



第五章 数字滤波器的基本结构



一、数字滤波器结构的表示方法

数字滤波器的系统函数：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

常系数线性差分方程：

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

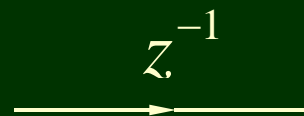
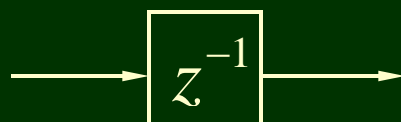
$$y(n] = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

基本运算单元

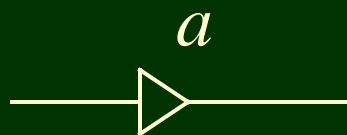
方框图

流图

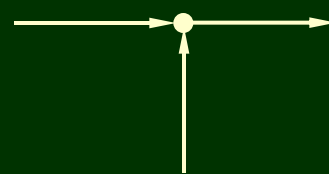
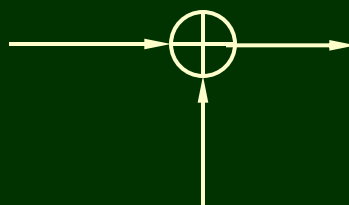
单位延时



常数乘法器



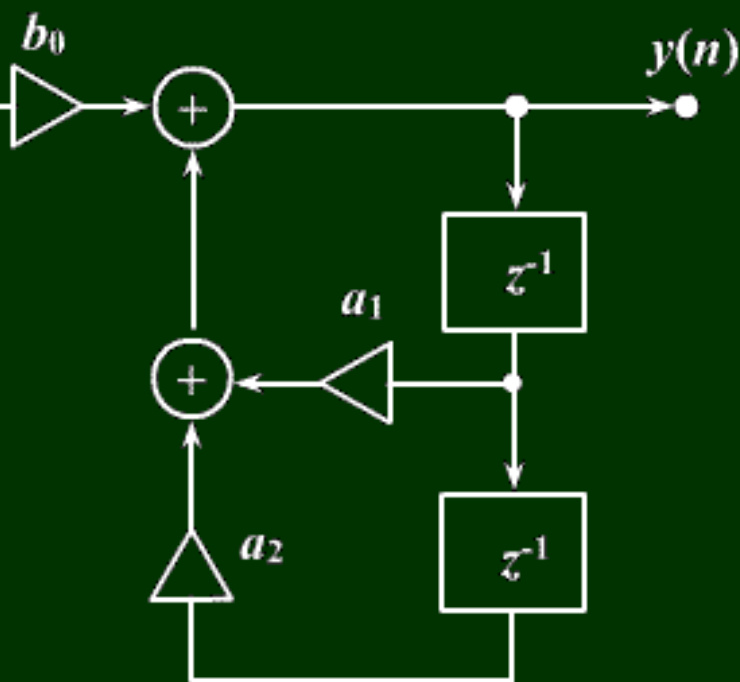
加法器



例：二阶数字滤波器

$$y(n] = a_1y[n-1] + a_2y[n-2] + b_0x[n]$$

方框图结构



流图结构

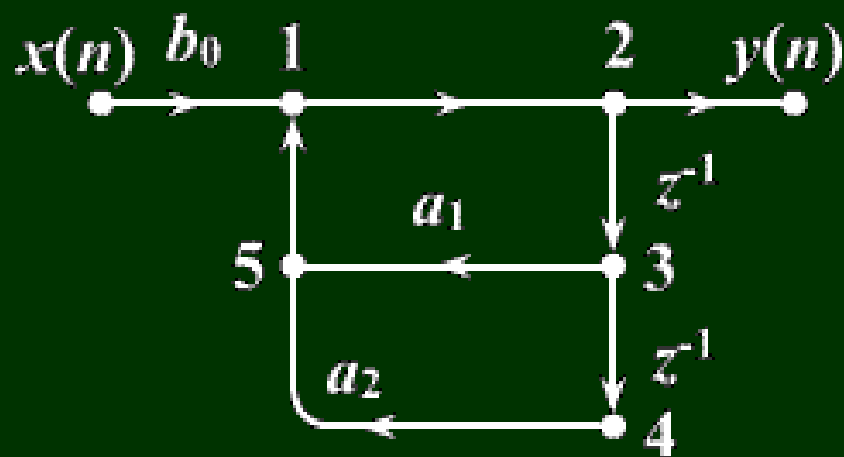


图5-2 二阶数字滤波器的方框图结构

图5-3 信号流图结构

流图结构

◆ 节点

- 源节点
- 阱节点
- 网络节点
 - 分支节点
 - 相加器

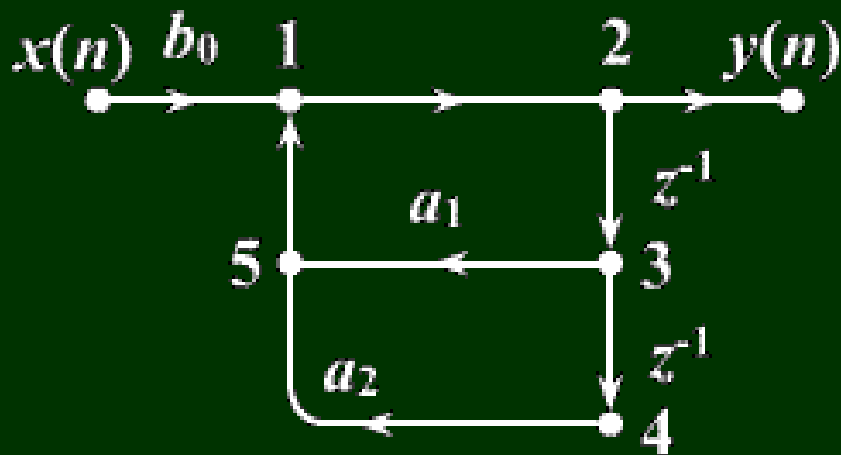


图5-3 信号流图结构

节点的值=所有输入支路的值之和

支路的值=支路起点处的节点值 \times 传输系数

◆ 支路

- 输入支路
- 输出支路

二、IIR 数字滤波器的基本结构

◆ IIR 数字滤波器的特点：

系统函数：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

差分方程：

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

- 1) 系统的单位抽样响应 $h(n)$ 无限长
- 2) 系统函数 $H(z)$ 在有限 z 平面 ($0 < |z| < \infty$) 上有极点存在
- 3) 存在输出到输入的反馈，递归型结构

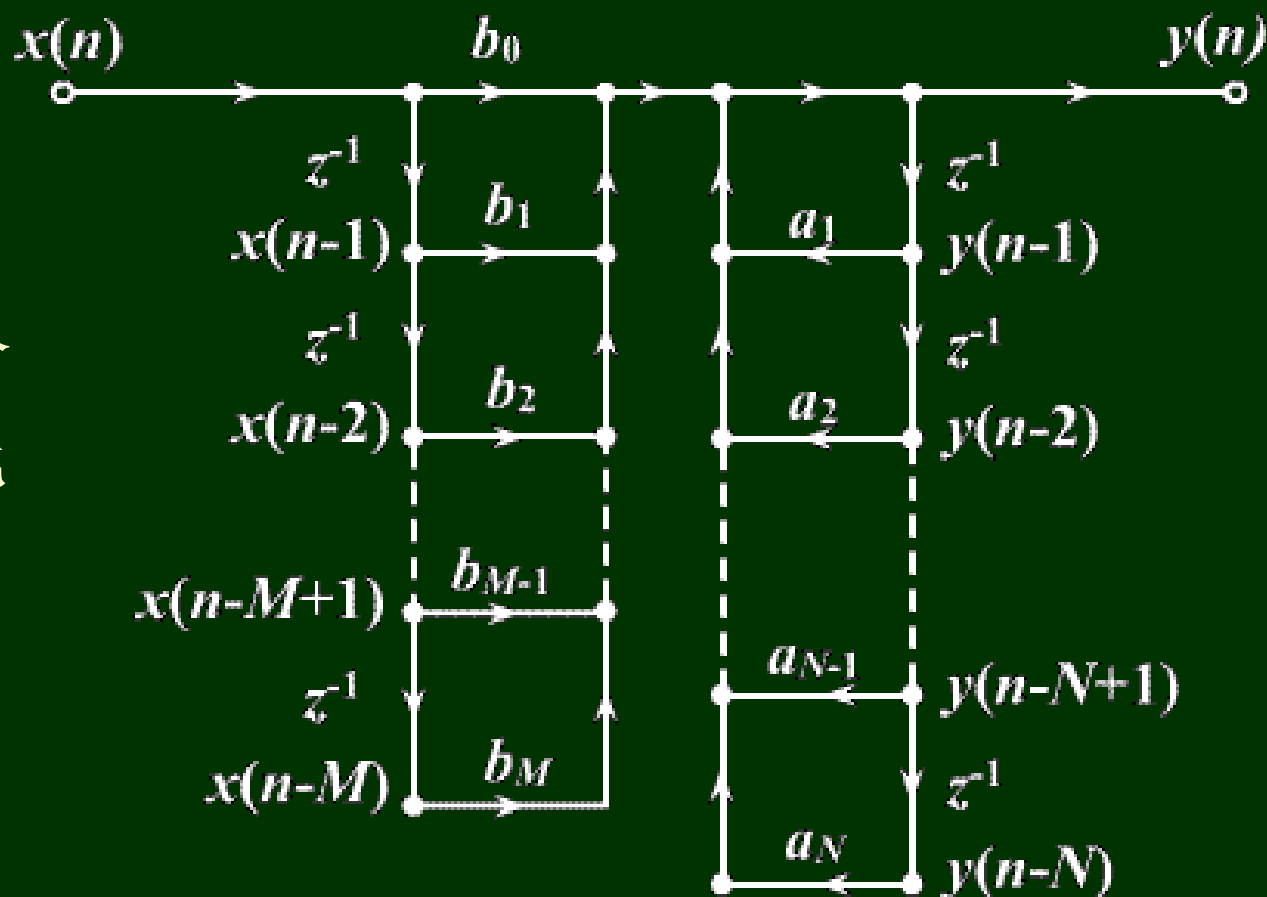


◆ IIR数字滤波器的基本结构:

- 直接 I 型
- 直接 II 型 (典范型)
- 级联型
- 并联型

1、直接 I 型

差分方程:
$$y(n] = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$



需 $N+M$ 个
延时单元

2、直接II型（典范型）

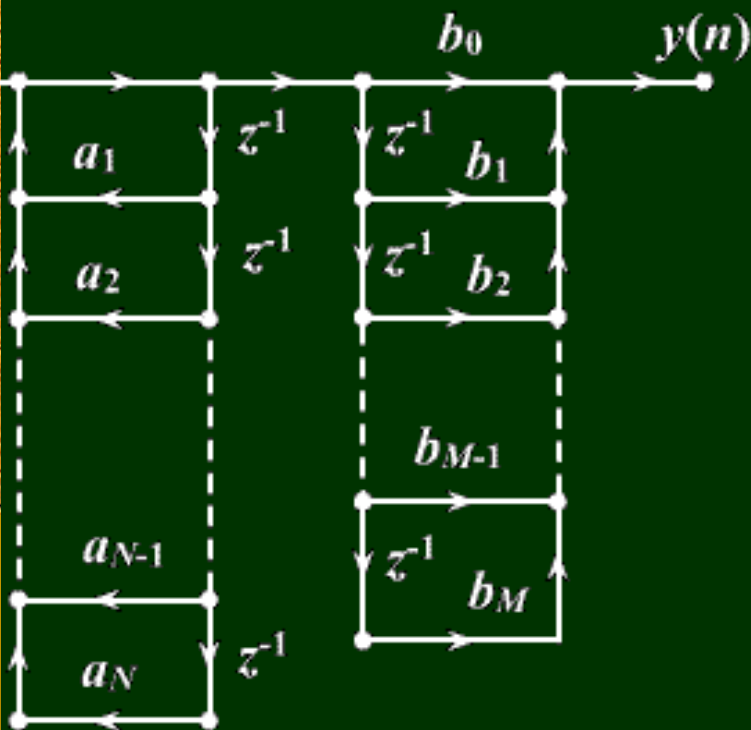


图5-5 直接II型的变型，将图5-4网络的零点与极点的级联次序互换

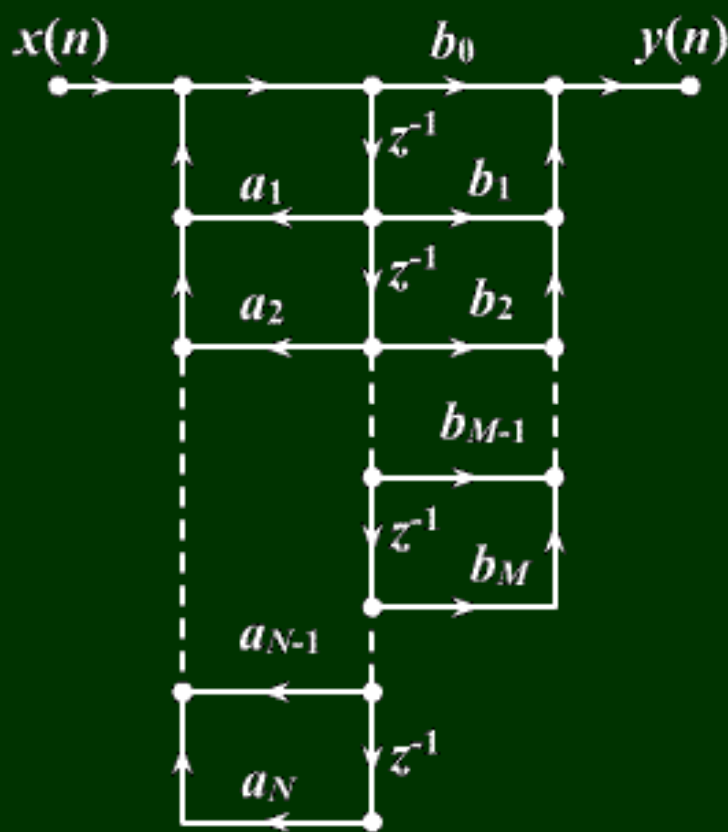


图5-6 直接II型结构(典范型结构)

只需实现 N 阶滤波器所需的最少的 N 个延时单元，故称典范型。（ $N \geq M$ ）



直接型的共同缺点：

- ◆ 系数 a_k , b_k 对滤波器的性能控制作用不明显
- ◆ 极点对系数的变化过于灵敏，易出现不稳定或较大误差
- ◆ 运算的累积误差较大

3、级联型

将系统函数按零极点因式分解:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - p_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - q_k z^{-1})(1 - q_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

A 为常数

$$M = M_1 + 2M_2$$

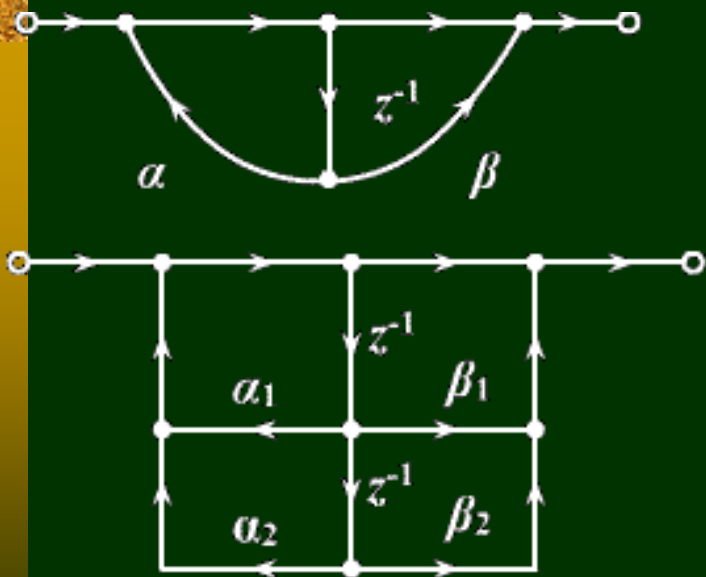
p_k 和 c_k 分别为实数零、极点

$$N = N_1 + 2N_2$$

q_k, q_k^* 和 d_k, d_k^* 分别为复共轭零、极点

将共轭成对的复数组合成二阶多项式，系数即为实数。
 为采用相同结构的子网络，也将两个实零点/极点组合成二阶多项式

$$H(z) = A \prod_k \frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} = A \prod_k H_k(z)$$



当 $M = N$ 时，共有 $\left[\frac{N+1}{2} \right]$ 节


当零点为奇数时：

有一个 $\beta_{2k} = 0$

当极点为奇数时：

有一个 $\alpha_{2k} = 0$

图5-7 级联结构的一阶基本节和二阶基本节结构


$$H(z) = A \prod_k \frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} = A \prod_k H_k(z)$$

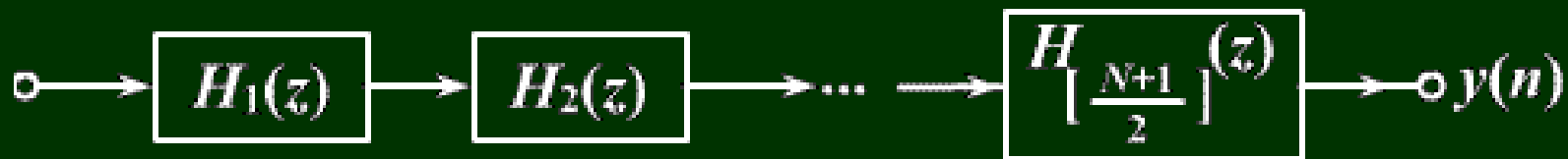


图5-8 级联结构($M=N$)

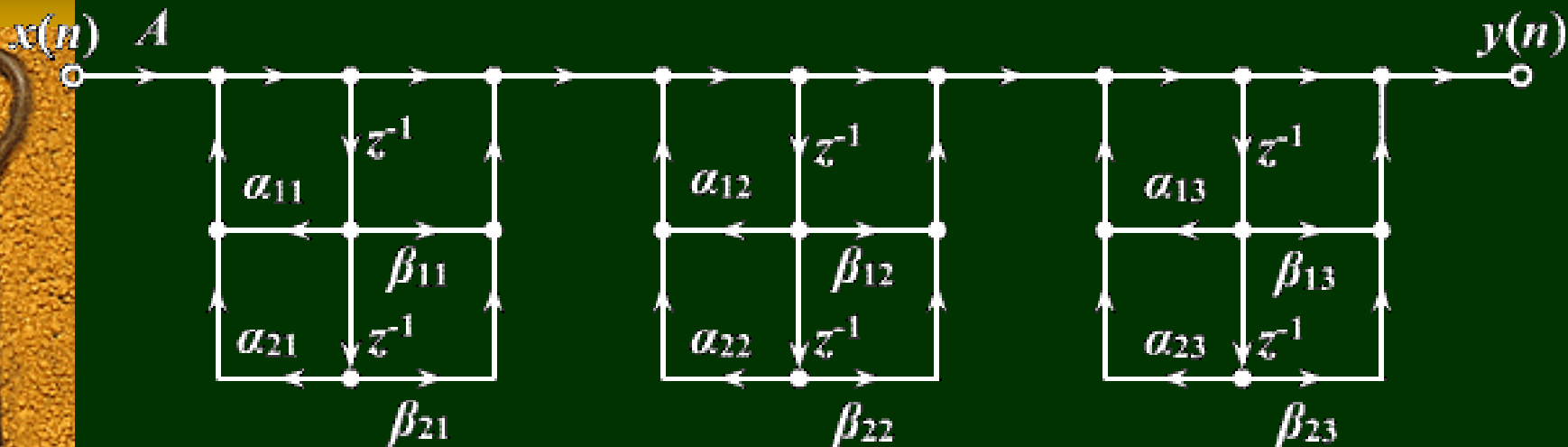


图5-9 六阶IIR滤波器的级联结构

当 $M=N$ 时，二阶因子配对方式有 $\left[\frac{N+1}{2} \right]!$ 种

各二阶基本节的排列次序有 $\left[\frac{N+1}{2} \right]!$ 种



级联型的特点:

- ◆ 调整系数 β_{1k} , β_{2k} 能单独调整滤波器的第 k 对零点, 而不影响其它零极点

调整系数 α_{1k} , α_{2k} 能单独调整滤波器的第 k 对极点, 而不影响其它零极点

便于调整滤波器频率响应性能

- ◆ 运算的累积误差较小
- ◆ 具有最少的存储器

4、并联型

将因式分解的 $H(z)$ 展成部分分式： $(M \leq N)$

$$H(z) = G_0 + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k} z^{-1}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}}$$

$$N = N_1 + 2N_2$$

组合成实系数二阶多项式：

$$H(z) = G_0 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} \frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k} z^{-1}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} = G_0 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} H_k(z)$$

当 N 为奇数时，有一个 $\alpha_{2k} = \gamma_{1k} = 0$



$$H(z) = G_0 + \sum_{k=1}^{\left\lceil \frac{N+1}{2} \right\rceil} \frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k}z^{-1}}{1 - \alpha_{1k}z^{-1} - \alpha_{2k}z^{-2}} = G_0 + \sum_{k=1}^{\left\lceil \frac{N+1}{2} \right\rceil} H_k(z)$$

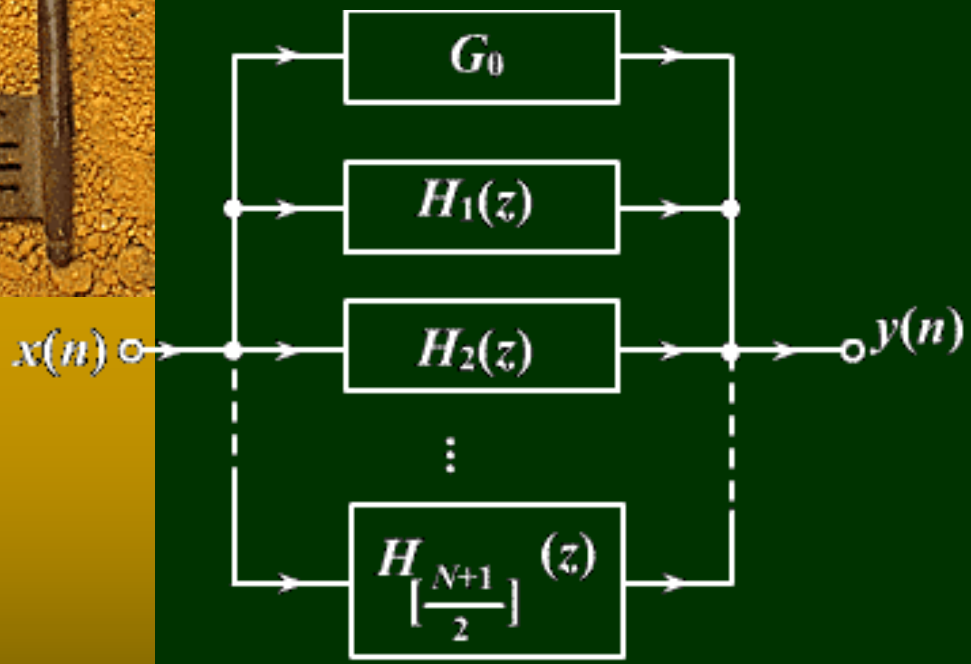


图5-10 并联结构(M=N)

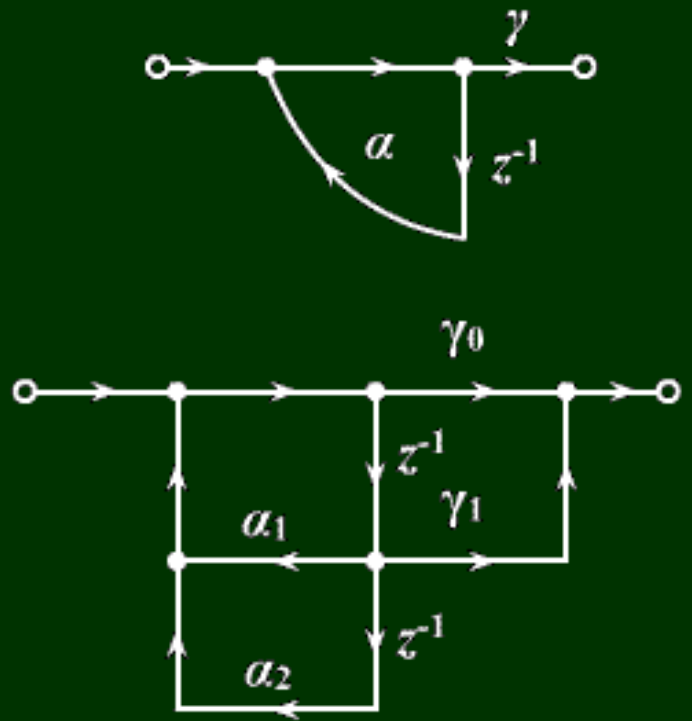


图5-11 并联结构的一阶基本节和二阶基本节

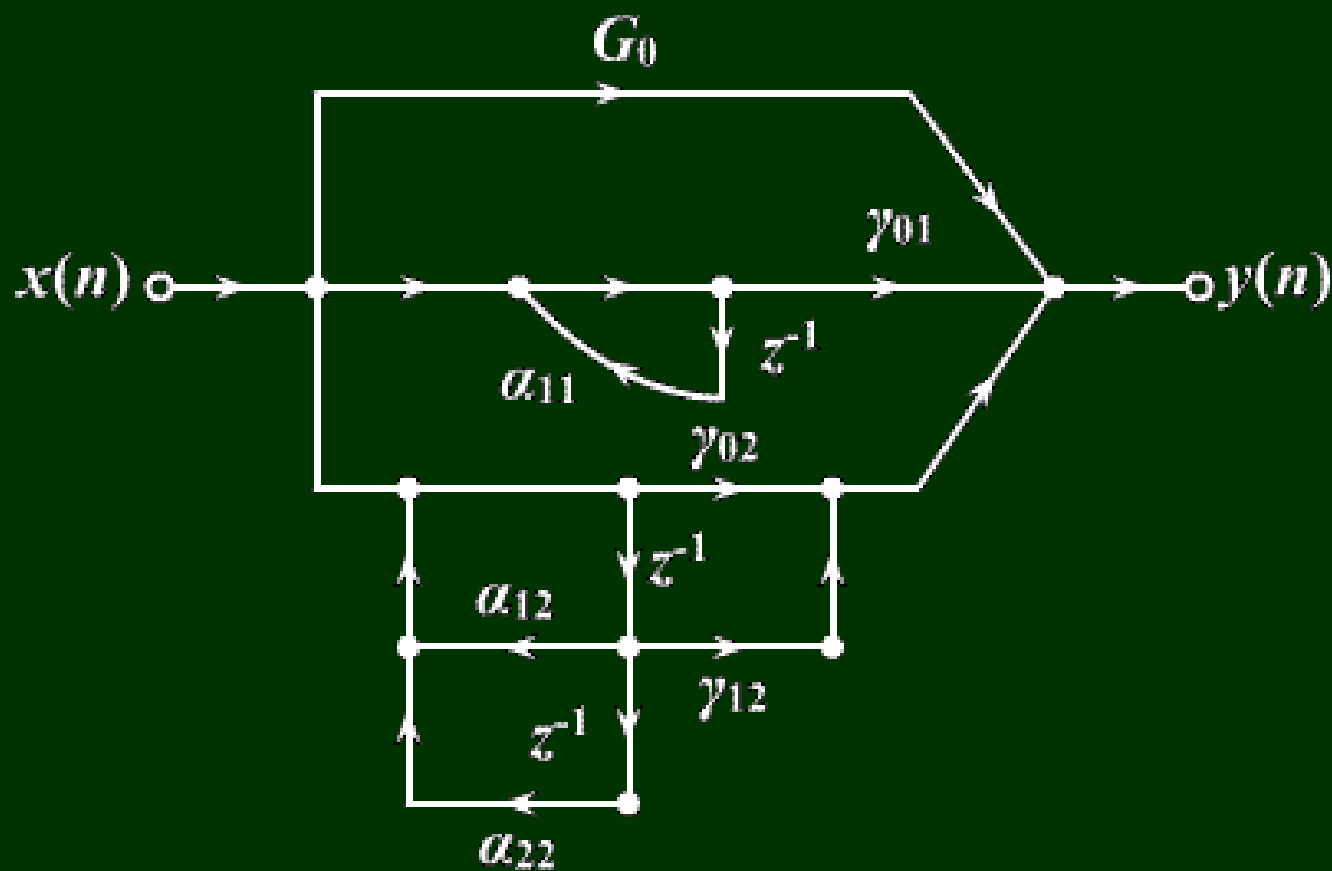


图5-12 三阶IIR滤波器的并联型结构

并联型的特点：

- ◆ 通过调整系数 α_{1k} , α_{2k} 可单独调整一对极点位置，但不能单独调整零点位置
- ◆ 各并联基本节的误差互相不影响，故运算误差最小
- ◆ 可同时对输入信号进行运算，故运算速度最高



转置定理:

- 原网络中所有支路方向倒转，并将输入 $x(n)$ 和输出 $y(n)$ 相互交换，则其系统函数 $H(z)$ 不改变。

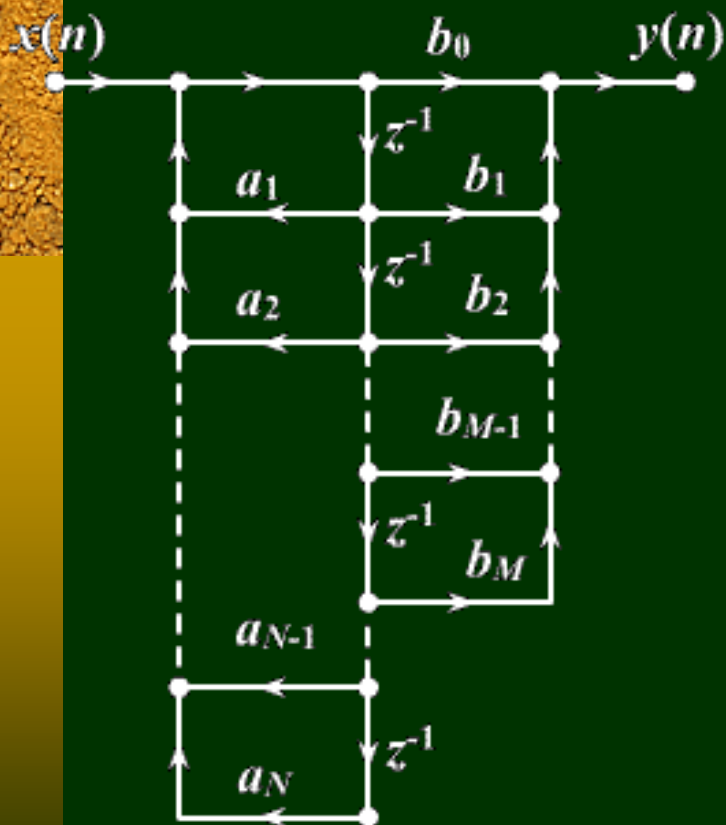


图5-6 直接 II 型结构(典范型结构)

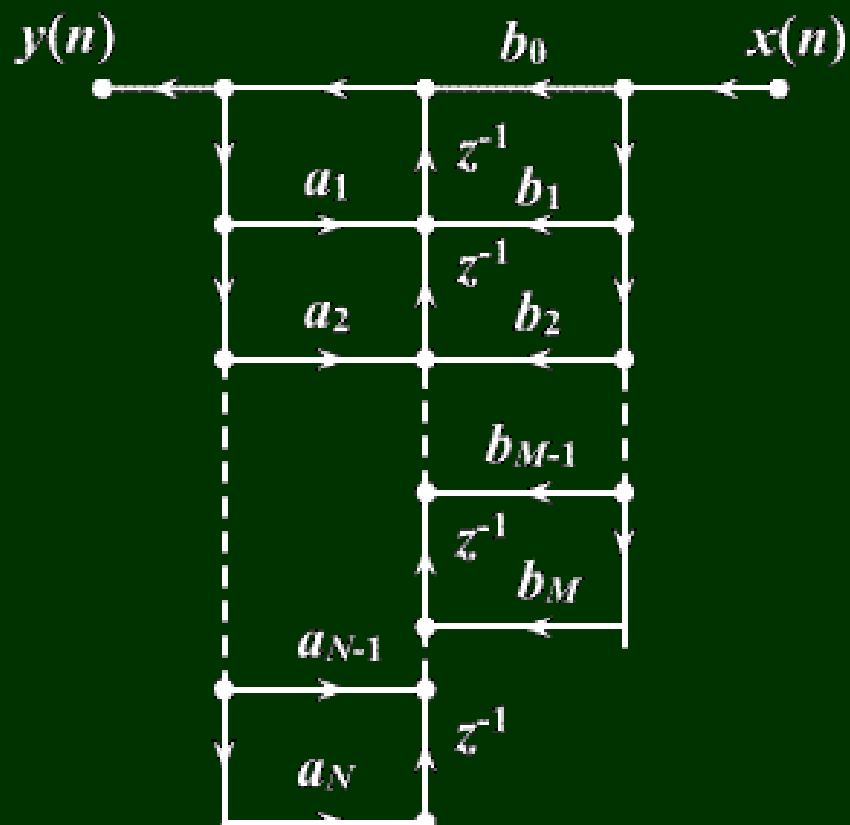


图5-13 典范型结构的转置

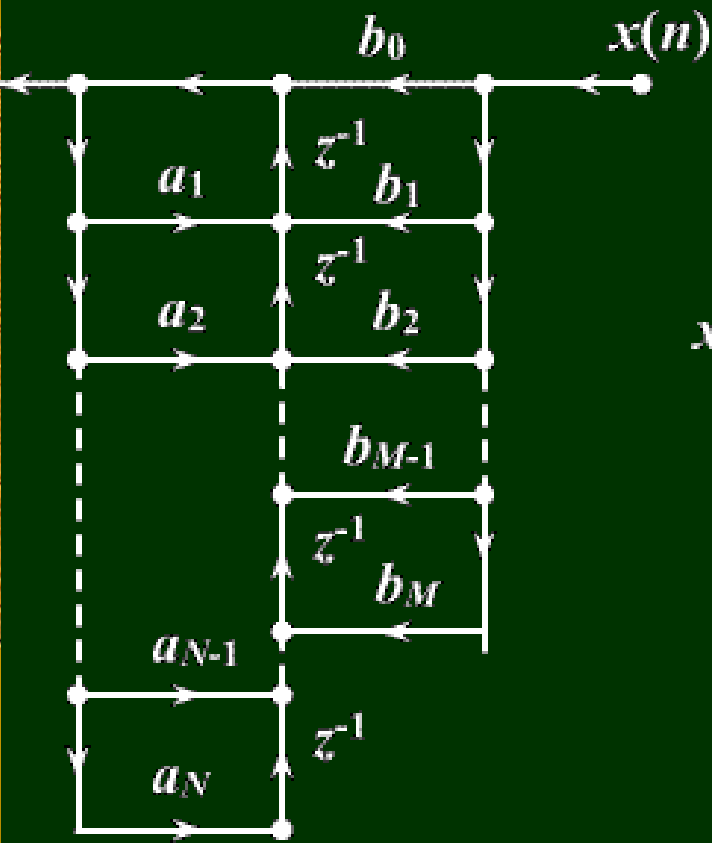


图5-13 典范型结构的转置

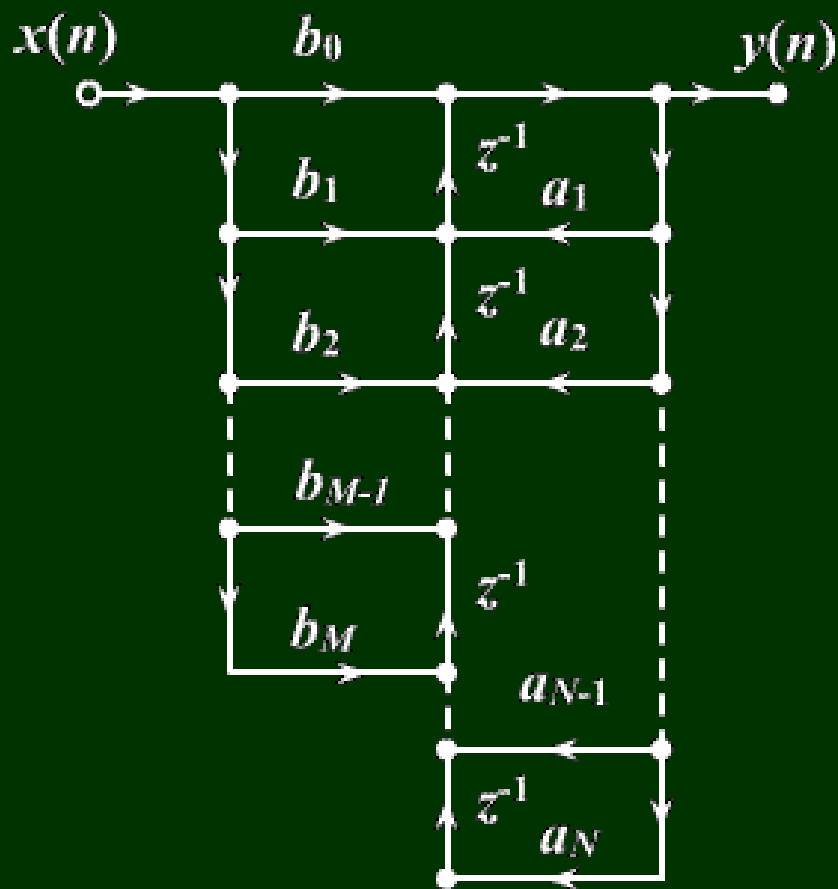


图5-14 将图5-13画成输入在左，输出在右的习惯形式



例：设IIR数字滤波器差分方程为：

$$y(n) = 8x(n) - 4x(n-1) + 11x(n-2) - 2x(n-3) \\ + \frac{5}{4}y(n-1) - \frac{3}{4}y(n-2) + \frac{1}{8}y(n-3)$$

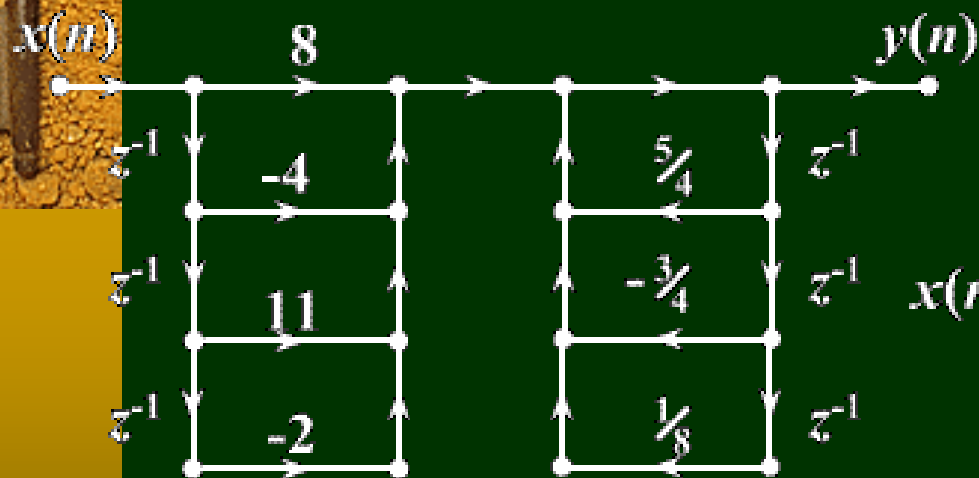
试用四种基本结构实现此差分方程。

解：对差分方程两边取 z 变换，得系统函数：

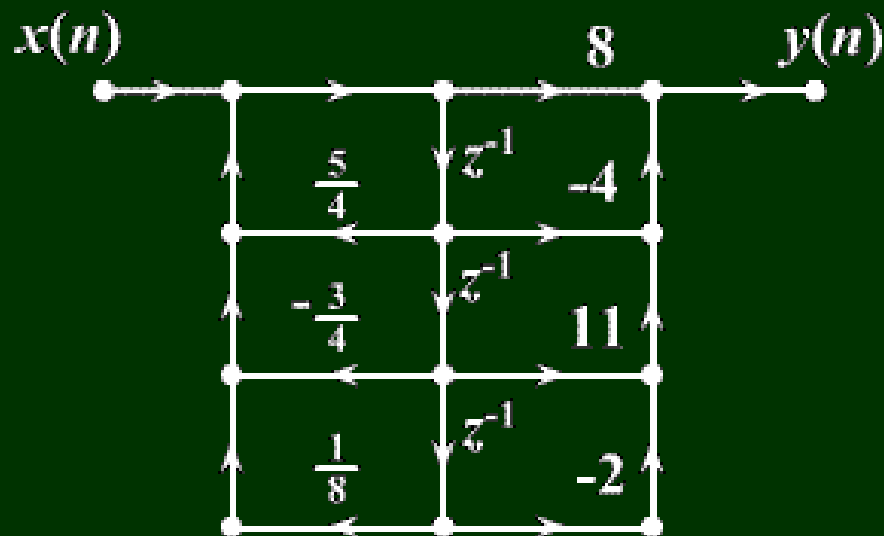
$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$

得直接 I 型结构:



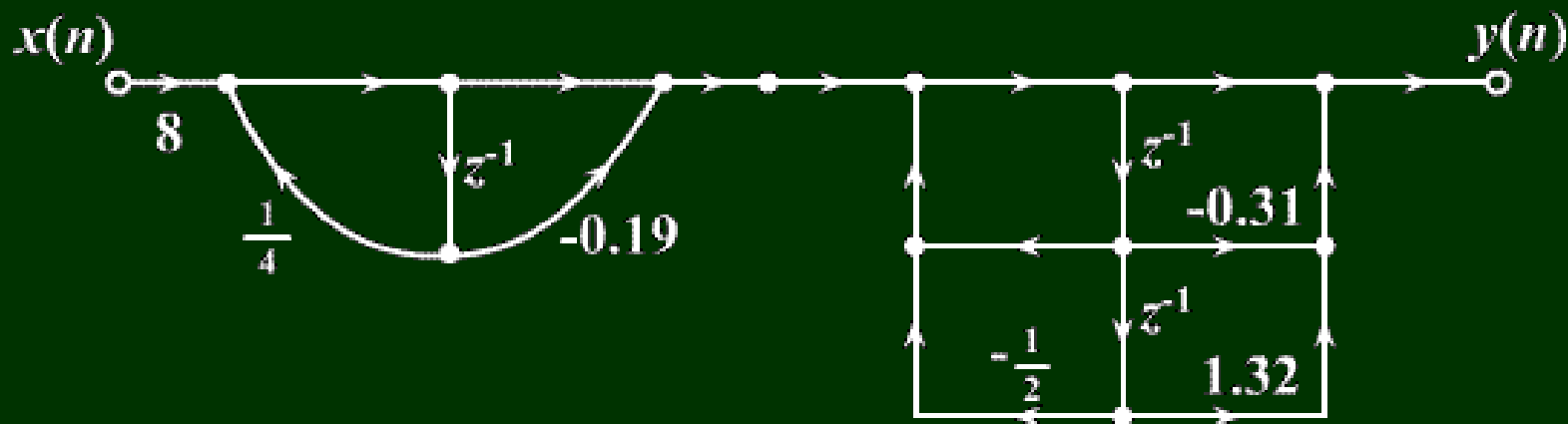
典范型结构:



将 $H(z)$ 因式分解:

$$H(z) = \frac{(2 - 0.379z^{-1})(4 - 1.24z^{-1} + 5.264z^{-2})}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right)}$$
$$= \frac{8(1 - 0.19z^{-1})(1 - 0.31z^{-1} + 1.32z^{-2})}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right)}$$

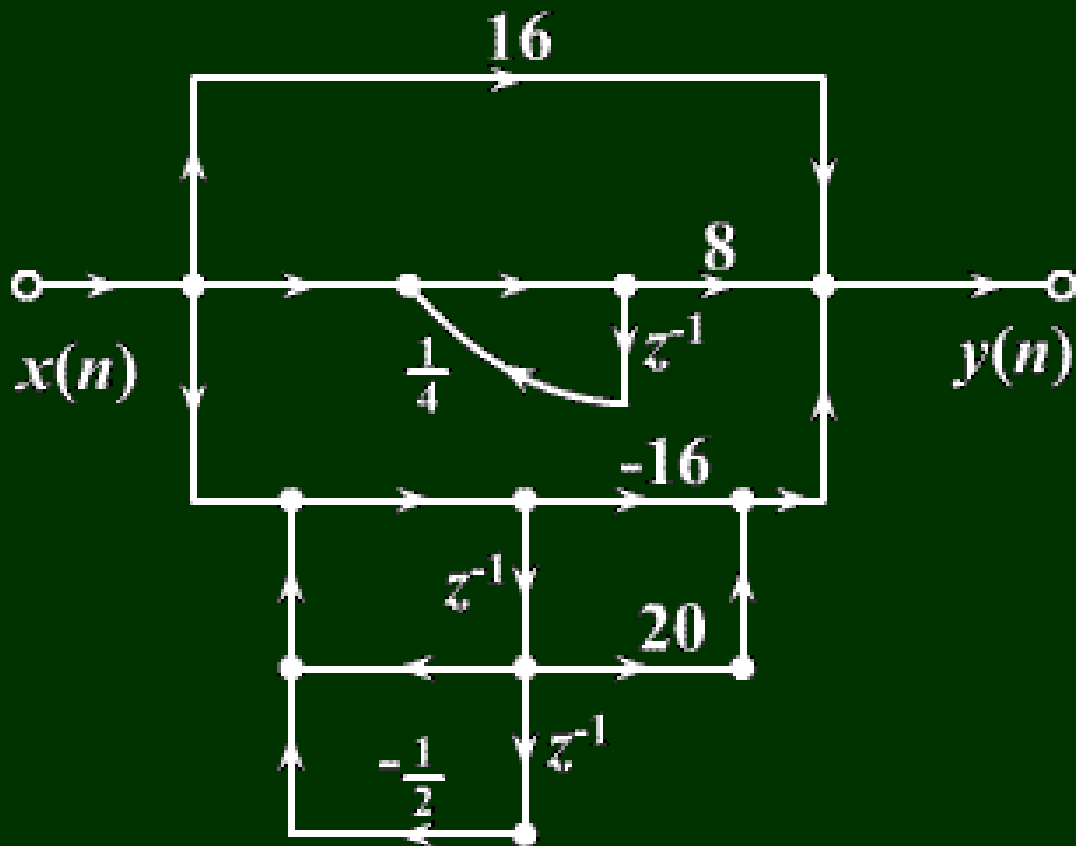
得级联型结构:



将 $H(z)$ 部分分式分解:

$$H(z) = 16 + \frac{8}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{-16 + 20z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

得并联型结构:



三、FIR数字滤波器的基本结构

◆ FIR数字滤波器的特点：

系统函数：
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

有 $N-1$ 个零点分布于 z 平面
 $z=0$ 处 是 $N-1$ 阶极点

- 1) 系统的单位抽样响应 $h(n)$ 有限长，设 N 点
- 2) 系统函数 $H(z)$ 在 $|z| > 0$ 处收敛，有限 z 平面只有零点，全部极点在 $z = 0$ 处（因果系统）
- 3) 无输出到输入的反馈，一般为非递归型结构





$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) x(n-m)$$

1、横截型（卷积型、直接型）

差分方程:
$$y(n] = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m]$$

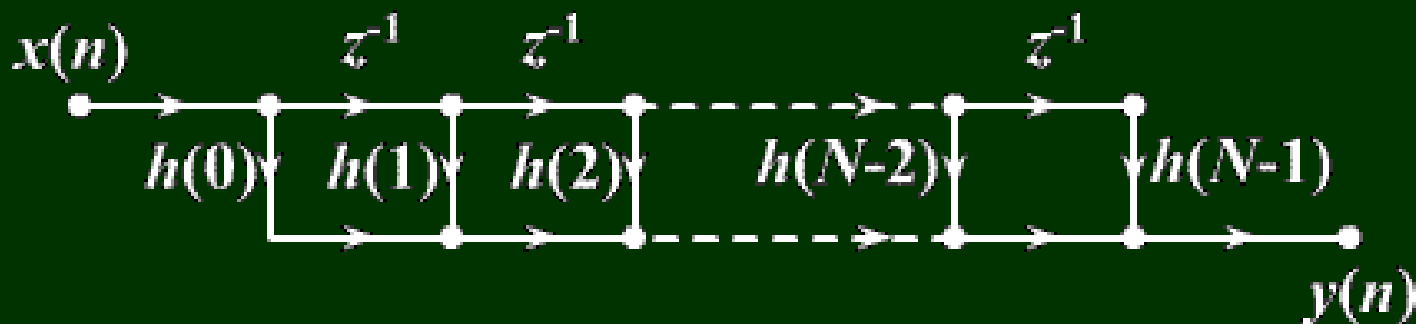


图5-15 *FIR*滤波器的横截型结构

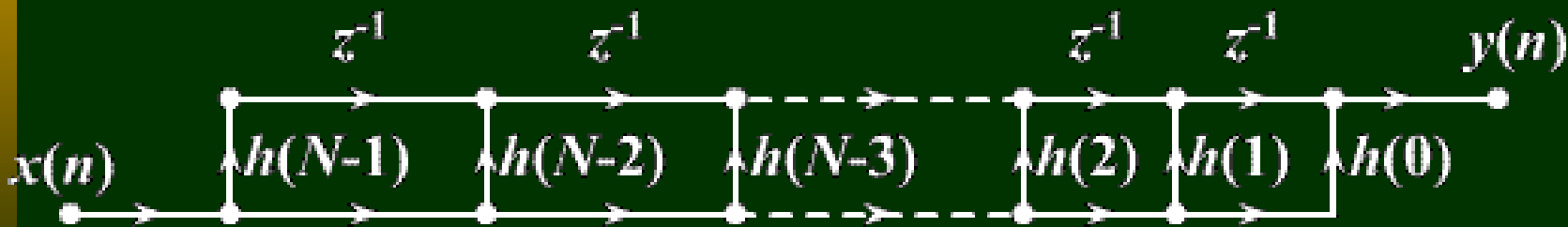


图5-16 图5-15的转置结构

2、级联型

将 $H(z)$ 分解成实系数二阶因式的乘积形式:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{k=1}^{[N/2]} (\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2})$$

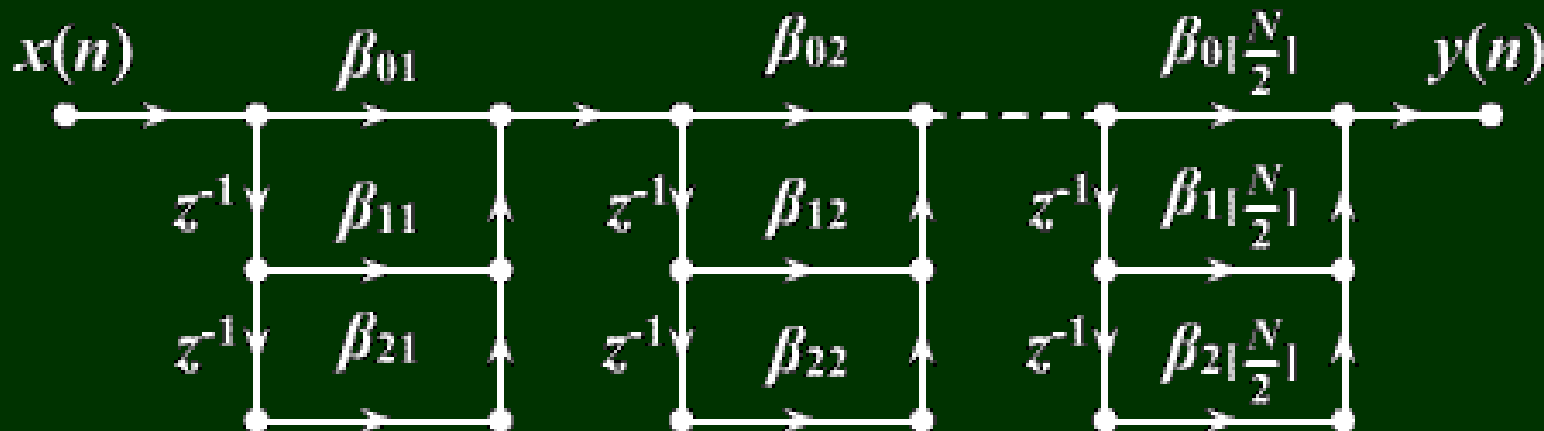


图5-17 *FIR*滤波器的级联型结构(N 为奇数)

N 为偶数时, 其中有一个 $\beta_{2k} = 0$ ($N-1$ 个零点)



级联型的特点

- ◆ 每个基本节控制一对零点，便于控制滤波器的传输零点
- ◆ 系数比直接型多，所需的乘法运算多

3、频率抽样型

N 个频率抽样 $H(k)$ 恢复 $H(z)$ 的内插公式:

$$H(z) = (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{N} H_c(z) \sum_{k=0}^{N-1} H'_k(z)$$



子系统: $H_c(z) = 1 - z^{-N}$

是 N 节延时单元的梳状滤波器

在单位圆上有 N 个等间隔角度的零点:

$$z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

频率响应:

$$H_c(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega N}$$

$$= e^{-j\frac{\omega N}{2}} \left(e^{j\frac{\omega N}{2}} - e^{-j\frac{\omega N}{2}} \right)$$

$$= 2j e^{-j\frac{\omega N}{2}} \sin \frac{\omega N}{2}$$

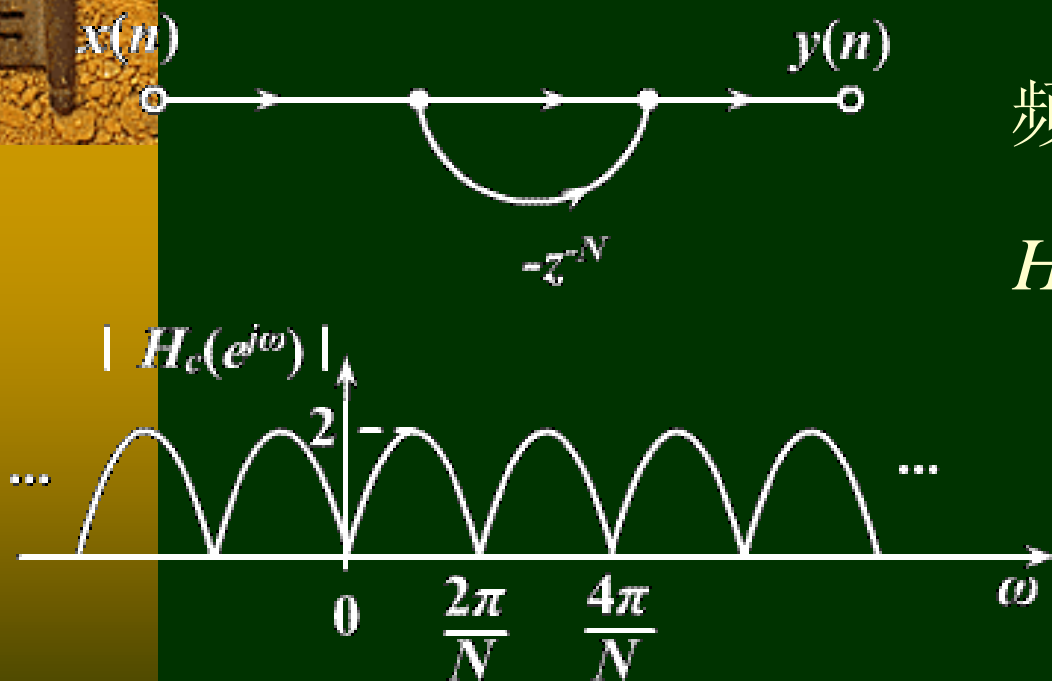



图5-18 梳状滤波器结构及频率响应幅度



子系统: $H'_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$ 谐振器

单位圆上有一个极点: $z_k = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$

与第 k 个零点相抵消, 使该频率 $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ 处的频率响应等于 $H(k)$

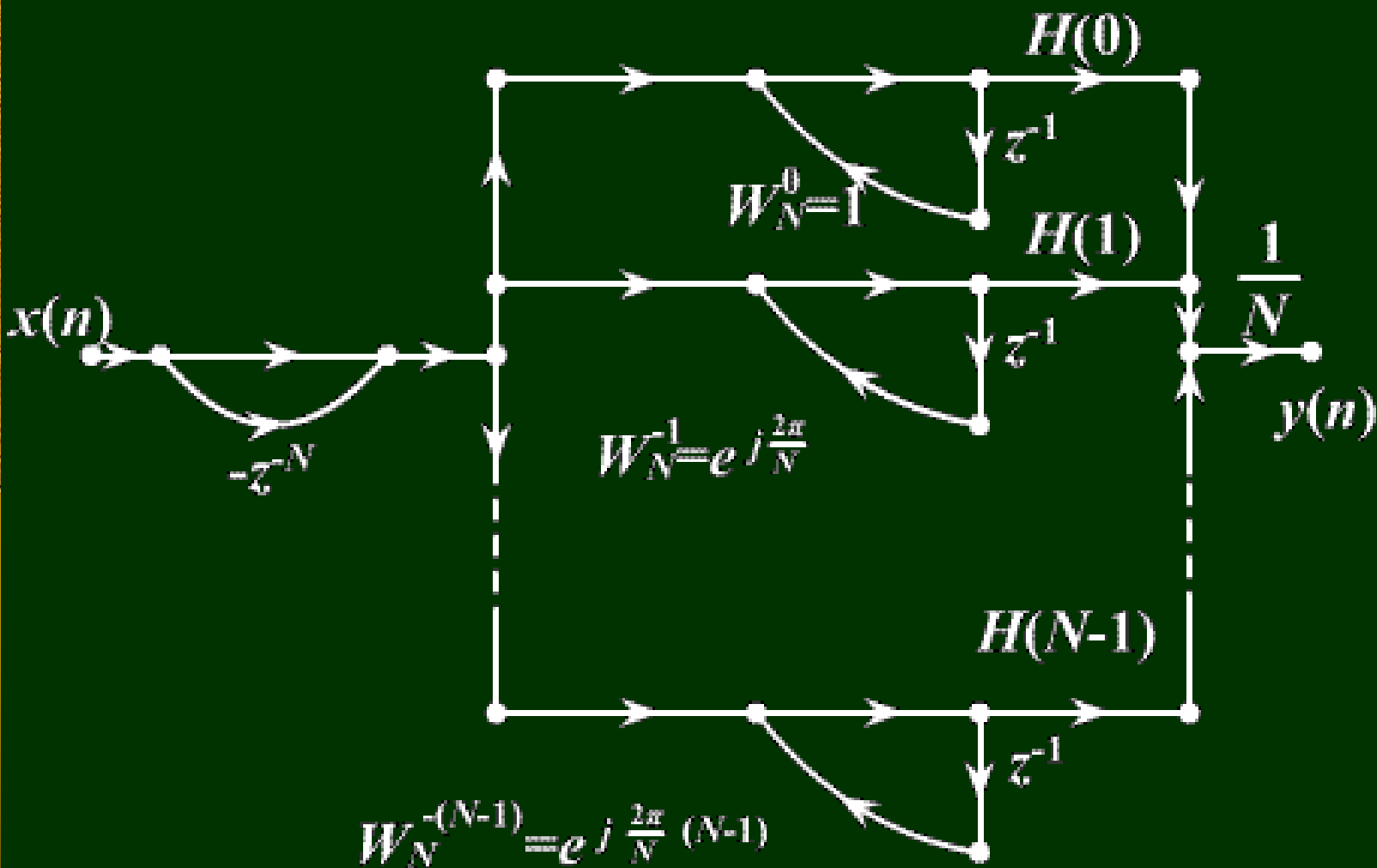


图5-19 *FIR*滤波器的频率抽样型结构

频率抽样型结构的优缺点

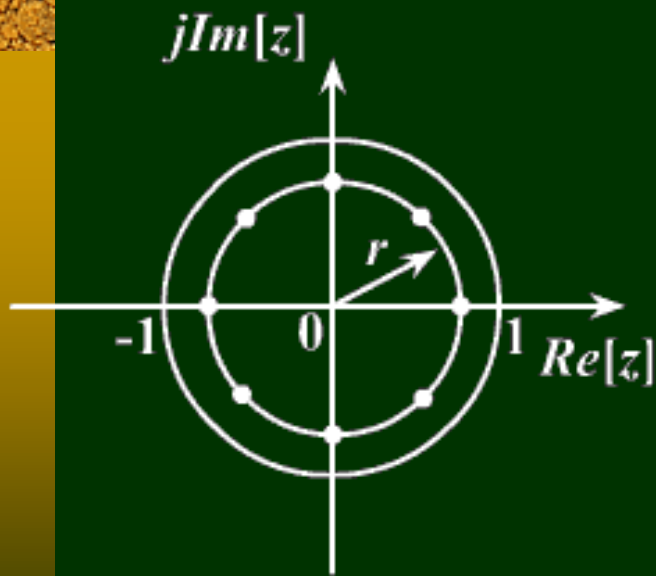
- ◆ 调整 $H(k)$ 就可以有效地调整频响特性
- ◆ 若 $h(n)$ 长度相同，则网络结构完全相同，除了各支路增益 $H(k)$ ，便于标准化、模块化
- ◆ 有限字长效应可能导致零极点不能完全对消，导致系统不稳定
- ◆ 系数多为复数，增加了复数乘法和存储量



修正频率抽样结构

将零极点移至半径为 r 的圆上： $r < 1$ 且 $r \approx 1$

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_r(k)}{1 - r W_N^{-k} z^{-1}}$$



极点： $z_k = r e^{j\frac{2\pi}{N}k}$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

图5-20 抽样点改到 $r \leq 1$ 的圆上

为使系数为实数，将共轭根合并

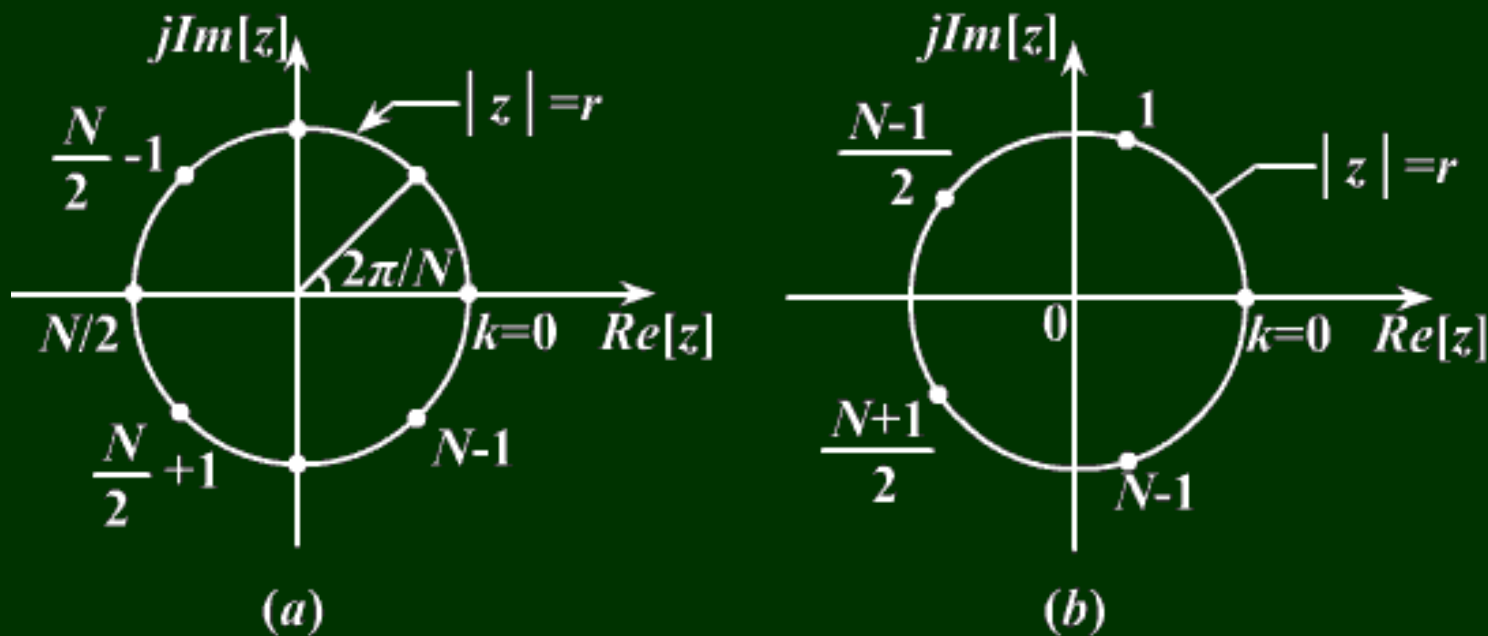


图5-21 谐振器各个根的位置
(a) N 为偶数(b) N 为奇数

由对称性: $z_{N-k} = z_k^*$ $W^{-(N-k)} = W_N^k = (W_N^{-k})^*$

又 $h(n)$ 为实数，则 $H(k) = H^*((N-k))_N R_N(k)$

将第 k 个和第 $(N-k)$ 个谐振器合并成一个实系数的二阶网络:

$$\begin{aligned} H_k(z) &= \frac{H(k)}{1 - rW_N^{-k}z^{-1}} + \frac{H(N-k)}{1 - rW_N^{-(N-k)}z^{-1}} \\ &= \frac{H(k)}{1 - rW_N^{-k}z^{-1}} + \frac{H^*(k)}{1 - r(W_N^{-k})^*z^{-1}} \\ &= \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1}}{1 - z^{-1}2r\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) + r^2z^{-2}} \end{aligned}$$

其中:

$$\beta_{0k} = 2\operatorname{Re}[H(k)]$$

$$\beta_{1k} = -2r\operatorname{Re}[H(k)W_N^k]$$

$$\begin{cases} k = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} & N \text{ 为奇数} \\ k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 & N \text{ 为偶数} \end{cases}$$

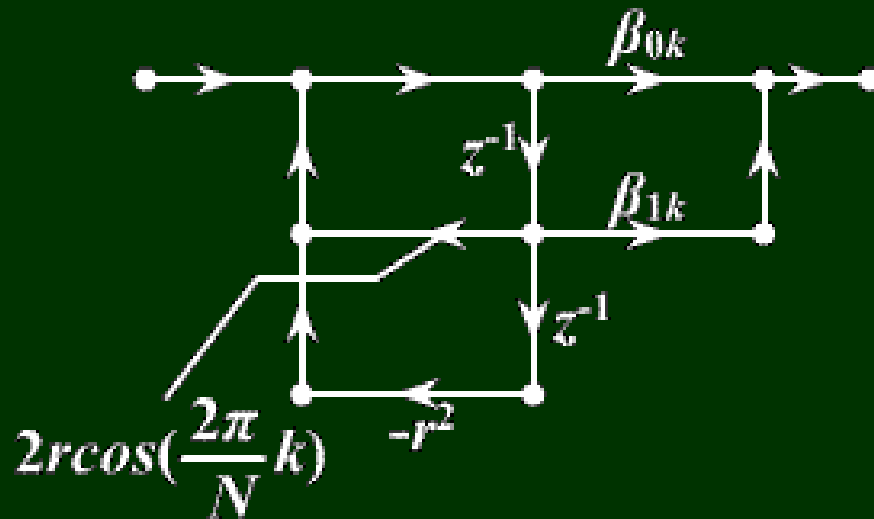


图5-22 二阶谐振器

◆ 当 N 为偶数时，还有一对实数根

$k=0, N/2$ 处: $z = \pm r$

$$H_0(z) = \frac{H(0)}{1 - rz^{-1}}$$

$$H_{N/2}(z) = \frac{H(N/2)}{1 + rz^{-1}}$$

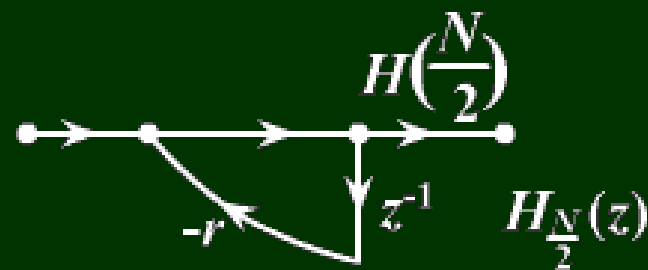


图5-23 一阶网络(实根)



$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[H_0(z) + H_{N/2}(z) + \sum_{k=1}^{N/2-1} H_k(z) \right]$$

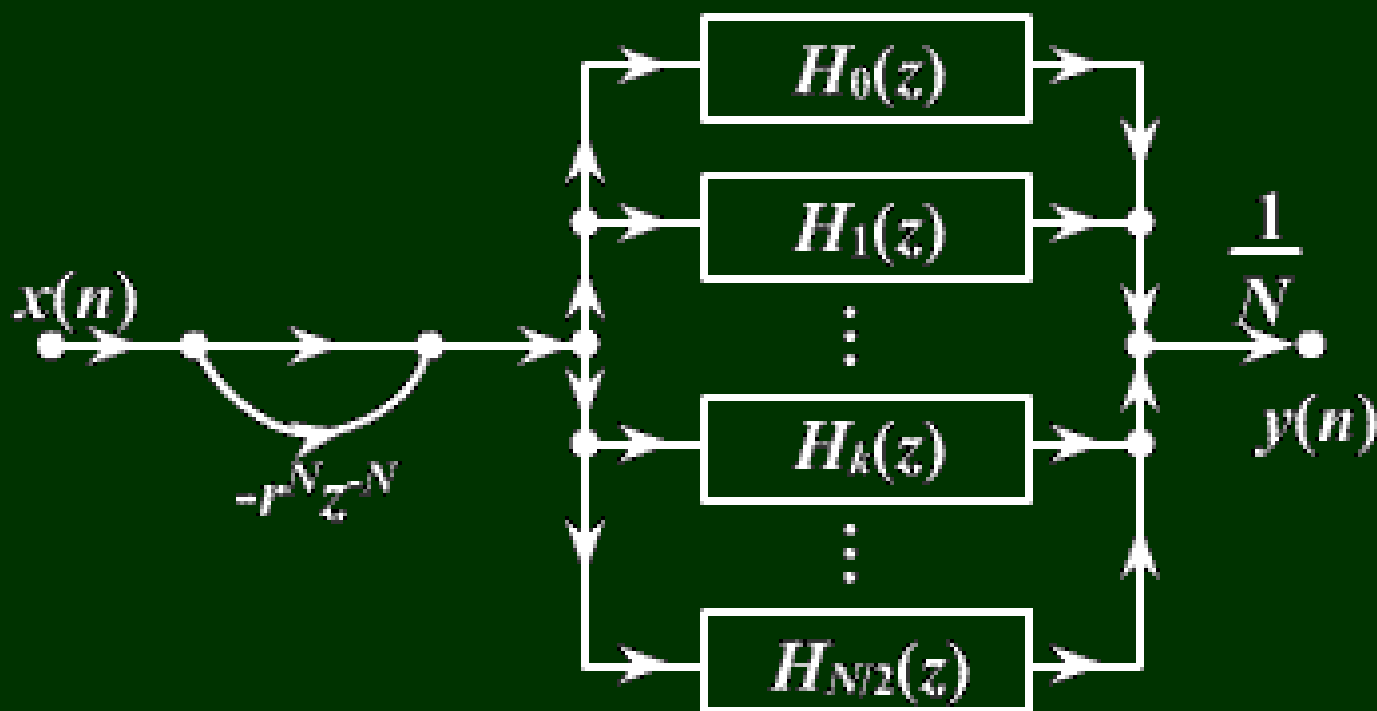


图5-24 FIR滤波器修正后的频率抽样结构



◆ N为奇数时

只有一个实数根在 $k=0$ 处: $z=r$

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[H_0(z) + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} H_k(z) \right]$$

4、快速卷积结构

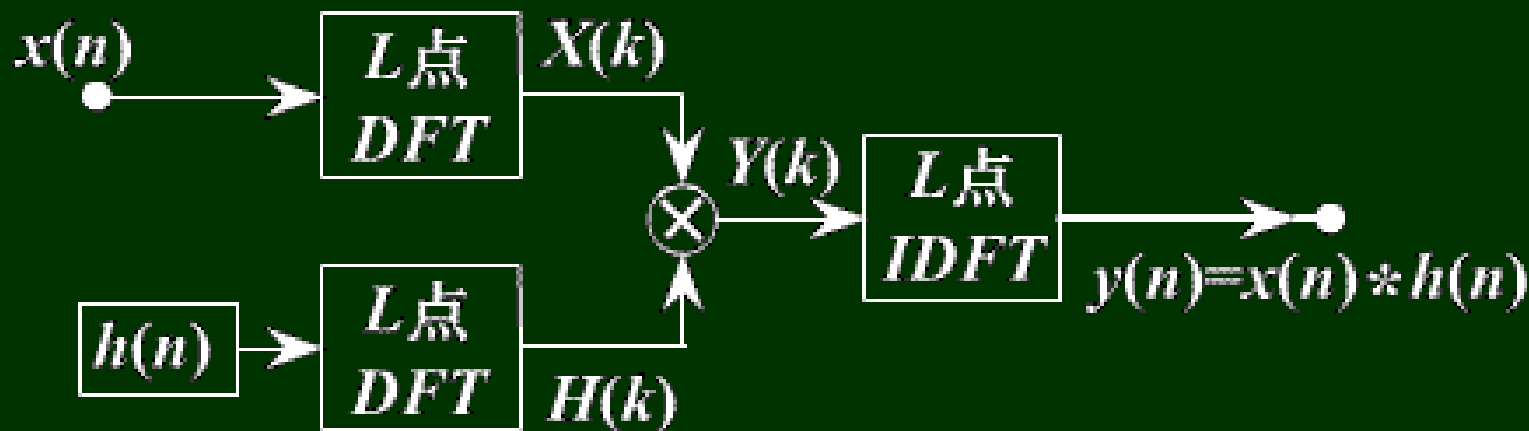


图5-25 *FIR*滤波器的快速卷积结构

5、线性相位FIR滤波器的结构

FIR滤波器单位抽样响应 $h(n)$ 为实数， $0 \leq n \leq N-1$
且满足：

偶对称： $h(n) = h(N-1-n)$

或奇对称： $h(n) = -h(N-1-n)$

即对称中心在 $(N-1)/2$ 处

则这种FIR滤波器具有严格线性相位。





N 为奇数时

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) z^{-n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

$$\text{令 } n = N-1-m$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) \left[z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)} \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}}$$

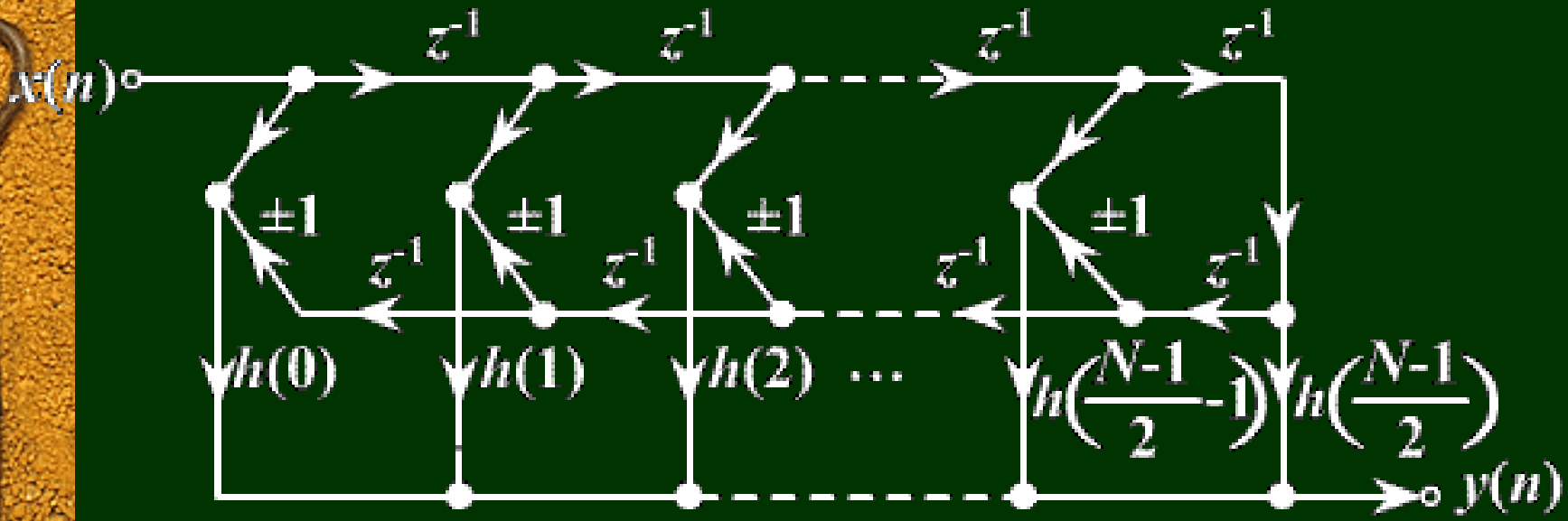


图5-26 N 为奇数时线性相位FIR滤波器的直接型结构

$h(n)$ 偶对称, 取“+”

$h(n)$ 奇对称, 取“-”, $h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$

N 为偶数时

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) z^{-n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n) z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left[z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)} \right]
 \end{aligned}$$

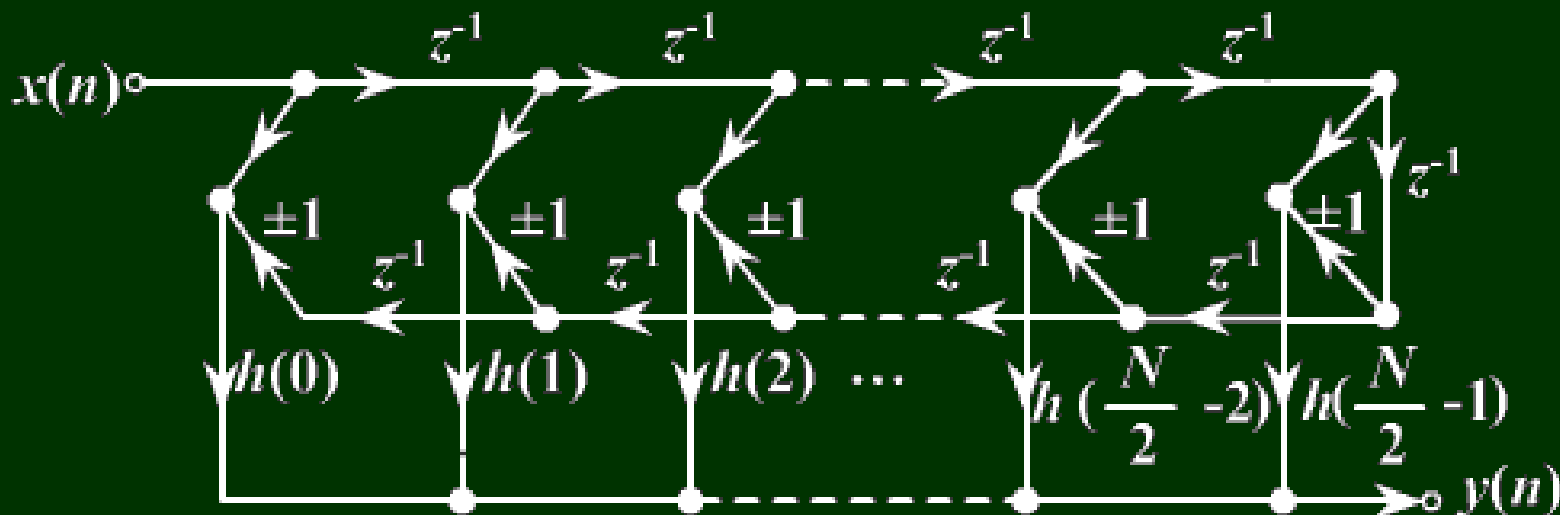


图5-27 N 为偶数时，线性相位FIR滤波器的直接型结构
($h(n)$ 偶对称时 ± 1 取+1, $h(n)$ 奇对称时 ± 1 取-1)