信号与系统

第三章 泛函分析初步

第三章 泛函分析初步

§ 3.1 线性空间

- 线性空间：设$W \neq \varnothing$（W为非空集合）
  - (1) W中元对“+”构成交换群，即对$\forall\ \mathbf{\Xi},\mathbf{\Psi},\mathbf{Z}\in W$，有

i．$\mathbf{X}+\mathbf{Y}\in W$（加法封闭性）

ii．$(\mathbf{X}+\mathbf{Y})+\mathbf{Z}=\mathbf{X}+(\mathbf{Y}+\mathbf{Z})$（结合律） 半群

iii．$\exists \mathbf{0}\in W$，使$\mathbf{0}+\mathbf{X}=\mathbf{X}$（存在零元） 群

iv．$\exists -\mathbf{X}\in W$，使$(-\mathbf{X})+\mathbf{X}=\mathbf{0}$（存在逆元） 交换群

v．$\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\mathbf{Y}+\mathbf{X}$（交换律）

§ 3.1 线性空间

– (2)对∀ $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in W$， ∀$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in$ X（复数域）有：

vi. $\alpha(\beta\mathbf{X})=(\alpha\beta)\mathbf{X}\in W$

vii. $(\alpha+\beta)\mathbf{X}=\alpha\mathbf{X}+\beta\mathbf{X}$

viii. $\alpha(\mathbf{X}+\mathbf{Y})=\alpha\mathbf{X}+\alpha\mathbf{Y}$

ix. $\mathbf{1}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{X}$

称W为线性空间；若∀$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in$ X ， 则W为复线性空间；若$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in$ P，则W为实线性空间。

§ 3.1 线性空间

- $\begin{matrix} 1)\text{加法封闭} \\ 2)\text{数乘封闭} \end{matrix} \Leftrightarrow \forall \mathbf{X}_i \in W, \forall \alpha_i \in$ □ 有 $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{X}_i \in W$
- $\mathrm{C}[a,b]$（$[a,b]$上所有连续函数的全体）是线性空间。
- $span\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n\}$是由$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$张成的线性空间。

§3.1 线性空间

- 线性空间W上的算子L为线性算子

$$\Leftrightarrow \mathrm{L}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i \mathbf{X}_i\right\} = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i \mathrm{L}\left\{\mathbf{X}_i\right\}$$

- 零状态线性系统⇔系统算子为线性算子

§3.2 线性子空间

- 线性子空间：设 $\varnothing \neq V \subset W$， V是W的线性子空间

  $\Leftrightarrow$ 对$\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in V, \forall \alpha, \beta \in \square$,有$\alpha \mathbf{X} + \beta \mathbf{Y} \in V$

- 直和：设$W_1, W_2, \cdots, W_p$是W的子空间, 若$\forall \mathbf{X} \in W$,

  $\mathbf{X}$可唯一表示成$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_p$,其中$\mathbf{X}_i \in W$

  $(i = 1, \ldots, p)$,则称W是$W_1, W_2, \cdots, W_p$的直和,

  记为:$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_p$。

§3.3 距离空间（度量空间——Metric Space）

- 距离空间：设$W\neq\varnothing$，称W为距离空间，指在W中定义了映射：　$\rho(\mathbf{X},\mathbf{Y}):W\times W\to R_{+}$（包括0），$\forall\ \mathbf{\Xi},\mathbf{\Psi}\in W$ 满足以下三条公理：

  i. $\rho(\mathbf{X},\mathbf{Y})\geq 0$, 且$\rho(\mathbf{X},\mathbf{Y})=0\Leftrightarrow \mathbf{X}=\mathbf{Y}$（正定性）

  ii. $\rho(\mathbf{X},\mathbf{Y})=\rho(\mathbf{Y},\mathbf{X})$　（可交换性）

  iii. $\rho(\mathbf{X},\mathbf{Z})\leq\rho(\mathbf{X},\mathbf{Y})+\rho(\mathbf{Y},\mathbf{Z})$　（三角不等式）

- $\rho(\mathbf{X},\mathbf{Y})$称为$W$上的距离, (W,ρ)为度量空间。

§ 3.3 距离空间

- 例：□ ,□

$$\rho\left(X,Y\right)=\left|X-Y\right|$$

- 例：$C\left[a,b\right]$

$$\rho\left(X\left(t\right),Y\left(t\right)\right)=\max_{a\le t\le b}\left|X\left(t\right)-Y\left(t\right)\right|$$

§3.3 距离空间

- 例： $\mathbb{R}^n, \forall \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$\rho(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$\rho(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$\rho(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \max_{\forall i} |x_i - y_i|$$

§3.3 距离空间—收敛

- 收敛：度量空间(W,ρ)中的点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于x_0

$$\Leftrightarrow x_0\text{是}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\text{的极限}$$

$$\Leftrightarrow \rho\left(x_n, x_0\right)\to 0\,,\text{当}n\to\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

- 定理：在(W,ρ)中，每个收敛点列有唯一的极限点。

§3.3 距离空间—完备度量空间

- 柯西序列——Cauchy Sequence

  设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是(W,ρ)中的点列, 若对$\forall \varepsilon > 0$,

  $\exists N = N(\varepsilon)$, 使$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, $\forall n, m > N$,

  则称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是(W,ρ)中的柯西序列。

  - 例：$\rho(x_n, x_m) \square |x_m - x_n|$

    $$\lim_{m,n\to\infty} |x_m - x_n| = 0$$

§3.3 距离空间—完备度量空间

- (W,ρ)中任意收敛序列是柯西序列
- (W,ρ)中的柯西序列未必收敛到(W,ρ)中
  - 例：

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty},\ W=[0,1],\rho \square \left|X-Y\right|,\quad X,Y\in W$$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}\text{是柯西序列, 但}\frac{1}{n}\to 0,n\to\infty,0\notin[0,1]$$

§3.3 距离空间－完备度量空间

- 完备度量空间——Complete Metric Space
  (W,ρ)称为完备度量空间，指其中所有柯西序列都收敛。
  - 极限运算在完备时可行
  - 如何完备化？
  - W不要求线性空间

§3.4 巴拿赫（Banach）空间

§3.4.1 赋范线性空间

- 赋范线性空间：设$W\neq\varnothing$是线性空间，若对∀ $\boldsymbol{\Xi}\in W$， ∃ ‖ $\boldsymbol{\Xi}$ ‖ 满足：

$$\text{i. } \exists\|\mathbf{X}\|\geq 0, \|\mathbf{X}\|=0 \Leftrightarrow \mathbf{X}=\mathbf{0}$$（正定性）

$$\text{ii. } \|\alpha\mathbf{X}\|=|\alpha|\|\mathbf{X}\|, \forall\alpha\in\square$$（正齐性）

$$\text{iii. } \|\mathbf{X}+\mathbf{Y}\|\leq\|\mathbf{X}\|+\|\mathbf{Y}\|$$（三角不等式）

称为$\boldsymbol{\Xi}$的范数（*Norm*），定义了范数的线性空间称为赋范线性空间，记为 $(W, \|\square\|)$。

§ 3.4.1 赋范线性空间

- （广义）长度的推广：
  - 例1：$\square^n, \forall \mathbf{X} = \left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]^T \in \square^n$

$$\|\mathbf{X}\|_p = \left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}, 1 \le p < \infty$$

特别的：$p = \infty, \|\mathbf{X}\|_\infty = \max |x_i|, \forall i$

$$p = 2, \|\mathbf{X}\|_2 = \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle^{\frac{1}{2}}$$ 欧式范数

§ 3.4.1 赋范线性空间

- （广义）长度的推广：
  - 例2：$l^p \triangleq \left\{ \mathbf{X} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}, 1 \le p < \infty$

$$\|\mathbf{X}\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}}, 1 \le p < \infty$$

特别的：$p = \infty, \|\mathbf{X}\|_\infty = \sup |x_i|, \forall i$

§3.4.1 赋范线性空间

- Minkowski不等式：

设$a_i, b_i \geq 0, \forall i, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^p < \infty, \sum_{i=1}^{\infty} b_i^p < \infty$, 则

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$$

等号成立条件为：$\{b_i\}_{i=1}^{\infty} = \alpha \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$

§3.4.1 赋范线性空间

- $l^1 \subset l^2 \subset \ldots \subset l^\infty$

其中$l^p \,\square\, \left\{ \mathbf{X} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}, 1 \le p < \infty$。

证明：$\forall \mathbf{X} \in l^p, \because \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty,$

$\therefore \exists N,$使得当$n < N$时，恒有$|x_n| < 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^p < \sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^q < \infty, \forall q > p$$

$\therefore \mathbf{X} \in l^q \Rightarrow l^p \subset l^q$。

§3.4.1 赋范线性空间

- 例 $\mathrm{C}[a,b]$，对$\forall x(t)\in \mathrm{C}[a,b]$,

$$\left\|x(t)\right\|_p=\left\{\int_a^b\left|x(t)\right|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}},1\le p<\infty$$

Minkowski不等式:

$$\left\{\int_a^b\left|x(t)+y(t)\right|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_a^b\left|x(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b\left|y(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},1\le p<\infty$$

$$\tilde{L}^p[a,b]\triangleq\left\{x(t)\mid\int_a^b\left|x(t)\right|^p dt<\infty\right\}$$

当$p=\infty,\left\|x(t)\right\|_\infty=\sup\limits_{\forall t\in[a,b]}\left|x(t)\right|$

§3.4.1 赋范线性空间

- 强收敛：在$\left(W,\|\cdot\|\right)$中，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于x，指 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$，也称为依范数收敛。
- 弱收敛：依泛函收敛。
  - 注：强收敛⇒弱收敛。

§3.4.1 赋范线性空间

- 度量空间与赋范线性空间的关系：
  - 在$\left(W, \|\square\|\right)$中, 定义$\rho\left(\mathbf{X}, \mathbf{Y}\right) = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$

    $$\left(W, \|\square\|\right) \Rightarrow \left(W, \rho\right)$$

    反之不然

  - 例在S中,

    $$\rho\left(\mathbf{X}, \mathbf{Y}\right) = \begin{cases} 0, & \mathbf{X} = \mathbf{Y} \\ 1, & \mathbf{X} \neq \mathbf{Y} \end{cases}$$

    但$\rho\left(\mathbf{X}, \mathbf{Y}\right) \square \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$不满足范数定义（ii条）

§3.4.2. Banach空间

- Banach空间：完备的$\left(W, \|\cdot\|\right)$称为Banach空间。
- $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, l^p$是Banach空间。
- 在$C[a,b]$中，取$\|x\|_\infty = \max\limits_{a \le x \le b} |x(t)|$完备。
- $\tilde{L}^p[a,b], 1 \le p < \infty,$不完备

$$\|x(t)\|_p = \left\{ \int_a^b |x(t)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$Riemann\text{积分} \Rightarrow Lebesgue\text{积分}$$

§ 3.4.2. Banach空间

- 定理：若 $1 \le p \le q \le \infty$，则$L^q[a,b] \subseteq L^p[a,b]$。
  - Hölder不等式：

    若 $f(x) \in L^p[a,b], g(x) \in L^q[a,b], \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，则

    $$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left\{\int_a^b |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_a^b |g(x)|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}$$

  - 证明思路：$\forall f(x) \in L^q[a,b]$ $\int_a^b |f(x)|^p \cdot |1|^p dx$

    构造$0 \le p \le q < r \le +\infty$ $\dfrac{p}{q} + \dfrac{p}{r} = 1$

§3.5 Hilbert空间

§3.5.1 内积空间

- 内积：设$W \neq \emptyset$为实或复线性空间，若对 $\forall\, \boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\Psi}, \mathbf{Z} \in W, \lambda \in \mathrm{X}$，均有一个实数或复数与之对应，记为 $\langle \boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\Psi} \rangle$ ，满足：

  i. $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \geq 0$, 且 $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{0}$（正定性）

  ii. $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle^*$（共轭交换性）

  iii. $\langle \lambda \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$（齐次性）

  iv. $\langle \mathbf{X} + \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle = \langle \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle + \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle$（加法分配性）

则称 $\langle \boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\Psi} \rangle$ 为$\boldsymbol{\Xi}$与$\boldsymbol{\Psi}$的内积，定义了内积的空间为内积空间。

§ 3.5.1 内积空间

- 注：
  - $1. \langle \mathbf{X}, \lambda\mathbf{Y} \rangle = \lambda^* \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$
  - $2. \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle : W \times W \to \square$，若$W$为数的集合，则$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$为通常的二元函数。
  - 3. iii和iv可以合并：$\langle \alpha\mathbf{X} + \beta\mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle + \beta \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle$
- 例子：
  - $\square^n = span\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n\}$,

    $\mathbf{X} = [x_1, \ldots, x_n]^T, \mathbf{Y} = [y_1, \ldots, y_n]^T \in \square^n$,

    $$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \mathbf{X}^T\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

§3.5.1 内积空间

- 例子：
  - U^n（约定了内积复线性空间），$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \mathbf{X}^H \mathbf{Y}$, H表示共轭转置。
  - $\boldsymbol{C}[a, b], \langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x(t) y^*(t) dt$。
  - $L_n^2[a,b] = \left\{ \mathbf{X}(t) \mid \int_a^b \mathbf{X}^H(t)\mathbf{X}(t)dt < \infty \right\}$

    $\mathbf{X}(t) = \left[x_1(t), \ldots, x_n(t) \right]^T \in L_n^2[a,b], x_i(t) \in L^2[a,b],$

    $i = 1, \ldots, n$

    $\langle \mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t) \rangle = \int_a^b \mathbf{X}^H(t)\mathbf{Y}(t)dt$

§3.5.2 Hilbert空间

- 定义欧氏范数 $\|\mathbf{X}\|_2 = \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle^{\frac{1}{2}}$，则内积（线性）空间成为赋范线性空间。
- Hilbert空间：依欧氏范数 $\|\mathbf{X}\|_2 = \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle^{\frac{1}{2}}$完备的内积空间称为Hilbert空间。
- 有限维内积空间必完备：$\square^{n}, U^{n}$完备。
- $L^2[a,b]$完备，定义内积$\int_a^b x(t)\, y^*(t)\, dt$。
- H空间是能量有限信号的集合。

§ 3.5.2 Hilbert空间

- Cauchy-Schwarz不等式：W为内积空间，$\forall\ \boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\Psi}\in W$，有

$$\left|\langle \mathbf{X},\mathbf{Y}\rangle\right|\le\|\mathbf{X}\|_2\|\mathbf{Y}\|_2$$

- 注：
  - 1.在Hölder不等式中，取$p=q=2$，就成为Cauchy-Schwarz不等式。
  - 2.在U^n空间中，有Cauchy不等式：

$$\left|\mathbf{X}^H\mathbf{Y}\right|\le\left(\mathbf{X}^H\mathbf{X}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbf{Y}^H\mathbf{Y}\right)^{\frac{1}{2}}$$

  - 3.在$L^2[a,b]$空间中，有Schwarz不等式：

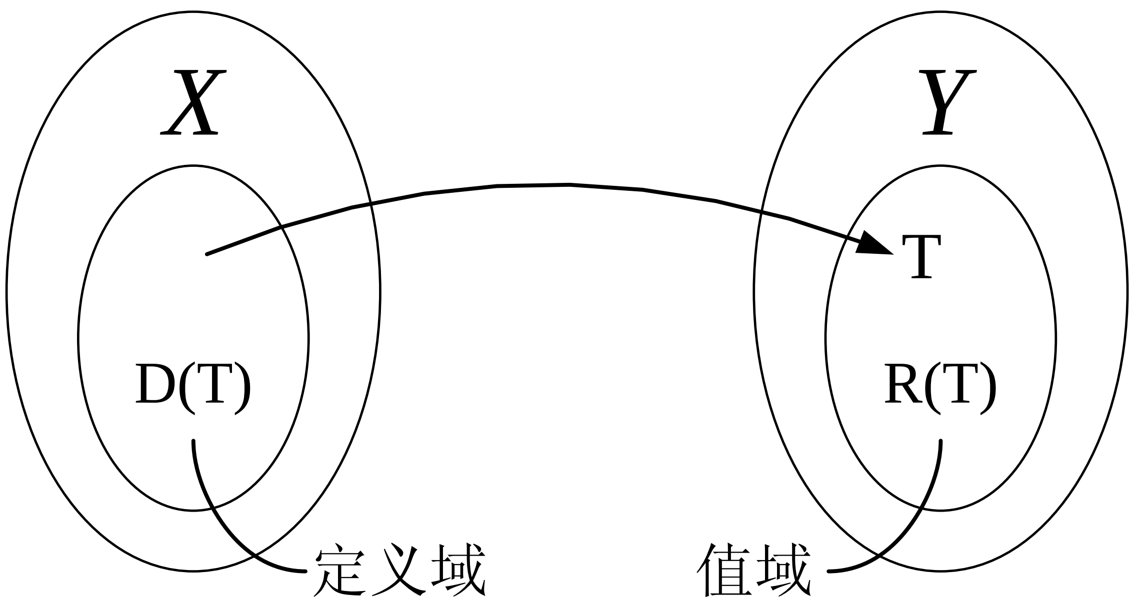
$$\left|\int_a^b x(t)y^*(t)dt\right|\le\left\{\int_a^b|x(t)|^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_a^b|y(t)|^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

§3.5.3 线性泛函

- 算子—Operator：X,Y为线性空间，算子：

$$\mathrm{T}:\mathrm{D}(\mathrm{T})\subset X\to \mathrm{R}(\mathrm{T})\subset Y \text{ 或 } \mathrm{T}:X\to Y$$

其中，$\mathrm{D}(\mathrm{T})$为定义域，$\mathrm{R}(\mathrm{T})$为值域。



§3.5.3 线性泛函

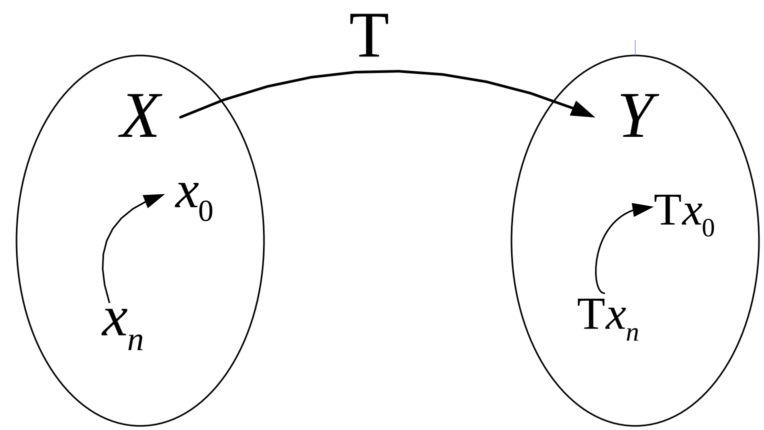
- 泛函—Functional：值域是实／复数域的算子为泛函。
  - 注：定积分，距离，范数，内积，δ函数（第三种定义），（普通）函数均为泛函。
- 线性算子： X,Y为线性空间, $\mathrm{T}: X \to Y$, 若对$\forall \mathbf{X}_i \in X, \forall \alpha_i \in C$，有：

$$\mathrm{T}\left\{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{X}_i\right\} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathrm{T}\{\mathbf{X}_i\}$$

则T为线性算子。

§ 3.5.3 线性泛函

- 线性泛函：线性算子T的值域为实 / 复数集。
  - 距离、范数是泛函，但非线性泛函。
  - 连续线性算子T



$$\|x_n - x_0\| \to 0, n \to \infty \Rightarrow \|\mathrm{T}x_n - \mathrm{T}x_0\| \to 0, n \to \infty$$

  - 线性算子：有界⇔连续
  - 内积为连续线性泛函
  - 积分算子 $\mathrm{T}: L^2[a,b] \to L^2[a,b]$

$$\mathrm{T}x(t) = \int_a^b h(t,\tau)x(\tau)d\tau \quad h(t,\tau)\text{在}[a,b]\times[a,b]\text{上连续}$$

§3.6 完备规范正交集上广义傅里叶展开

§3.6.1 正交—Orthogonal

- 正交：在内积空间W中，若$\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_j \in W$，满足：$\langle \mathbf{X}_i,\mathbf{X}_j \rangle = k\delta_{ij}$，则称$\mathbf{X}_i$与$\mathbf{X}_j$正交，记为：$\mathbf{X}_i \perp \mathbf{X}_j$。其中$k$为常数，$\delta_{ij}$为Kronecker符号—

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

- 正交（子）集：$V \subset W$中任意两个元正交。

§3.6.1 正交

- 集正交：若 $X, Y \subset W$, 对 $\forall \mathbf{X} \in X, \forall \mathbf{Y} \in Y$, 有 $\mathbf{X} \perp \mathbf{Y}$, 则称集 X 与集 Y 正交, 记为：$X \perp Y$。
- 正交补：$V \subset W$, V 的正交补 $V^{\perp} = \left\{ \mathbf{X} \in W \mid \mathbf{X} \perp V \right\}$,

  显然 $V^{\perp} \perp V$。
- 规范正交完备集 V：
  - 1. $V^{\perp} = \left\{ 0 \right\}$（完备性）
  - 2. $\forall \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \in V, \left\langle \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \right\rangle = \delta_{ij}$（规范正交）

§3.6.1 正交

- 定理：Hilbert空间存在规范正交完备集。

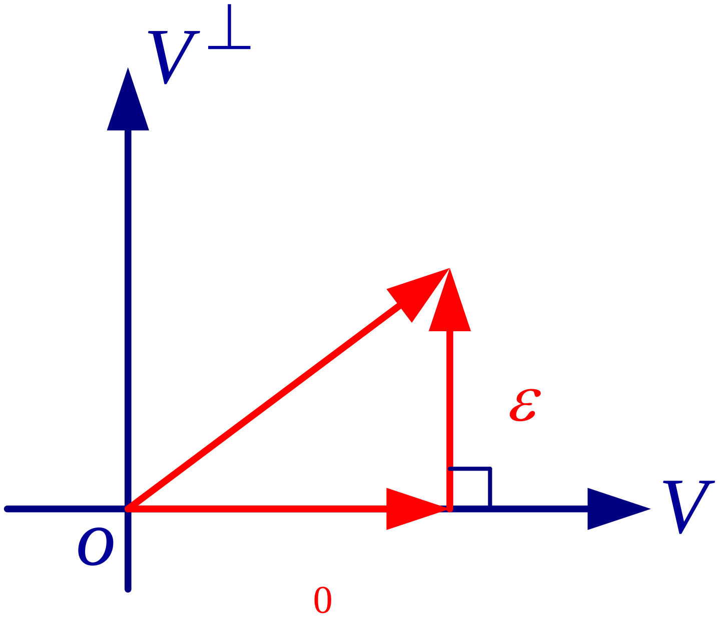
- 定理：W是Hilbert空间，$W=V\oplus V^{\perp}$；V是W的正交子集。

§3.6.2正交投影—Orthogonal Projection

- 正交投影： W是Hilbert空间，$V \subset W$, $\mathbf{X} \in W$,

  若$\exists \mathbf{Y}_0 \in V, \exists \varepsilon \perp V$, 使$\mathbf{X} \equiv \mathbf{Y}_0 + \varepsilon$, 则称$\mathbf{Y}_0$是$\mathbf{X}$在$V$上的正交投影或投影，记为：$\mathbf{Y}_0 = \mathrm{P}_V \mathbf{X}$。

  – 注：$\mathbf{Y}_0$与$\mathbf{X}$的距离最小，即正交投影使均方误差最小化。



§3.6.3 广义傅里叶展开

- 广义傅里叶展开：设$V=\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$是H空间$W$的规范正交完备集，则对$\forall X\in W$,有

$$X=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\phi_i=\sum_{i=1}^{\infty}\langle X,\phi_i\rangle\phi_i$$

$c_i \square \langle X,\phi_i\rangle$为广义傅里叶系数。

  – 注：$V=\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$是Hilbert空间$W$的规范且完备的一组基。$c_i$是$X$在$\phi_i$上的投影。

§3.6.3 广义傅里叶展开

- Parseval等式：设 $X=\sum_{i=1}^{\infty} c_i\phi_i=\sum_{i=1}^{\infty}\langle X,\phi_i\rangle\phi_i$，则
$$\|X\|_2^2=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle X,\phi_i\rangle\right|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2$$
- 物理解释：信号的总能量＝各个分量的能量的和。
- 几何解释：广义勾股定理。

§3.6.3 广义傅里叶展开

- 用N项广义傅里叶展开逼近X：

  设$V=\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$是Hilbert空间$W$的规范正交完备集，

$$V=\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}=\{\phi_i\}_{i=1}^{N}+\{\phi_i\}_{i=N+1}^{\infty}\square V_N\oplus V_N^{\perp}$$

X在V_N上的投影：$\hat{X}=\sum_{i=1}^{N}\langle X,\phi_i\rangle\phi_i$。

这里V_N规范正交，但不完备。