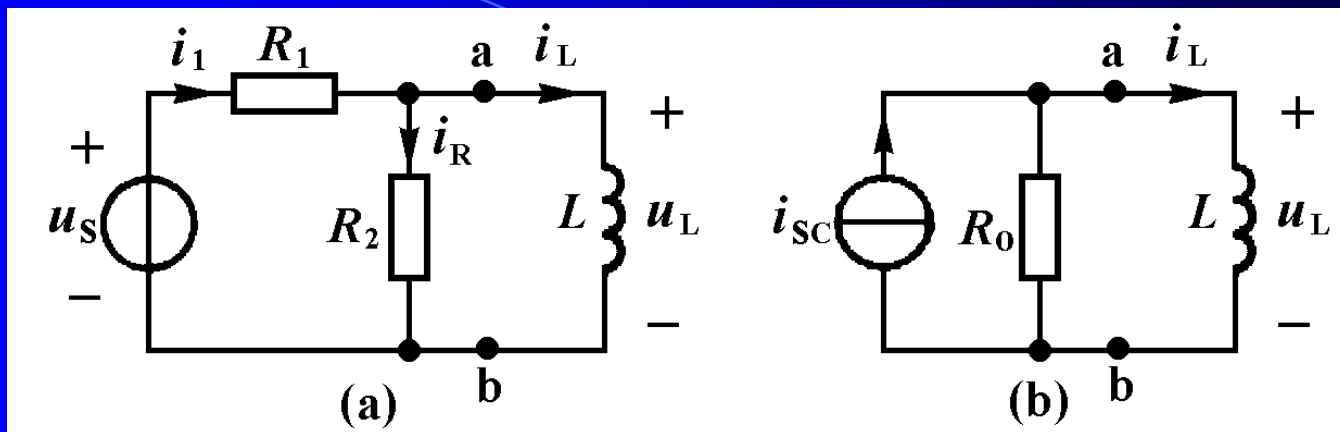


图7-19

解二：将含源电阻单口用诺顿等效电路代替，得到图(b)电路，其中

$$R_o = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad i_{SC} = \frac{u_S}{R_1}$$

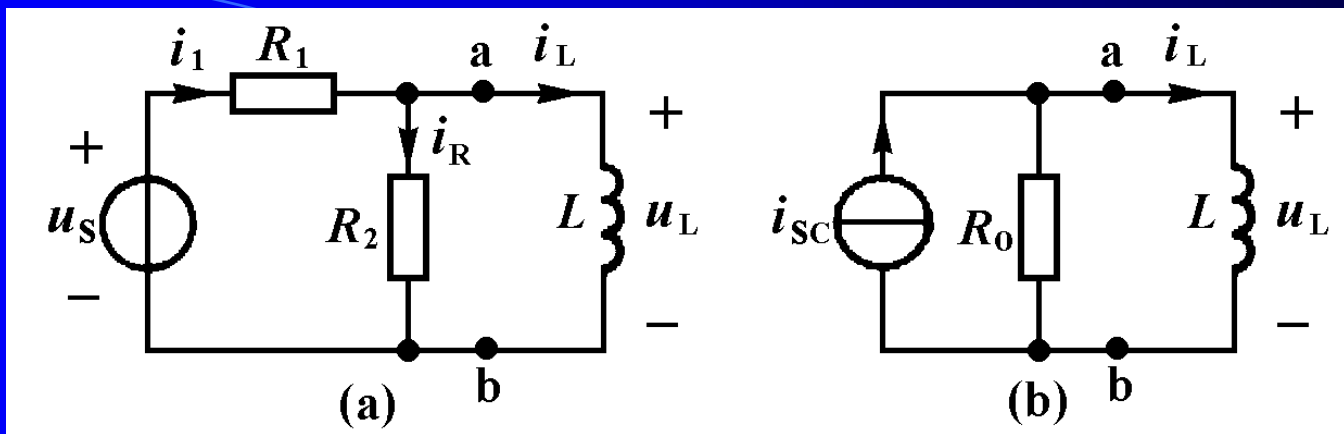


图7-19

图(b)电路与前面图(b)电路完全相同，直接引用式7-22可以得到

$$\frac{(R_1 + R_2)L}{R_1 R_2} \frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{u_S}{R_1} \quad (7-24)$$

这是常系数非齐次一阶微分方程，图(a)是一阶电路。

例7-10 电路如图7-20(a)所示，以 $u_C(t)$ 为变量列出电路的微分方程。

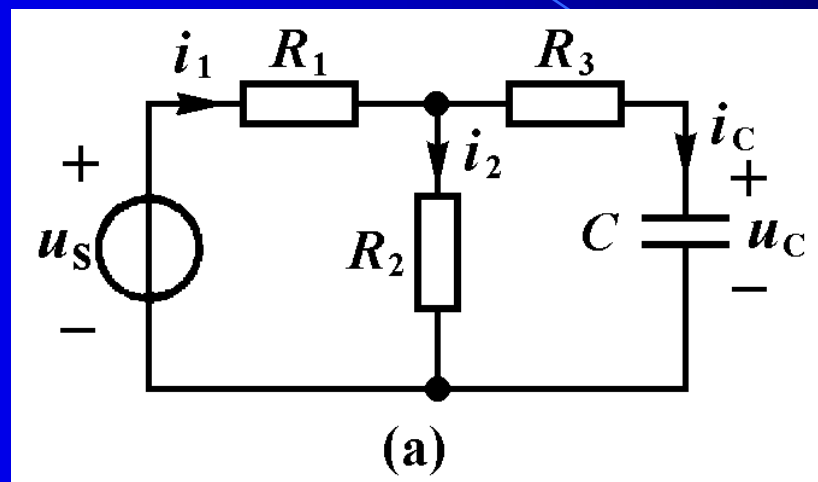
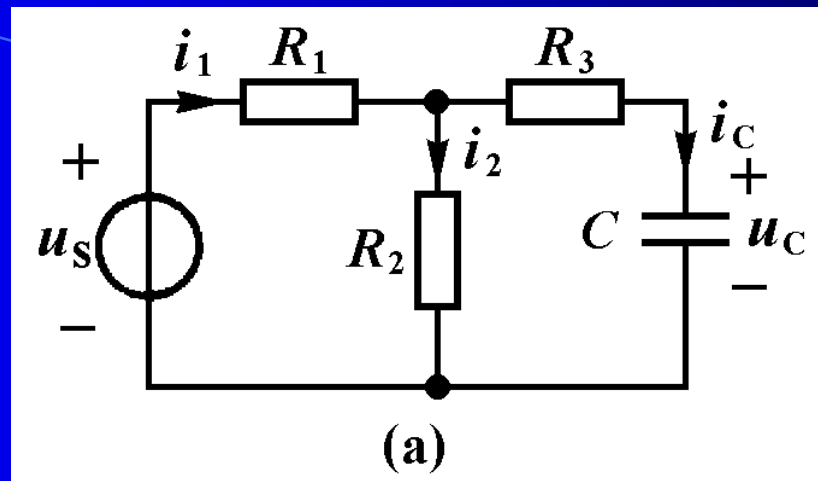


图7-20

解一：列出网孔方程

$$\begin{cases} (R_1 + R_2)i_1 - R_2i_C = u_S \\ -R_2i_1 + (R_2 + R_3)i_C + u_C = 0 \end{cases}$$

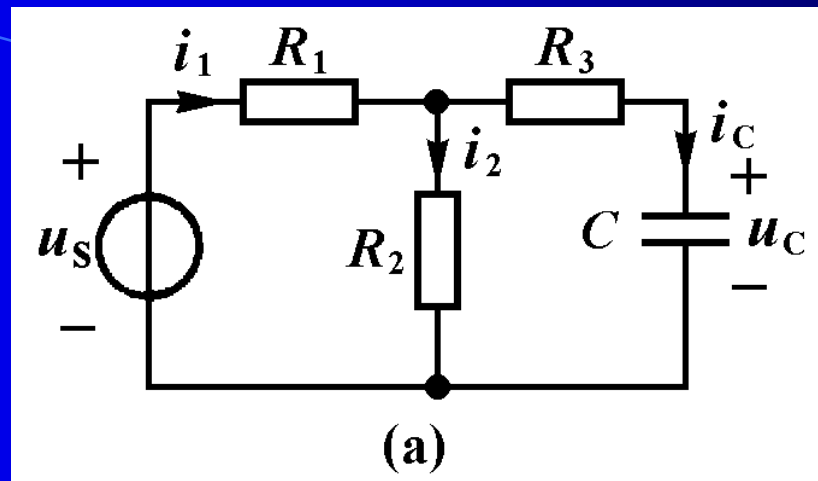


补充方程

$$i_c = C \frac{du_c}{dt}$$

得到以 $i_1(t)$ 和 $u_c(t)$ 为变量的方程

$$\begin{cases} (R_1 + R_2)i_1 - R_2 C \frac{du_c}{dt} = u_s & (1) \\ -R_2 i_1 + (R_2 + R_3) C \frac{du_c}{dt} + u_c = 0 & (2) \end{cases}$$



从式(2)中写出 $i_1(t)$ 的表达式

$$i_1 = \frac{(R_2 + R_3)C}{R_2} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{R_2} u_C$$

将 $i_1(t)$ 代入式(1), 得到以下方程

$$\left(R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right) C \frac{du_C}{dt} + u_C = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_S \quad (7-25)$$

这是以电容电压为变量的一阶微分方程。

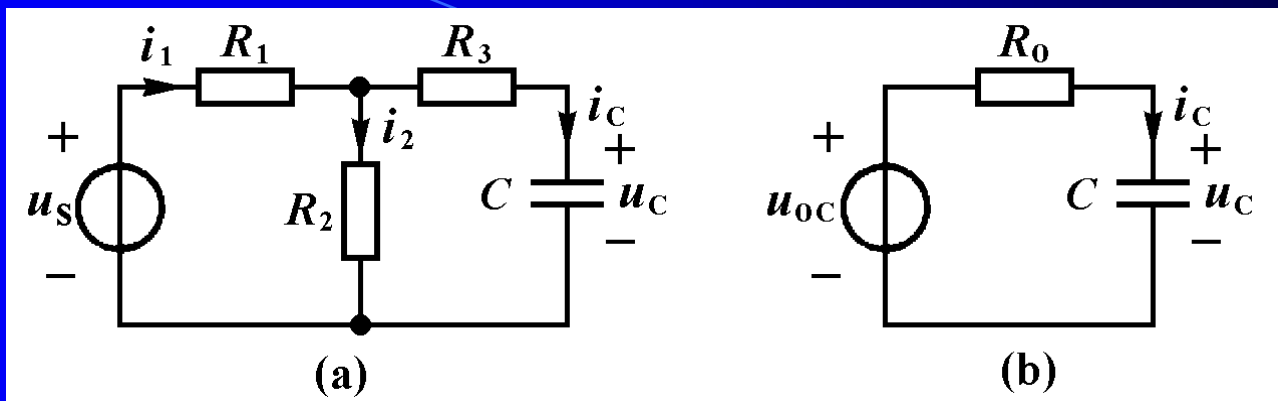


图7-20

解二：将连接电容的含源电阻单口网络用戴维宁等效电路代替，得到图(b)所示电路，其中

$$R_o = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad u_{oc} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_s$$

由图(b)电路得到与式7-25相同的微分方程。

例7-11 电路如图7-21所示，以 $u_C(t)$ 为变量列出电路的微分方程。

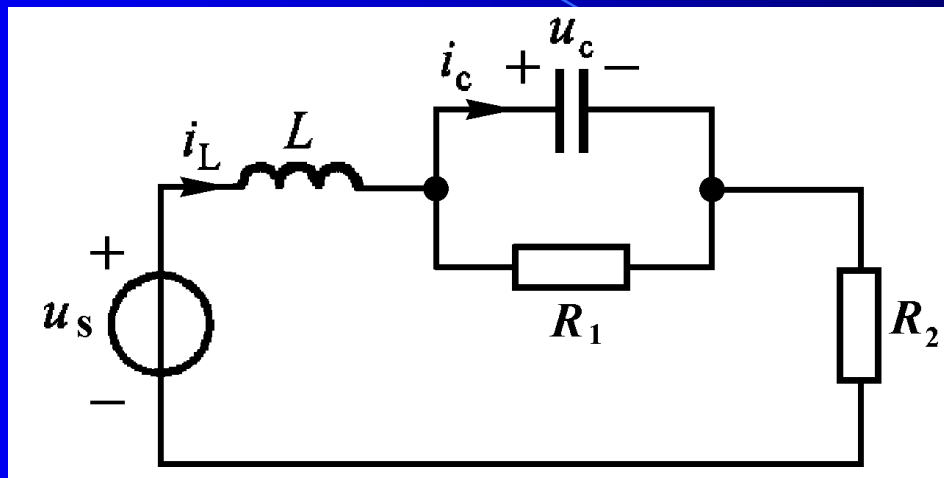


图7-21

解：以 $i_L(t)$ 和 $i_C(t)$ 为网孔电流，列出网孔方程

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} + (R_1 + R_2)i_L - R_1i_C = u_s \\ -R_1i_L + R_1i_C + u_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} + (R_1 + R_2)i_L - R_1 i_C = u_S \\ -R_1 i_L + R_1 i_C + u_C = 0 \end{cases}$$

代入电容的VCR方程

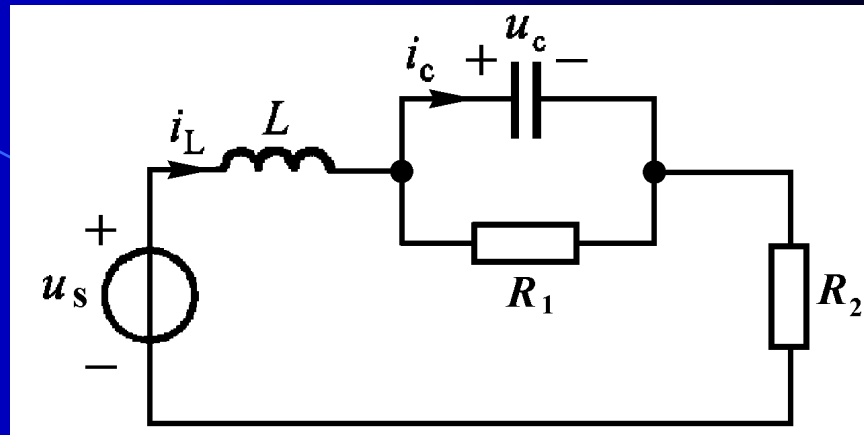
$$i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

得到以 $i_L(t)$ 和 $u_C(t)$ 为变量的方程

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} + (R_1 + R_2)i_L - R_1 C \frac{du_C}{dt} = u_S & (1) \\ -R_1 i_L + R_1 C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 & (2) \end{cases}$$

从式(2)得到

$$i_L = C \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{R_1} u_C$$



将 $i_L(t)$ 代入式(1)中

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{L}{R_1} \frac{du_C}{dt} + (R_1 + R_2)C \frac{du_C}{dt} + \frac{(R_1 + R_2)}{R_1} u_C - R_1 C \frac{du_C}{dt} = u_s$$

经过整理得到以下微分方程

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_1} + R_2 C \right) \frac{du_C}{dt} + \frac{(R_1 + R_2)}{R_1} u_C = u_s \quad (7-26)$$

这是常系数非齐次二阶微分方程，图示电路是二阶电路。

§ 7-5 开关电路的初始条件

求解 n 阶微分方程时，需要知道 n 个初始条件。利用电感电流和电容电压的连续性，可以求出动态电路在电路结构和元件参数变化(常称为换路)后，电路变量(电压、电流)的初始值。

本节讨论含有开关的动态电路，假设开关都是在 $t=0$ 时刻转换，我们的任务是计算开关转换前一瞬间 $t=0_-$ 和开关转换后一瞬间 $t=0_+$ 的电压电流值。

所讨论的电路均由直流电源驱动，并且在开关转换前电路已经处于直流稳定状态，此时各电压电流均为恒定数值。

由于电感中电流恒定时，电感电压等于零，电感相当于短路；由于电容上电压恒定时，电容电流等于零，电容相当于开路。我们用短路代替电感以及用开路代替电容后，得到一个直流电阻电路，由此电路可以求出 $t=0_+$ 的各电压电流。

在开关转换后的一瞬间 $t=0_+$ ，根据电感电流和电容电压不能跃变的连续性质，我们可以得到此刻的电感电流 $i_L(0_+)=i_L(0_-)$ 和电容电压 $u_C(0_+)=u_C(0_-)$

用数值为 $i_L(0_+)$ 的电流源代替电感以及用数值为 $u_C(0_+)$ 的电压源代替电容后，得到一个直流电阻电路，由此电路可以求出 $t=0_+$ 时刻各电压电流值，根据这些数值可以得到求解微分方程所需的初始条件。下面举例加以说明。

例7-12 图7-22(a)电路中的开关断开已经很久， $t=0$ 时闭合开关，试求开关转换前和转换后瞬间的电感电流和电感电压。

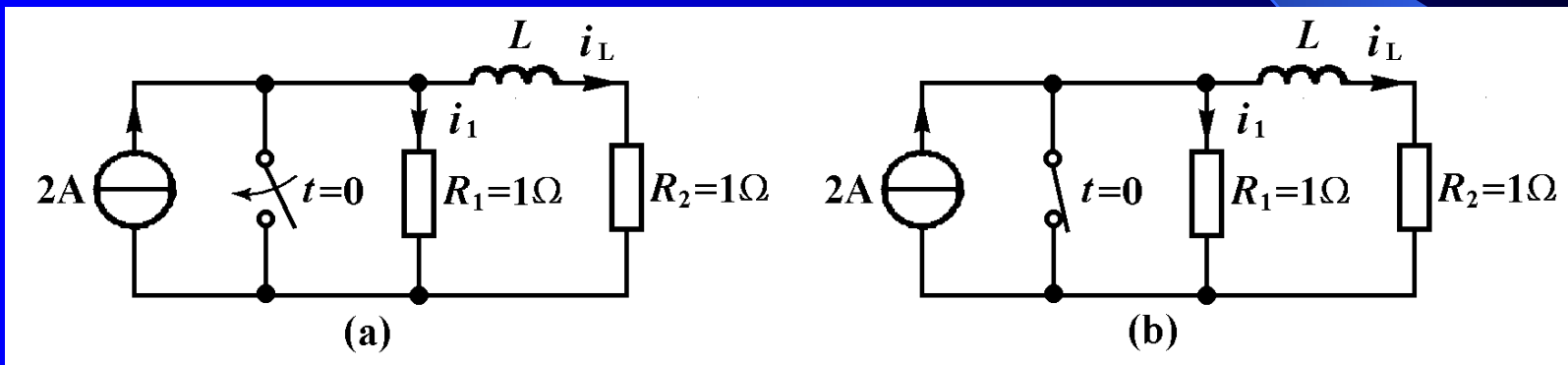
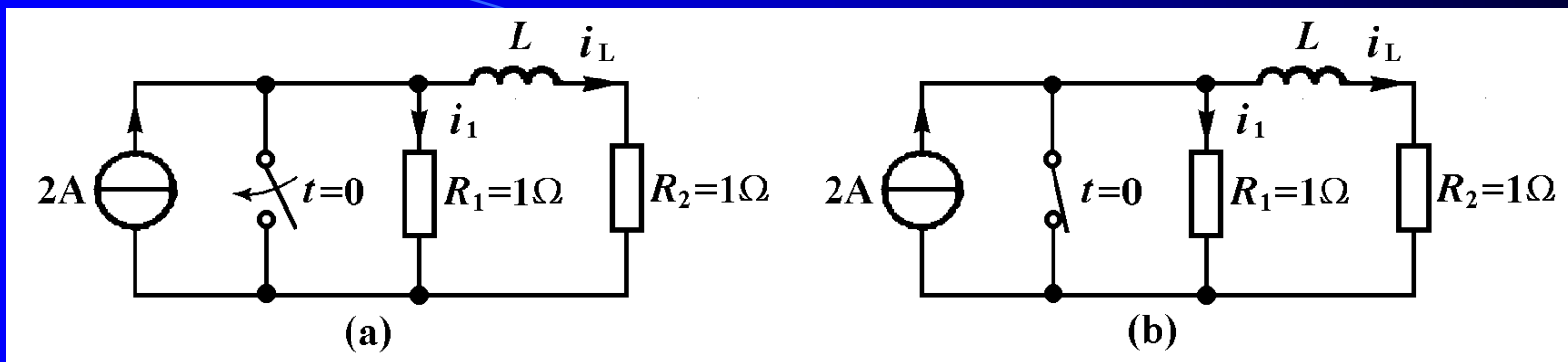


图7-22

(a) $t=0_-$ 的电路

(b) $t=0_+$ 的电路



(a) $t=0_-$ 的电路

(b) $t=0_+$ 的电路

解：根据图(a)电路，写出KCL方程

$$i_L(0_-) + i_1(0_-) = 2A$$

由于电感中通过恒定电流时，电感相当于短路，此时的电感电流为

$$i_L(0_-) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times 2A = \frac{1}{2} \times 2A = 1A$$

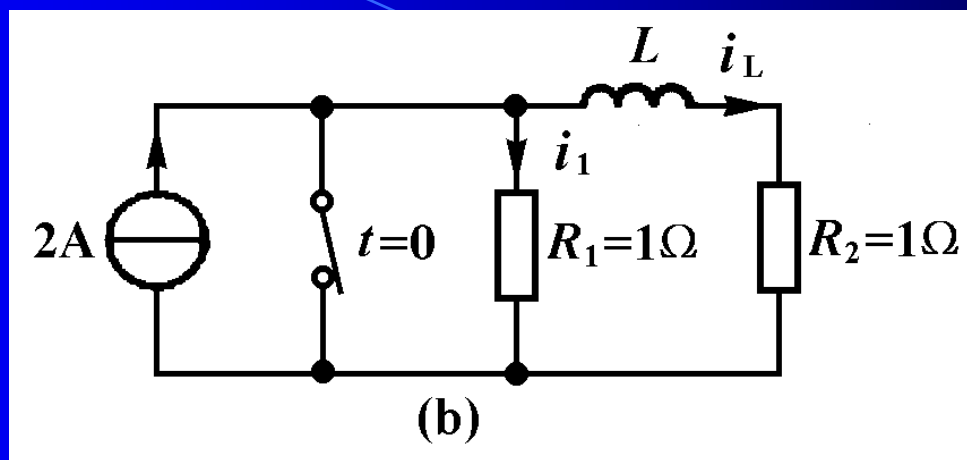


图7-22

开关闭合后的电路如图(b)所示，由于 $t=0$ 时刻，电感电压有界，电感电流不能跃变，即

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\text{A}$$

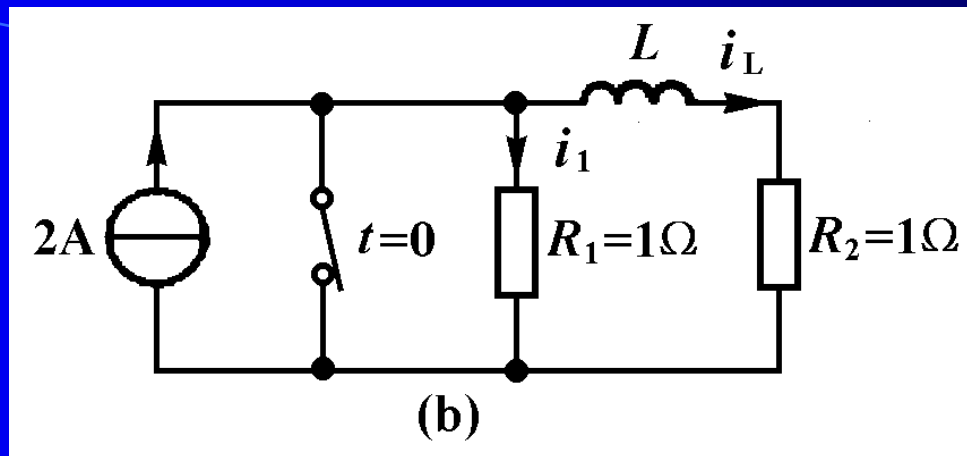


图7-22

为求 $t=0_+$ 时刻的电感电压，根据KVL方程求得

$$\begin{aligned} u_L(0_+) &= u_1(0_+) - R_2 i_L(0_+) \\ &= 0 - 1\Omega \times 1\text{A} = -1\text{V} \end{aligned}$$

值得注意的是电阻电压、电流可以跃变。例如电阻 R_1 上的电压由 $u_1(0_-)=1\text{V}$ 变化到 $u_1(0_+)=0\text{V}$ 。电阻 R_1 的电流由 $i_1(0_-)=1\text{A}$ 变化到 $i_1(0_+)=u_1(0_+)/R_1=0\text{A}$ 。

例7-13 图7-23(a)电路中的开关闭合已经很久, $t=0$ 时断开开关, 试求开关转换前和转换后瞬间的电容电压和电容电流。

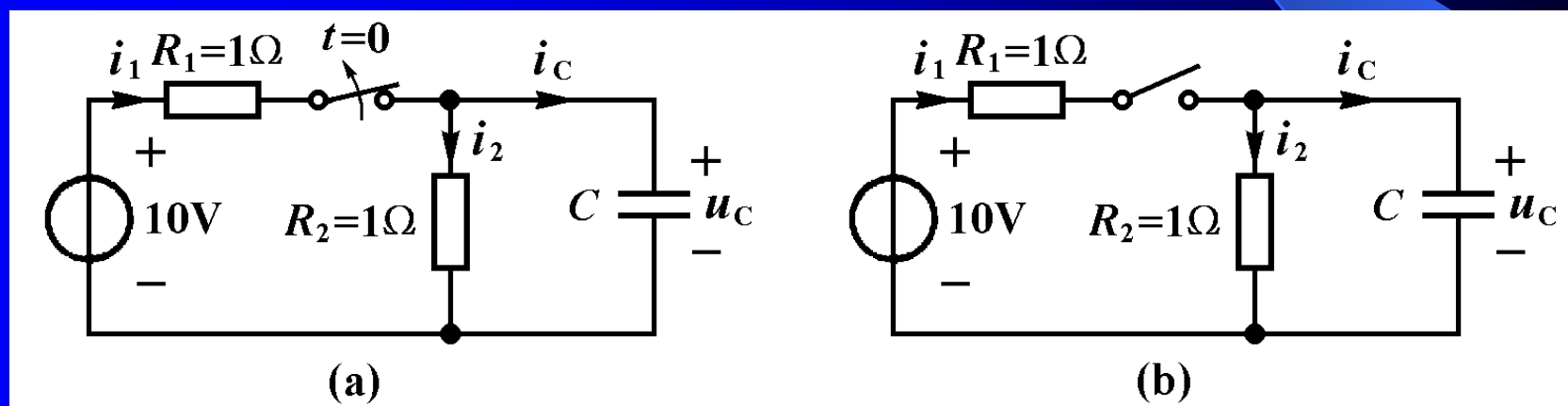
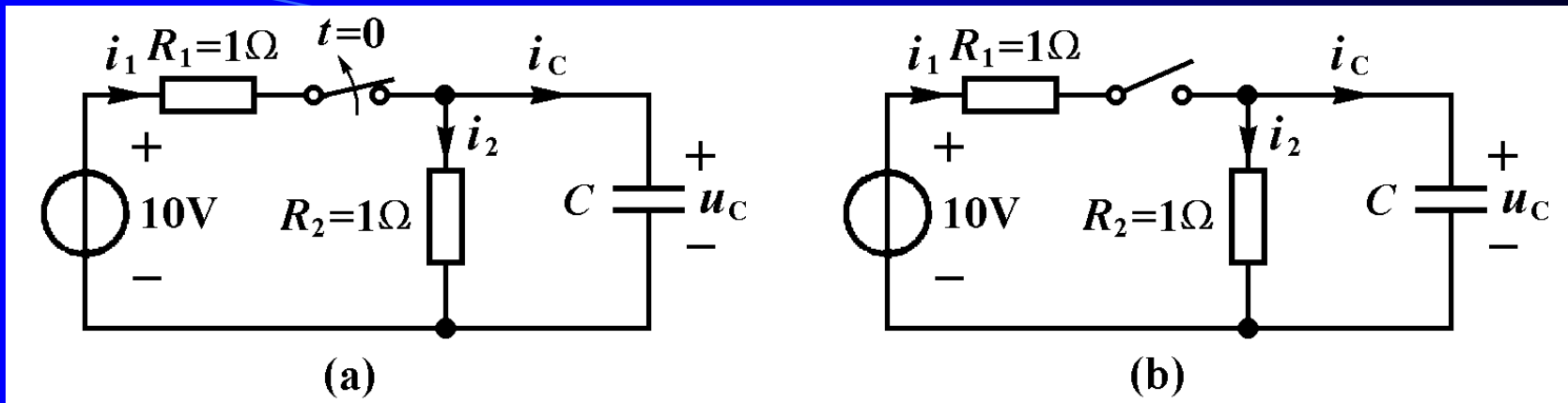


图7-23

(a) $t=0_-$ 的电路

(b) $t=0_+$ 的电路



(a) $t=0_-$ 的电路

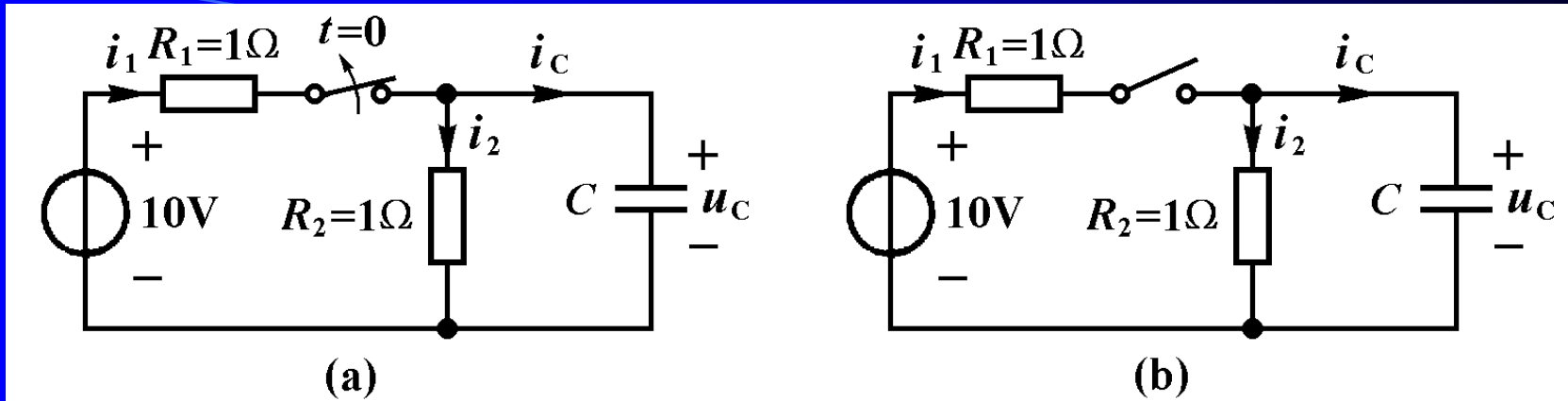
图 7-23

(b) $t=0_+$ 的电路

解：在图(a)所示电路中，电容相当于开路。此时得到电容电压

$$\begin{aligned}
 u_C(0_-) &= u_{R_2}(0_-) \\
 &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times 10\text{V} \\
 &= \frac{1}{2} \times 10\text{V} = 5\text{V}
 \end{aligned}$$

此时电阻 R_1 和 R_2 的电流 $i_1(0_-) = i_2(0_-) = 10\text{V}/2\Omega = 5\text{A}$ 。



(a) $t=0_-$ 的电路

图 7-23

(b) $t=0_+$ 的电路

开关断开后的电路如图(b)所示。此时由于 $t=0$ 时刻电容电流有界，电容电压不能跃变，由此得到

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 5V$$

此时电容电流与电阻 R_2 的电流相同，由此求得

$$i_C(0_+) = -i_2(0_+) = -\frac{5V}{1\Omega} = -5A$$

电容电流由 $i_C(0_-) = 0A$ 变化到 $i_C(0_+) = -5A$ 。

电阻 R_1 的电流由 $i_1(0_-) = 5A$ 变化到 $i_1(0_+) = 0A$ 。

例7-14 图7-24(a)所示电路中的开关闭合已经很久, $t=0$ 时断开开关, 试求开关转换前和转换后瞬间的电容电压和电感电流。

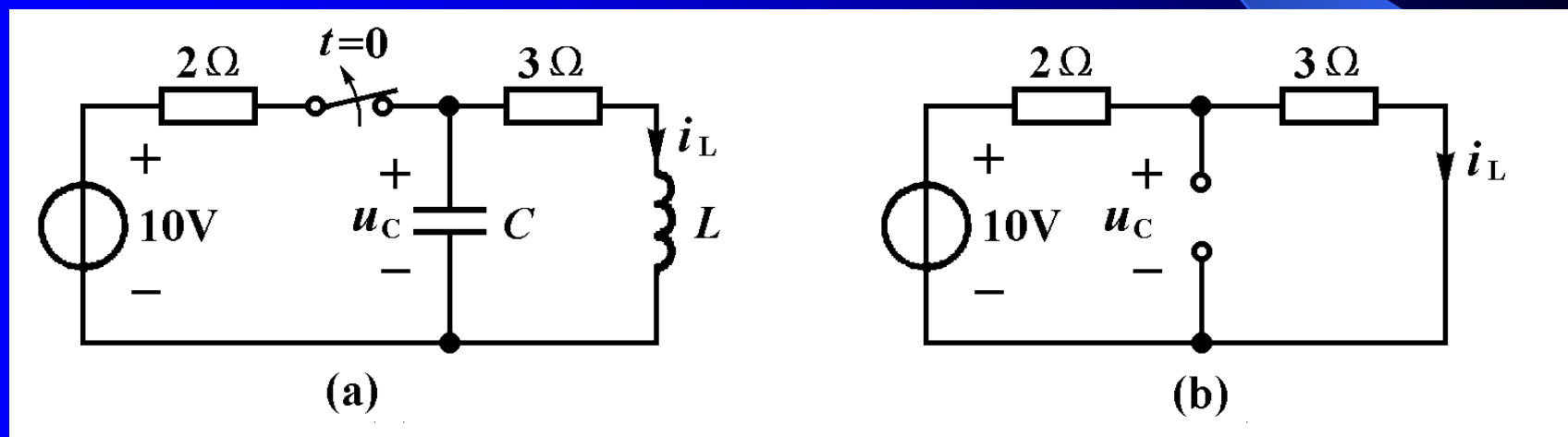
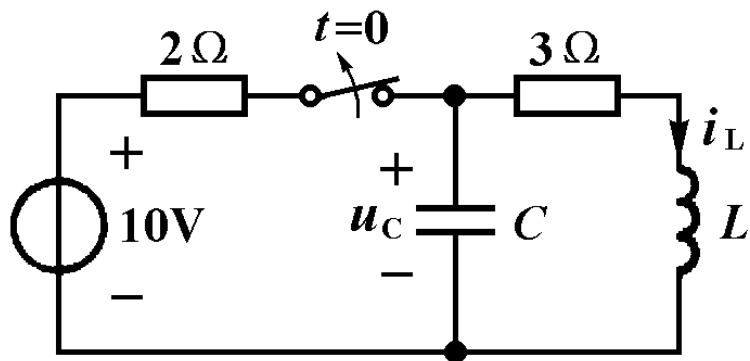
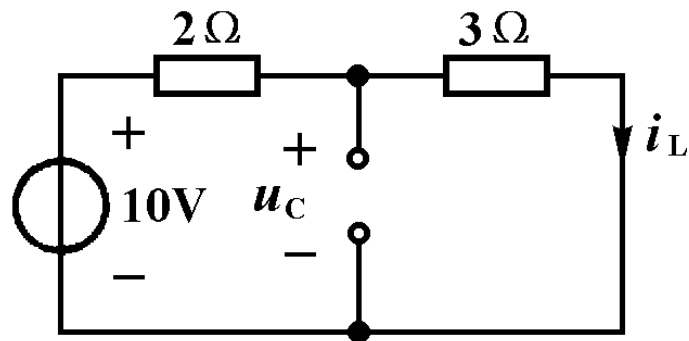


图7-24



(a)



(b)

解：在图(a)电路中，电容相当于开路，电感相当于短路。
如图(b)所示。由此求出电容电压和电感电流

$$u_C(0_-) = \frac{3}{2+3} \times 10\text{V} = 6\text{V}$$

$$i_L(0_-) = \frac{10\text{V}}{2\Omega + 3\Omega} = 2\text{A}$$

得到

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 6\text{V}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2\text{A}$$

例7-15 图7-25(a)所示电路原来已经达到稳定状态， $t=0$ 时刻开关 S_1 和 S_2 发生转换。试求开关转换前和转换后瞬间的电容电压和电感电流的初始值。

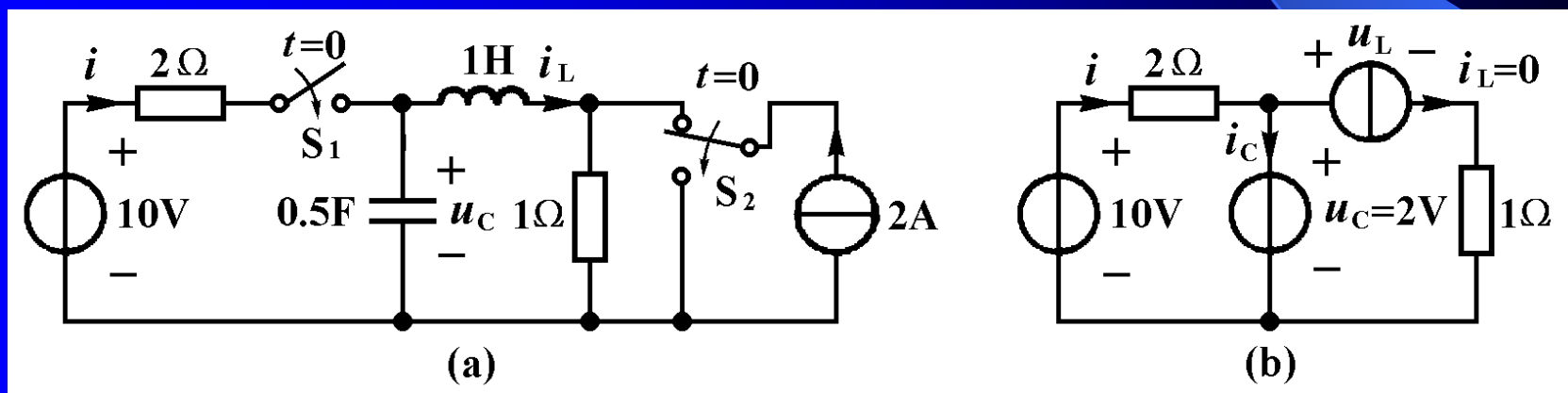
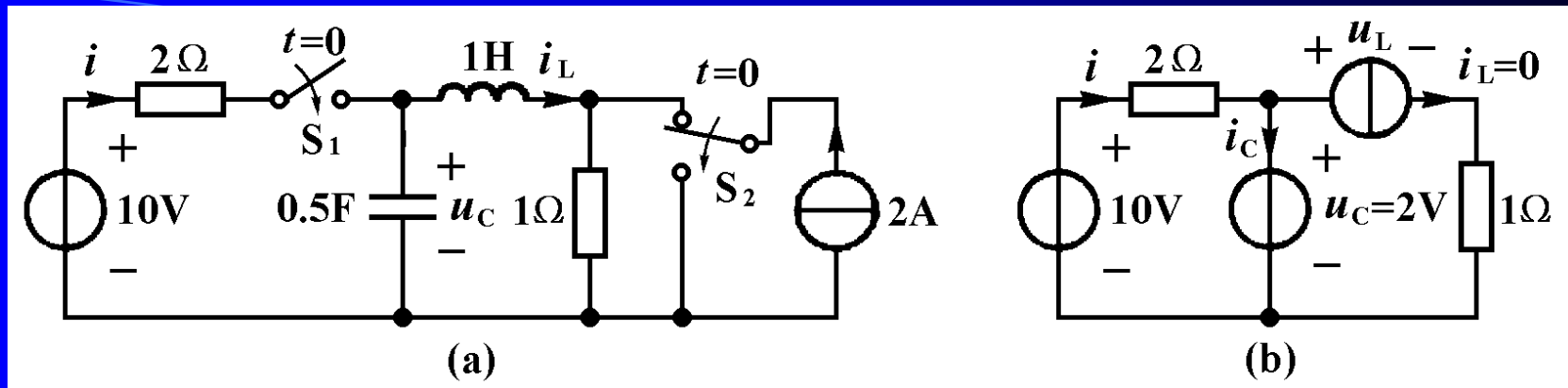


图7-25



解：电容相当于开路，电感相当于短路。由此求得

$$u_C(0_-) = 1\Omega \times 2A = 2V$$

$$i_L(0_-) = 0A$$

开关转换后，电容电压不能跃变和电感电流不能跃变

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2V$$

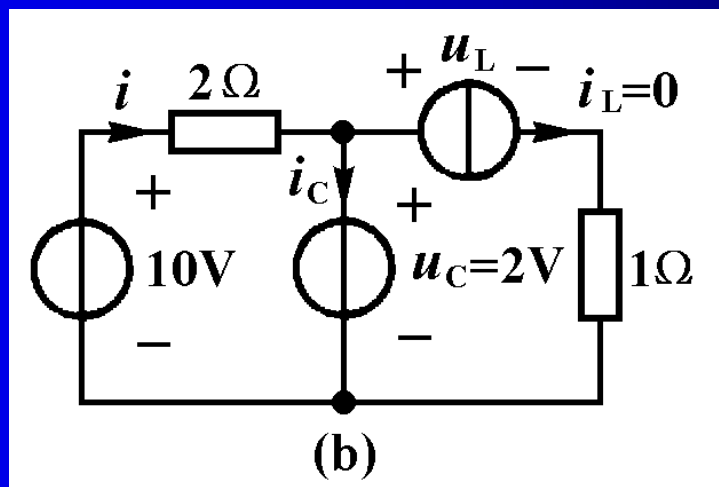
$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0A$$

图7(a)电路是一个二阶电路，求解二阶微分方程时，还需要知道 $t=0_+$ 时刻的另外一个初始条件

根据电容和电感的VCR方程，可以由以下公式求得

$$u_C'(0_+) = \frac{du_C}{dt}(0_+) = \frac{i_C(0_+)}{C} \quad (7-27)$$

$$i_L'(0_+) = \frac{di_L}{dt}(0_+) = \frac{u_L(0_+)}{L} \quad (7-28)$$



根据替代定理，用2V电压源替代电容，0A电流源替代电感，得到图(b)所示电路。

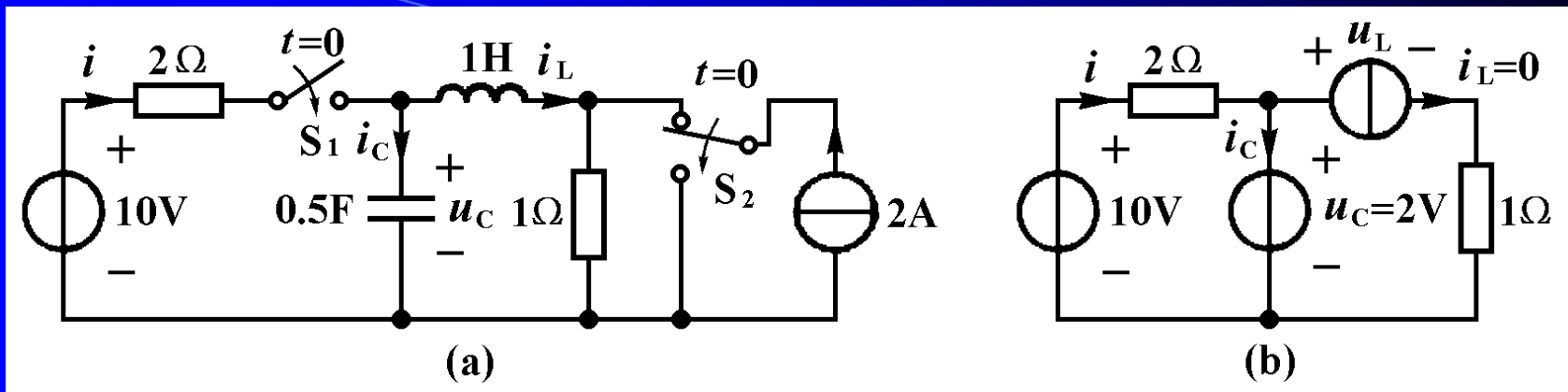


图7-25

利用KCL和KVL求得电容电流 $i_C(0_+)$ 和电感电压的初始值 $u_L(0_+)$

$$\begin{aligned}
 i_C(0_+) &= i(0_+) - i_L(0_+) \\
 &= \frac{10\text{V} - u_C(0_+)}{2\Omega} - i_L(0_+) = 4\text{A}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_L(0_+) &= u_C(0_+) - i_L(0_+) \times 1\Omega \\
 &= 2\text{V} - 0 \times 1\text{V} = 2\text{V}
 \end{aligned}$$

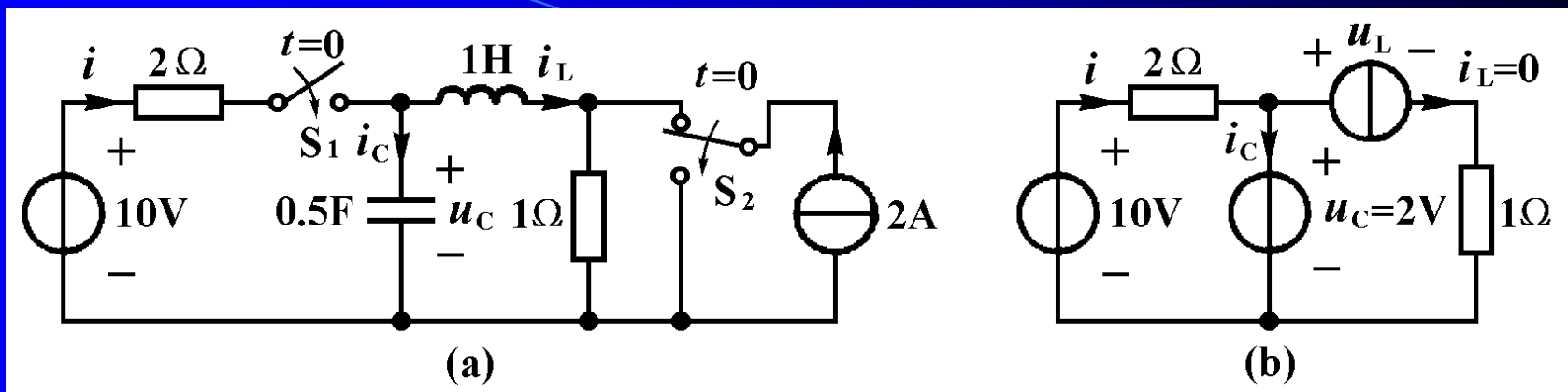


图7-25

用式7-27和7-28可以求得

$$\frac{du_C}{dt}(0_+) = \frac{i_C(0_+)}{C} = \frac{4A}{0.5F} = 8V/s$$

$$\frac{di_L}{dt}(0_+) = \frac{u_L(0_+)}{L} = \frac{2V}{1H} = 2A/s$$

摘要

1. 线性时不变电容元件的特性曲线是通过 u - q 平面坐标原点的一条直线，该直线方程为

$$q = Cu$$

电容的电压电流关系由以下微分或积分方程描述

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\xi) d\xi$$

由上式可见，电容电压随时间变化时才有电容电流。若电容电压不随时间变化，则电容电流等于零，电容相当于开路。

电容是一种动态元件，是一种有记忆的元件，又是一种储能元件。电容的储能为

$$W_C(t) = \frac{1}{2} C u_C^2(t)$$

电容的储能取决于电容的电压，与电容电流值无关。

2. 线性时不变电感元件的特性曲线是通过*i-ψ*平面坐标原点的一条直线，该直线方程为

$$\psi = Li$$

电感的电压电流关系由以下微分或积分方程描述

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\xi) d\xi$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\xi) d\xi$$

由上式可见，电感电流随时间变化时才有电感电压。若电感电流不随时间变化，则电感电压等于零，电感相当于短路。电感是一种动态元件，是一种有记忆的元件，又是一种储能元件。电感的储能为

$$W_L(t) = \frac{1}{2} Li_L^2(t)$$

电感的储能取决于电感的电流，与电感电压值无关。

3. 电容和电感的一个重要性质是连续性，其内容是若电容电流 $i_C(t)$ 在闭区间 $[t_1, t_2]$ 内有界，则电容电压 $u_C(t)$ 在开区间 (t_1, t_2) 内是连续的。例如电容电流 $i_C(t)$ 在闭区间 $[0_+, 0_-]$ 内有界，则有

$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

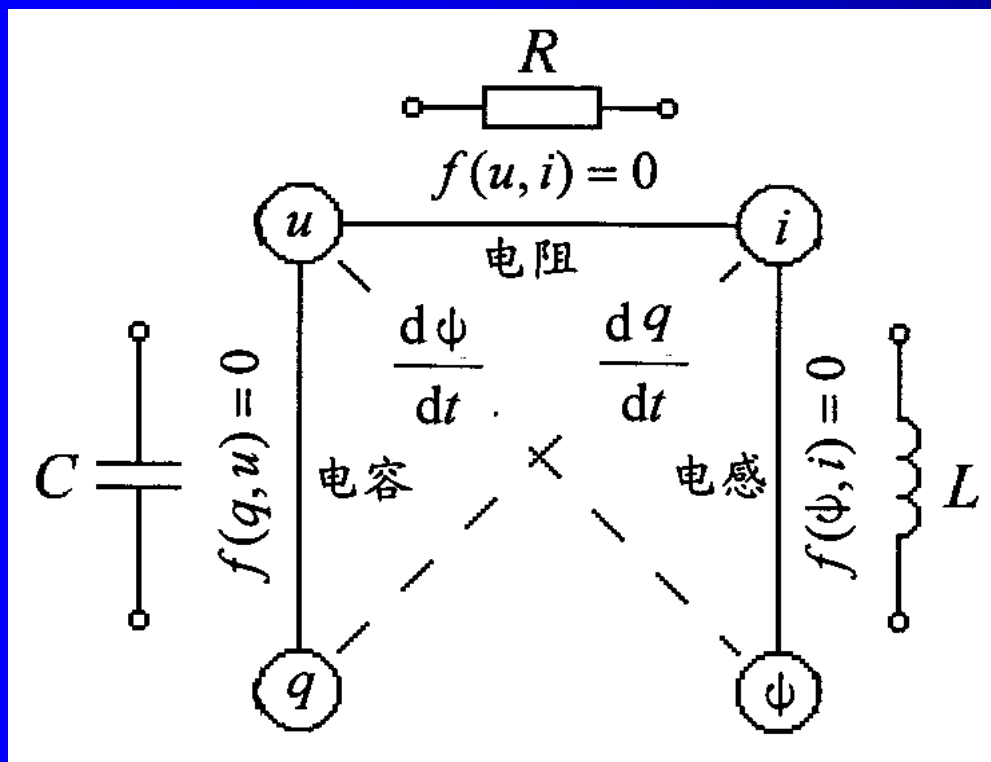
若电感电压 $u_L(t)$ 在闭区间 $[t_1, t_2]$ 内有界，则电感电流 $i_L(t)$ 在开区间 (t_1, t_2) 内是连续的。

例如电感电压 $u_L(t)$ 在闭区间 $[0_+,0_-]$ 内有界, 则有

$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

利用电容电压和电感电流的连续性, 可以确定电路中开关转换(称为换路)引起电路结构和元件参数等改变时, 电容电压和电感电流的初始值。初始值是在下一章求解微分方程时必须知道的数据。

4. 二端电阻、二端电容和二端电感是三种最基本的电路元件。它们是用两个电路变量之间的关系来定义的。这些关系从图7-27可以清楚看到。在四个基本变量间定义的另外两个关系是：



$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$u(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$$

图7-27 四个基本电路变量之间的关系

5. 含动态元件的电路称为动态电路。

根据KCL、KVL和元件VCR方程可以列出动态电路的微分方程。由一阶微分方程描述的电路，称为一阶电路。由二阶微分方程描述的电路，称为二阶电路。

一般来说：由 n 阶微分方程描述的电路，称为 n 阶电路。

6. 求解 n 阶微分方程需要知道 n 个初始条件。除了利用电容电压和电感电流不能跃变的性质，求得 $t=0_+$ 时刻的初始值外，还可以利用以下两个公式计算出电容电压对时间一阶导数的初始值以及电感电流对时间一阶导数的初始值。

$$u'_C(0_+) = \frac{du_C}{dt} \Big|_{t=0_+} = \frac{i_C(0_+)}{C}$$
$$i'_L(0_+) = \frac{di_L}{dt} \Big|_{t=0_+} = \frac{u_L(0_+)}{L}$$

这两个公式要求先算出电容电流及电感电压的初始值。