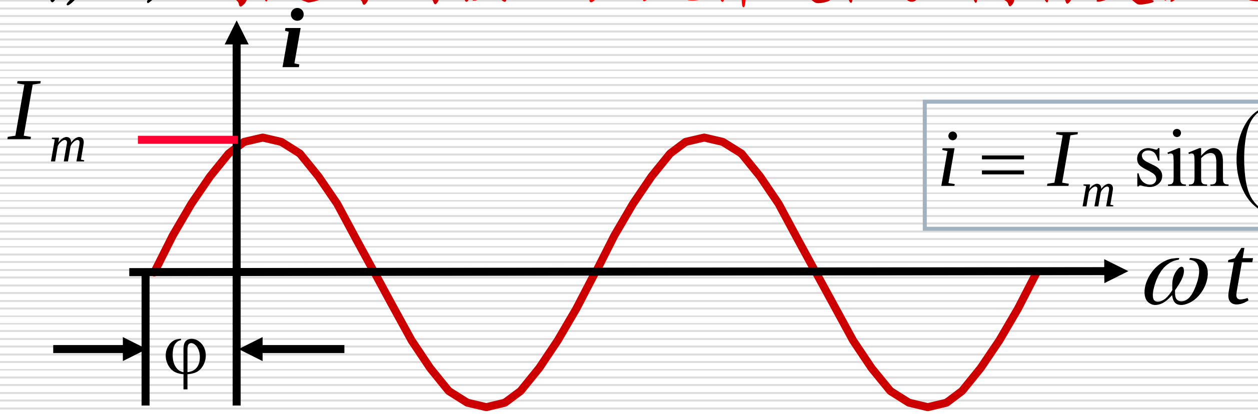
正弦交流电路中RLC的特性

电工与电子技术基础

中国地质大学（武汉）信息技术教学实验中心

1.正弦交流电路

电路中的电源（激励）及其在电路各部分产生的电压、电流（响应）均随时间按正弦规律变化。简称交流电路。



$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

1、变化快慢

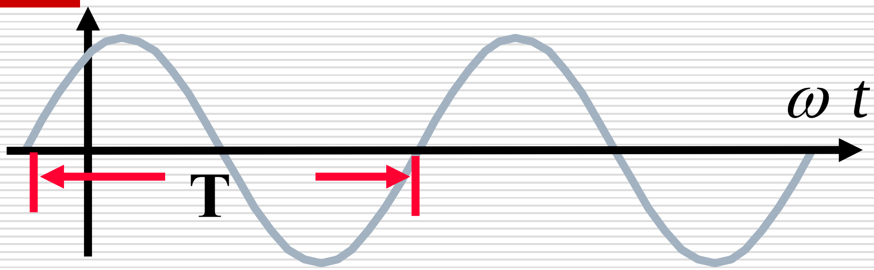
2、大小

3、变化进程

三个特征

又称三要素

2.正弦交流电路参数



1、频率:

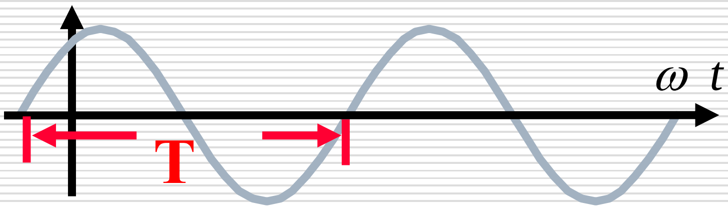
反映正弦量变化的快慢。

- 周期（T）：变化一周所需的时间。
  单位：秒（ s ），毫秒（ ms ）. . .

- 频率（f）：每秒变化的次数。 单位：赫兹（ Hz ），千赫兹（ KHz ） . . .

- 角频率（ ω ）：每秒变化的弧度。单位：弧度/秒（ rad/s ）

2.正弦交流电路参数



T、f、ω之间的关系：

$$f=\frac{1}{T}$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$$

（变化一次为 2π弧度）

如：f=50 Hz, T=0.02s　ω=314 rad/s

2.正弦交流电路参数

2、幅值（最大值）：

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

反映正弦量大小的幅度用I_m表示。

在工程应用中常用有效值（大写字母）表示正弦量的大小。

如:

- 交流仪表指示的读数、电器设备的额定电压、额定电流都是指有效值。

- 民用电220 V指的也是供电电压的有效值。

2.正弦交流电路参数

有效值是以交流电在一个或多个周期的平均效果，作为衡量大小的一个指标。常利用电流的热效应来定义。

取一个周期（T）的信号来考虑，

$$\underbrace{\int_0^T i^2 R\, dt}_{\text{交流}} = \underbrace{I^2 RT}_{\text{直流}}$$

则有 $$\boxed{I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\, dt}}$$ （均方根值）

2.正弦交流电路参数

有效值 $$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 \, dt}$$ （均方根值）

当 $i = I_m \sin(\omega t + \phi)$时，

可得: $$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$ $$\mathbf{U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}}$$

正弦量任一瞬间的瞬时值用小写字母**u**、**i**表示;

有效值用大写字母**U**、**I**表示。

2.正弦交流电路参数

有效值与最大值的关系： $I = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$

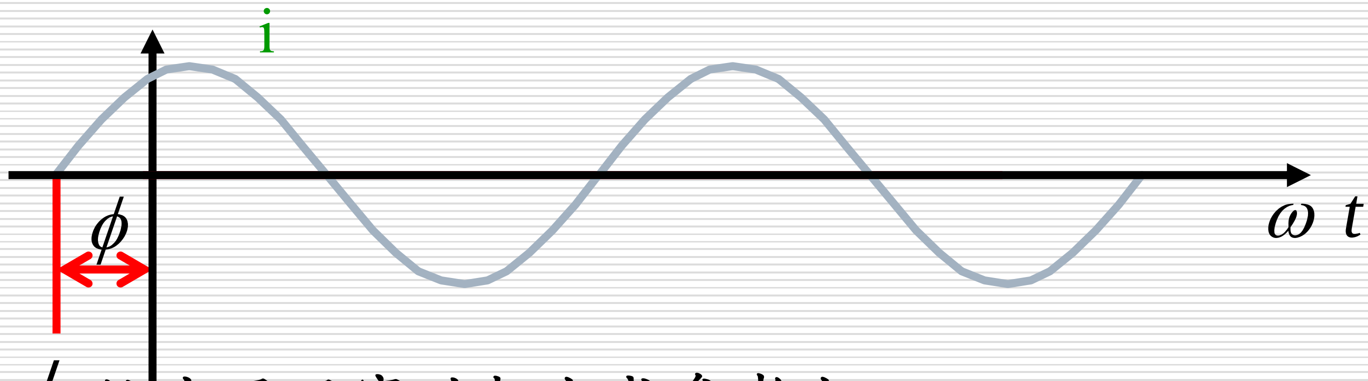
2.正弦交流电路参数

$$i=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\phi)$$

3、初相位

相位 $(\omega t+\phi)$ 反映正弦量变化的进程。

ϕ ：t=0时的相位，称为初相位或初相角。

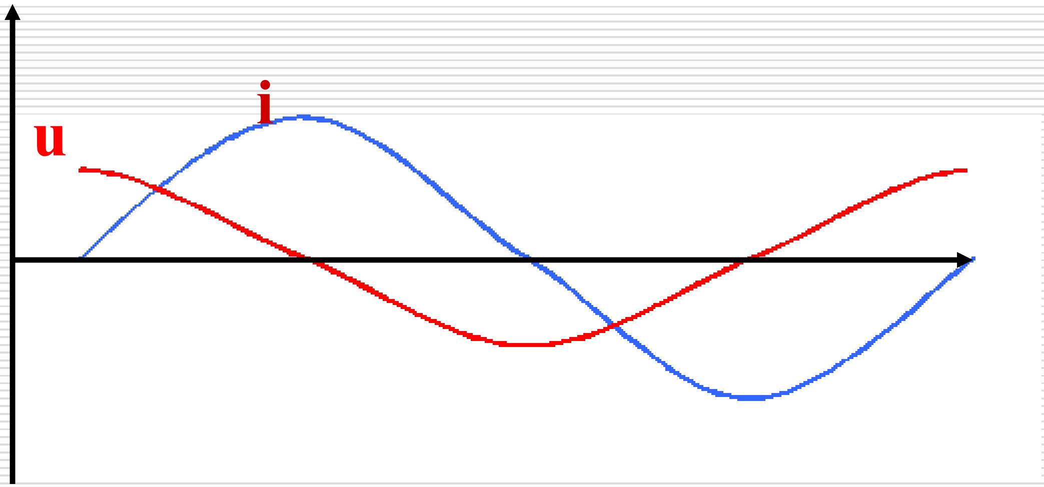


说明: ϕ 给出了观察的起点或参考点。

多个同频率的正弦波相比较时，除比较大小外就是初相位。

2.正弦交流电路参数

一个正弦交流电路中，电压u和电流i的频率相同，但初始相位不一定相同



正弦交流电路电感元件*t=0时刻*，若电流初相位为0º；电压初相位为90º

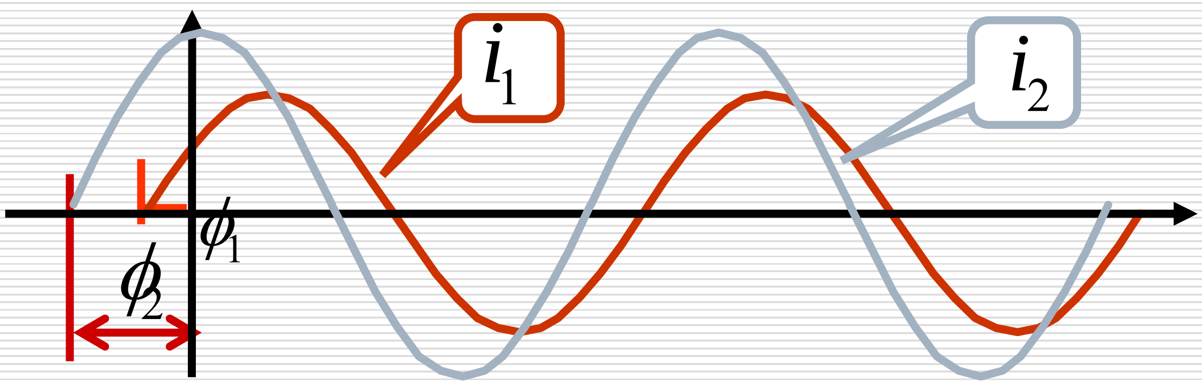
2.正弦交流电路参数

相位差

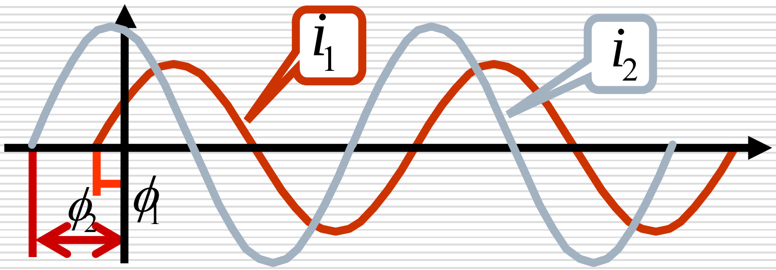
两个同频率正弦量的相位之差称相位差，它等于两个正弦量初相位之差。

如：两个同频率的正弦电流：

$$i_1 = I_{m1}\sin(\omega t + \phi_1) \qquad i_2 = I_{m2}\sin(\omega t + \phi_2)$$



2.正弦交流电路参数



$$i_1 = I_{m1}\sin(\omega t + \phi_1)$$
$$i_2 = I_{m2}\sin(\omega t + \phi_2)$$

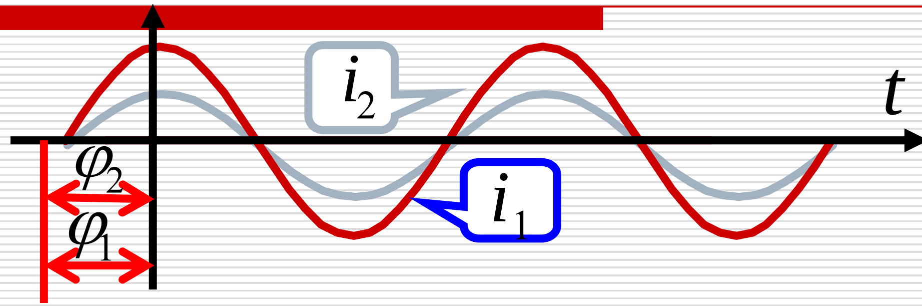
两个同频率正弦量之间的相位差=初相位之差。

相位差: $\varphi = (\omega t + \phi_1) - (\omega t + \phi_2) = \phi_1 - \phi_2$

☆ 计时起点不同，正弦量的初相位不同，但同频率正弦量之间的相位差不会改变，总是等于初相位之差。

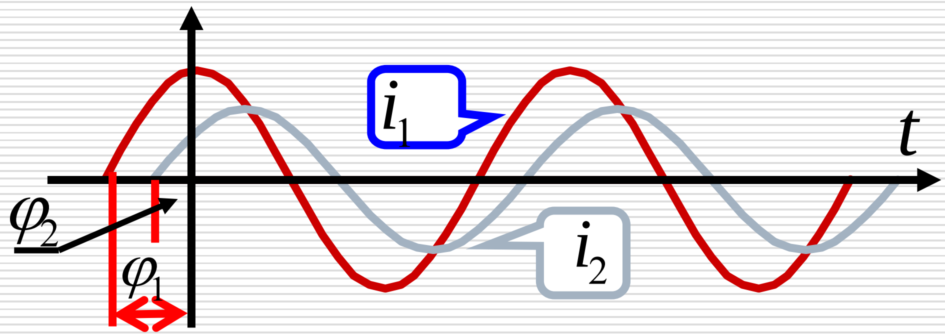
2.正弦交流电路参数

$\varphi_1 = \varphi_2$



同相位

$\varphi_1 - \varphi_2 > 0$

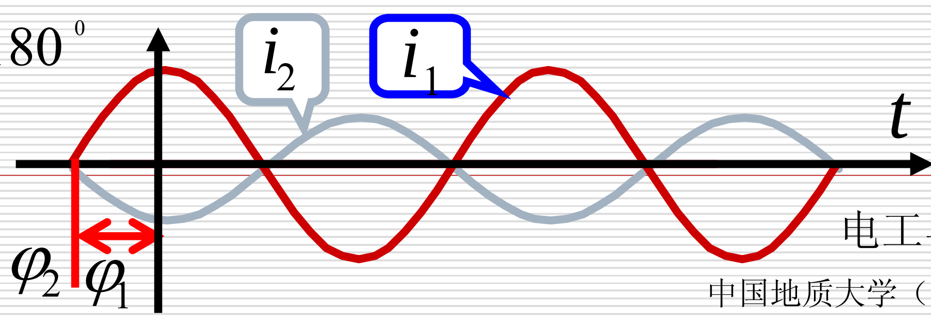


相位领先与滞后

称i_1超前于i_2

或i_2滞后于i_1

$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm 180^0$



反相位

2.正弦交流电路参数

已知: $i = \sin(1000t + 30°)A$

问 i的幅值、有效值、频率、初相位为多少?

幅度: $I_m = 1A \quad I = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0.707A$

频率: $\omega = 1000\,rad/s$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1000}{2\pi} = 159Hz$$

2.正弦交流电路参数

已知： $u_1=\sqrt{2}U_1\sin(\omega t+\varphi_1)$　　$u_2=\sqrt{2}U_2\sin(\omega t+\varphi_2)$

求： $u=u_1+u_2$

$$u=\sqrt{2}U_1\sin(\omega t+\varphi_1)+\sqrt{2}U_2\sin(\omega t+\varphi_2)$$

$$=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi)$$

频率不变

$$U=\sqrt{(U_1\cos\varphi_1+U_2\cos\varphi_2)^2+(U_1\sin\varphi_1+U_2\sin\varphi_2)^2}$$

幅度变化

$$\varphi=tg^{-1}\frac{U_1\sin\varphi_1+U_2\sin\varphi_2}{U_1\sin\varphi_1+U_2\sin\varphi_2}$$

相位变化

2.正弦交流电路参数

$$u = u_1 + u_2 = \sqrt{2}U_1\sin(\omega t + \varphi_1) + \sqrt{2}U_2\sin(\omega t + \varphi_2)$$
$$= \sqrt{2}U\sin(\omega t + \varphi)$$

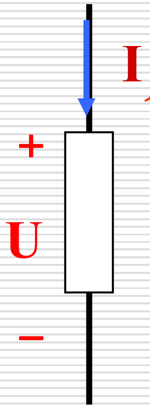
幅度变化　　频率不变　　相位变化

综上:

- 同频率正弦波相加，其结果仍是该频率下的正弦波。
- 正弦量的波形图及三角函数式表示法比较直观，但用于运算很繁琐!

启示：在讨论同频率正弦波时，只要知道幅度与初相位即可。

3.电阻、电感与电容元件



线性时不变电阻的电压电流关系由欧姆定律描述，电压电流取关联参考方向时其数学表达式为

$$u = Ri$$

式中R 称为电阻，单位为

电流与电压降的参考方向一致

1、欧姆定律体现了电阻元件两端电压与电流的关系。

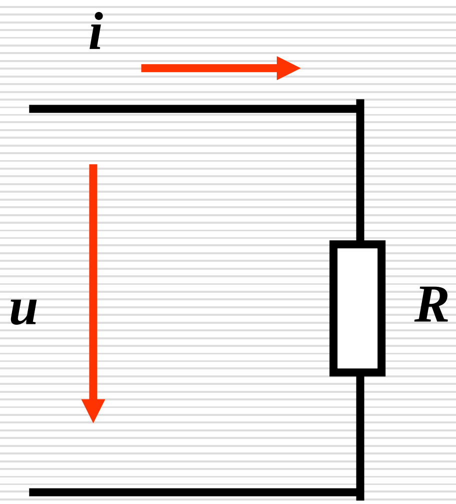
2、电压与电流的约束关系还可用伏－安曲线表示。

3、欧姆定律也叫线性电阻的元件约束方程

电路中所有分析方法都是基于两类约束：

- 元件约束
- 结构约束

3.电阻、电感与电容元件



1) 电压电流间的关系

由欧姆定律:

$$\boxed{u = iR}$$

(瞬时值)

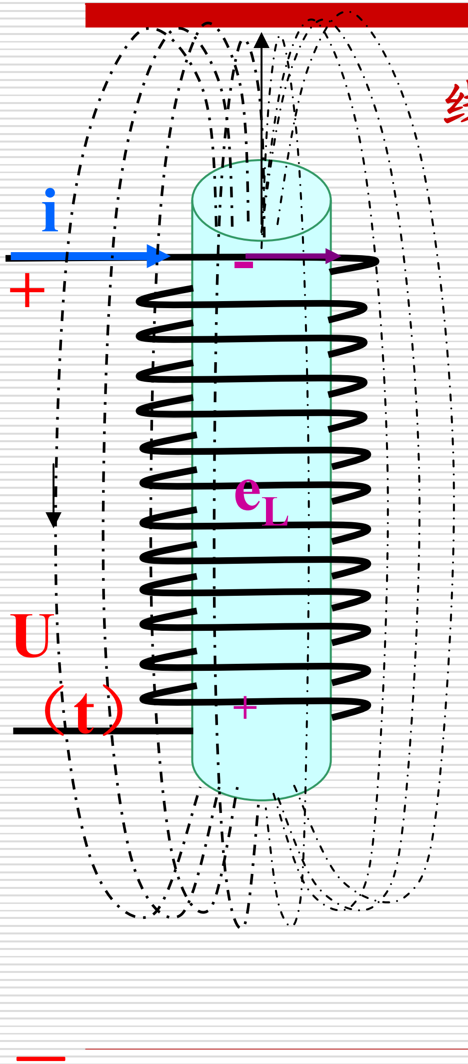
如 设: $u = \sqrt{2}U\sin\omega t$

则: $i = \dfrac{u}{R} = \sqrt{2}\dfrac{U}{R}\sin\omega t = \sqrt{2}I\sin\omega t$

电阻是一种即时元件，无记忆功能。

即：任意时刻电阻两端的电压只与该时刻的电流有关，与该时刻前后电压电流无关。

3.电阻、电感与电容元件



线圈电流与线圈磁通链的关系：$\psi = Li$

式中的系数L为常量，称为电感，单位是亨[利]，用H表示。

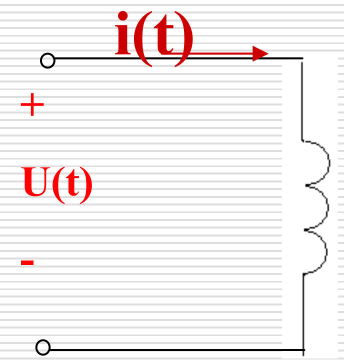
规定感应电动势参考方向与磁通参考方向符合右手螺旋规则

磁通的变化产生感应电动势：$e_L = -\frac{d\psi}{dt}$

$$e_L + u(t) = 0$$

$$u(t) = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

3.电阻、电感与电容元件



$$u(t)=\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(Li)}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

此式表明电感中的电压与其电流对时间的变化率成正比，在直流电源激励的电路中，磁场不随时间变化,各电压电流均不随时间变化时，电感相当于一个短路(u=0)。

电感具有直流直通的作

3.电阻、电感与电容元件

在已知电感电压$u_L(t)$的条件下，其电流$i_L(t)$为

$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u_L(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0}u_L(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{L}\int_{0}^{t}u_L(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\boxed{=i_L(0)+\frac{1}{L}\int_{0}^{t}u_L(\xi)\mathrm{d}\xi}$$

其中

$$i_L(0)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0}u_L(\xi)\mathrm{d}\xi$$

称为电感电流的初始值。

与0时刻前磁通有关

体现了电感元件的记忆性

电感的瞬时功率

$$p(t) = u(t)i(t) = i(t)L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

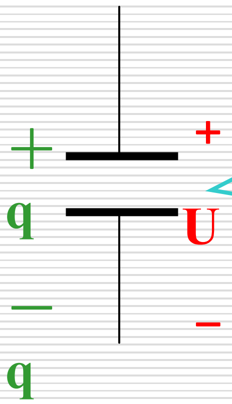
若电感的初始储能为零，即$i(t_0)=0$,则任意时刻储存在电感中的能量为

$$W_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

此式说明某时刻电感的储能取决于该时刻电感的电流值，与电感的电压值无关。

电感电流的绝对值增大时，电感储能增加；电感电流的绝对值减小时，电感储能减少。

3.电阻、电感与电容元件



电容两极板间带等量异号的电荷q，形成电压U

电压u与电荷量q成正

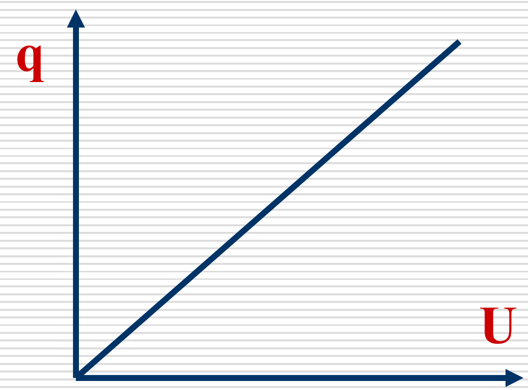
它们之间为线性关系

$$C = \frac{q}{U}$$

*C*为常量，称为电容，单位是法[拉],用*F*表示。

工程上常用：微法 μF 皮法：pF 等表示

C电容量表示：单位电压下，电容两极板间存的电荷量，可用库－伏曲线表示其关系

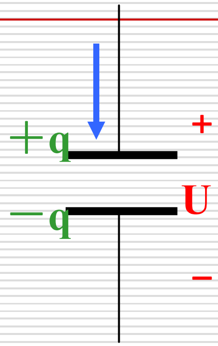


3.电阻、电感与电容元件

1、板间有电荷，产生电压； $U=\dfrac{q}{C}$

2、板间有电荷，不一定产生电流；

3、只有板间的电荷发生移动时，才产生电流



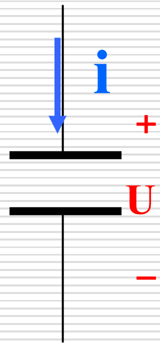
电容的伏安关系：

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(Cu)}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

此式表明电容中的电流与其电压对时间的变化率成正比。

3.电阻、电感与电容元件

1、由 $i(t)=\frac{dq}{dt}$



$\frac{dq}{dt}>0$ 电容器充电，电流i为正

$\frac{dq}{dt}<0$ 电容器放电，电流i为负

2、$i(t)=C\frac{du}{dt}$

电容器的元件约束关系

电压变化的大小反映了电流的大

在直流电路中，当各电压电流均不随时间变化的情况下，电容元件当于开路(i=0)。

电容具有阻碍直流的作

3.电阻、电感与电容元件

在已知电容电流$i_C(t)$的条件下，其电压$u_C(t)$为

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\xi)d\xi$$

$$=\boxed{\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i_C(\xi)d\xi+\frac{1}{C}\int_{0}^{t} i_C(\xi)d\xi}$$

$$=u_C(0)+\frac{1}{C}\int_{0}^{t} i_C(\xi)d\xi$$

其中

$$u_C(0)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i_C(\xi)d\xi$$

称为电容电压的初始值。

电容电压不仅与0时刻以后电流有还与0时刻以前电流作用有关，体现电容元件的记忆性

3.电阻、电感与电容元件

若电容的初始储能为零，即$u(t_0)=0$,则任意时刻储存在电容中的能量为

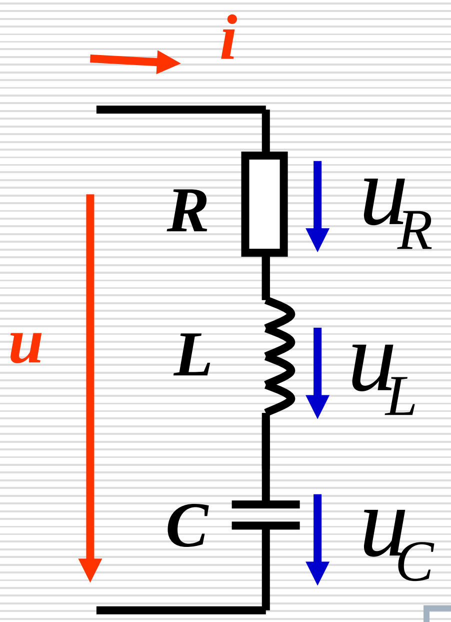
$$W_C(t)=\frac{1}{2}C\,u^2(t)$$

此式说明某时刻电容的储能取决于该时刻电容的电压值，与电容的电流值无关。

电容电压的绝对值增大时，电容储能增加；电容电压的绝对值减小时，电容储能减少。

4. R、L、C串联交流电路

1、电压与电流间的关系



- 流过各元件的电流相同。
- 各部分电压瞬时值服从基尔霍夫电压定律。

$$u = u_R + u_L + u_C = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt$$

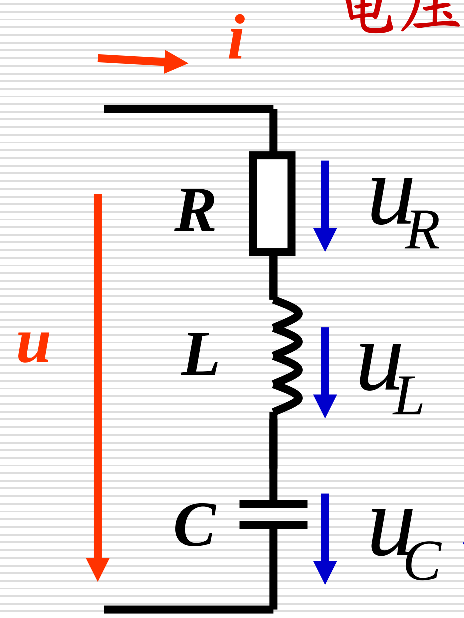
若: $i = \sqrt{2} I \sin \omega t$

则:

$$u = \sqrt{2} IR \sin \omega t + \sqrt{2} I(\omega L) \sin(\omega t + 90^0)$$
$$+ \sqrt{2} I(\frac{1}{\omega c}) \sin(\omega t - 90°)$$

4. R、L、C串联交流电路

电压与电流间的关系



1)相量方程式:

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

设 $i = \sqrt{2} I \sin \omega t$

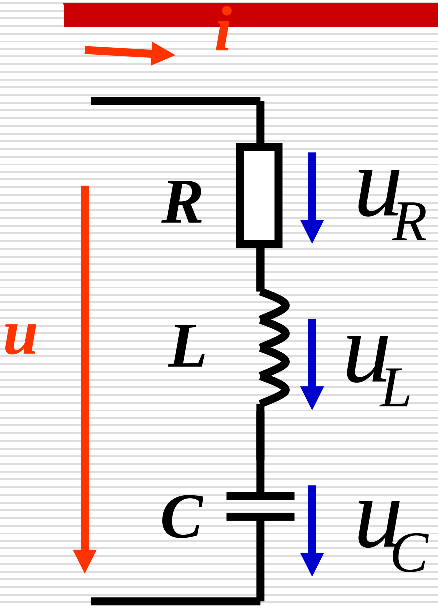
或 $\dot{I} = I\angle 0°$

则: $\boxed{\dot{U}_R = \dot{I}R,\quad \dot{U}_L = \dot{I}(jX_L),\quad \dot{U}_C = \dot{I}(-jX_C)}$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{I}R + \dot{I}(jX_L) + \dot{I}(-jX_C)\\ &= \dot{I}\left[R + j(X_L - X_C)\right]\end{aligned}}$$

总电压与总电流的关系式

4. R、L、C串联交流电路



相量表达式

$$\dot{U}=\dot{I}\underbrace{[R+jX_L-jX_C]}_{\text{复数阻}}$$

电路阻

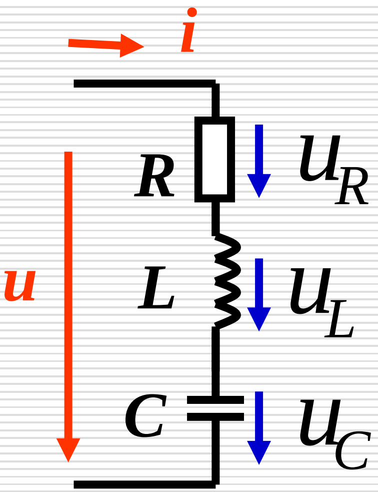
$$Z=\underline{R}+j\underline{(X_L-X_C)}$$

实部为电阻

虚部为电抗 $\begin{cases}\text{感}\\ \text{容}\end{cases}$

注：Z 是一个复数，但不是一个正弦交流相量（ Z上不加 ）；Z 在方程式中只是一个运算符号。

4. R、L、C串联交流电路



$$\dot{U}=\dot{I}\left[R+jX_L-jX_C\right]$$

$$Z=R+j\left(X_L-X_C\right)$$

复数阻抗

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{U\angle\varphi_u}{I\angle\varphi_i}=\frac{U}{I}\angle\varphi_u-\varphi_i$$

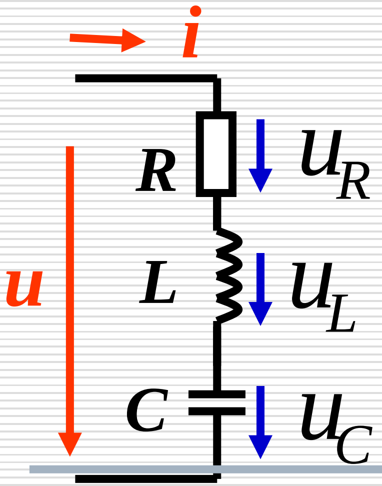
(1)复数阻抗的

$$|Z|=\sqrt{R^2+\left(X_L-X_C\right)^2}=\frac{U}{I}$$

$$|Z|=\frac{U}{I}$$

$|Z|$的大小也可由电压、电流有效值之比求得。

4. R、L、C串联交流电路



复数阻抗

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{U\angle\varphi_u}{I\angle\varphi_i}=\frac{U}{I}\angle\varphi_u-\varphi_i$$

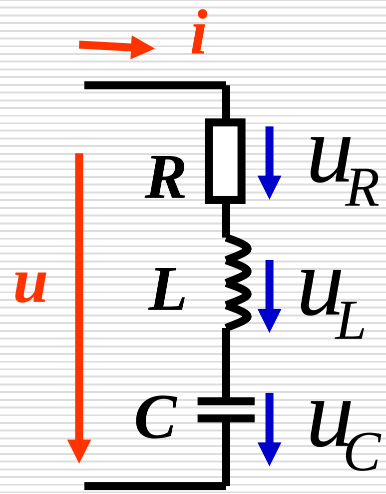
等于电压与电流的初相位之差。

(2) 复数阻抗的幅

$$\varphi=\varphi_u-\varphi_i=tg^{-1}\frac{X_L-X_C}{R}$$

当（*f*一定）电路参数确定后，电压与电流间的相位差也就确定了。

4. R、L、C串联交流电路



$$Z=\frac{\dot U}{\dot I}=\frac{U}{I}\angle\varphi_u-\varphi_i$$

复数阻抗的幅角 $\varphi=\varphi_u-\varphi_i=tg^{-1}\dfrac{X_L-X_C}{R}$

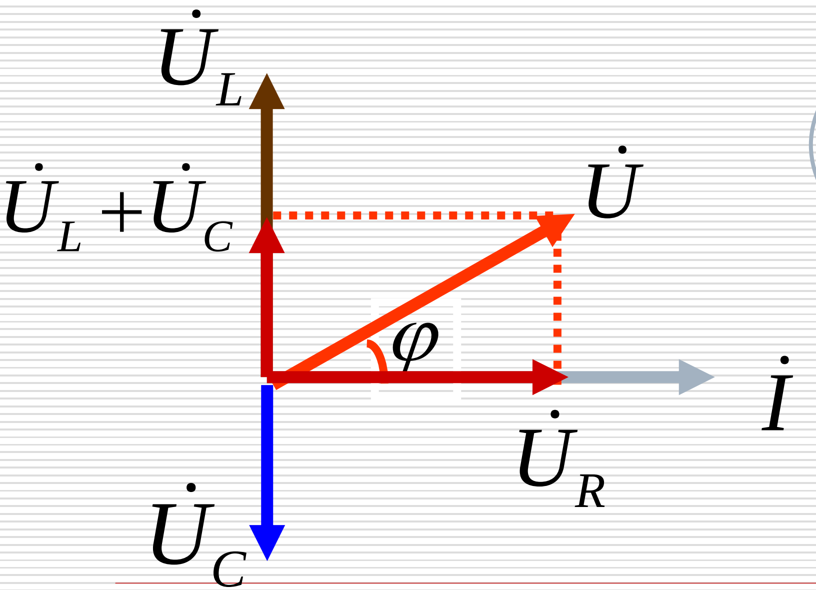
- 当 $X_L>X_C$ 时 $\varphi>0$ 表明**u**领先**i** --电路呈感性
- 当 $X_L<X_C$ 时 $\varphi<0$ 表明**u**落后**i** --电路呈容性
- 当 $X_L=X_C$ 时 $\varphi=0$ 表明**u**与**i**同相--电路呈电阻性。

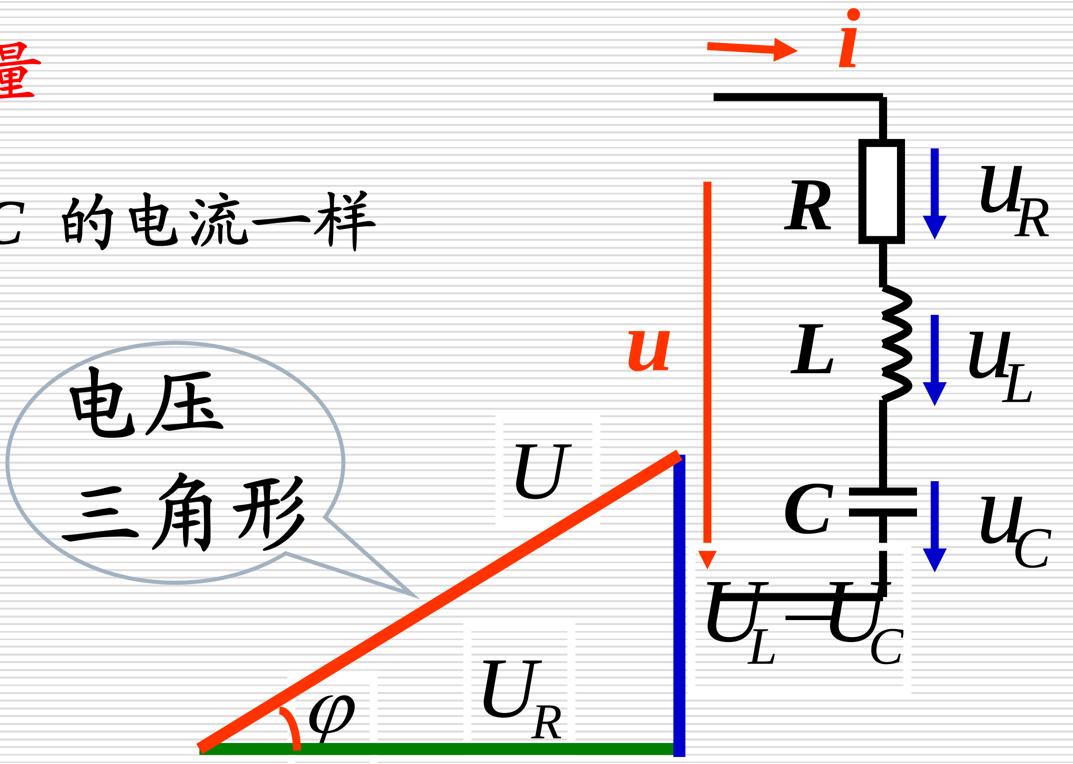
4. R、L、C串联交流电路

R、***L***、***C***串联交流电路电压与电流间的关系，也可相量图求得。

2) 相量图　　取 $\dot{I}$ 作参考相量

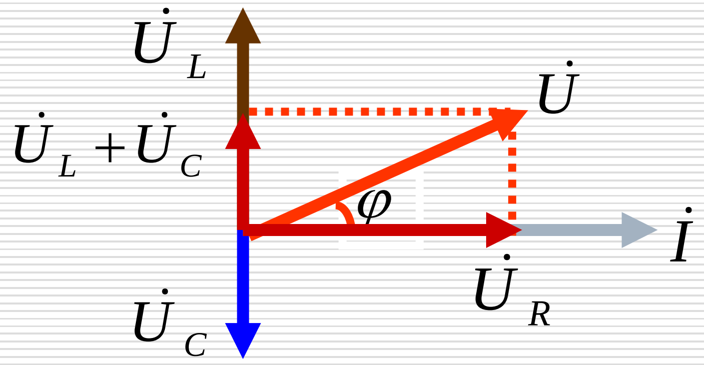
（流过 ***R***、***L***、***C*** 的电流一样

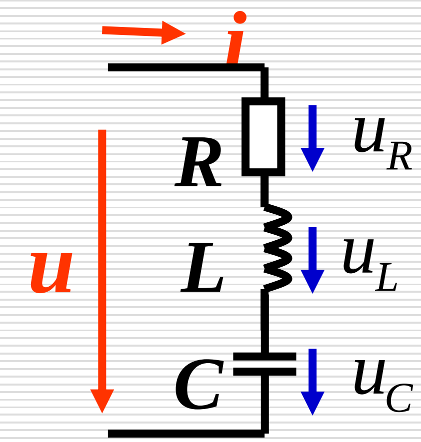




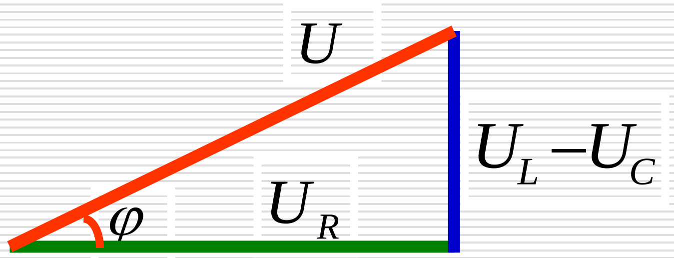
4. R、L、C串联交流电路

相量图





电路各部分电压之间的关系 -----电压三角形



$$U_R=U\cos\varphi$$

$$U_L-U_C=U\sin\varphi$$

$$\boxed{U\neq U_R+U_L+U_C}$$

4. R、L、C串联交流电路

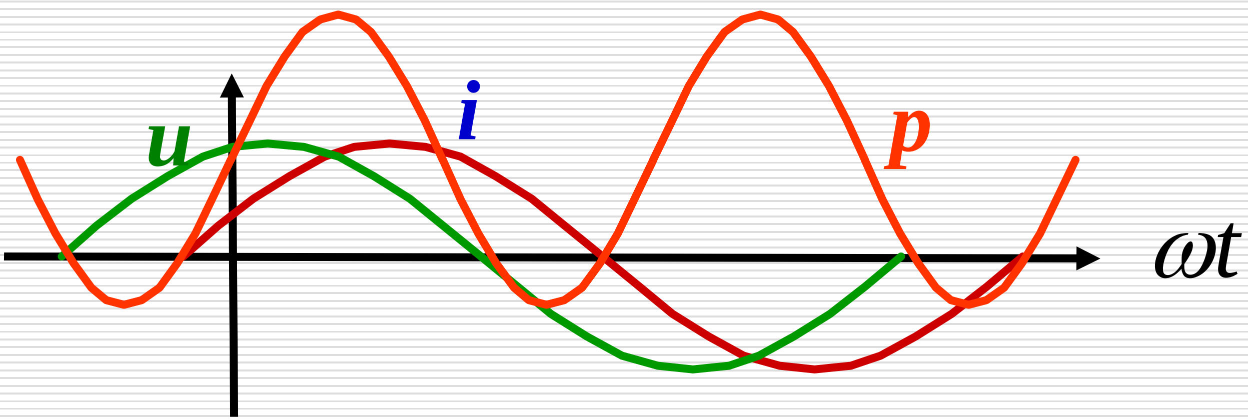
2、$R-L-C$ 串联电路中的功率计算

1) 瞬时功　　$p = i \cdot u$　　设u领先i（电感性电路）

$$p = I_m \sin \omega t \cdot U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{I_m U_m}{2}[\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)$$

$$= IU[\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)$$



4. R、L、C串联交流电路

$$p = i \cdot u = IU[\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)$$

2) 平均功率（有功功率）P

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = UI\cos\varphi = P_R = U_R I = I^2 R$$

总电

总电

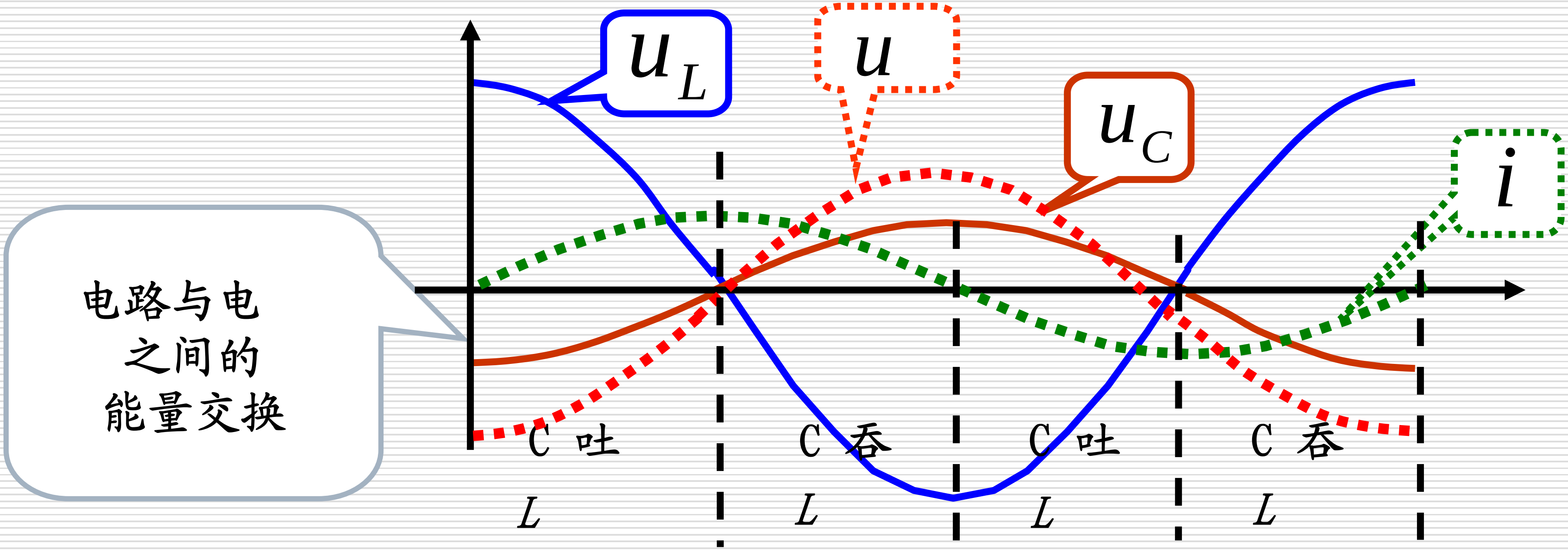
u与i的夹

- 平均功率不仅与电压和电流的有效值有关，还与电压和电流夹角的余弦$\cos\varphi$有关。
- $\cos\varphi$ 称功率因数。
- 电感和电容不消耗有功功率，$R-L-C$串联电路的有功功率等于电阻上消耗的有功功率

4. R、L、C串联交流电路

3) 无功功率

储能元件L、C虽然不消耗能量，但与电源有能量交换（能量吞吐），吞的规模用无功功率来表示。



5. R、L、C串联谐振

序：电路中的谐振现

当含有电容和电感的电路中，总的电压和电流同相时，便说电路发生了谐振

谐振时：u、i同相，电路中电容电感元件无功功率完全互补，路的功率因数

$$\cos\varphi = 1$$

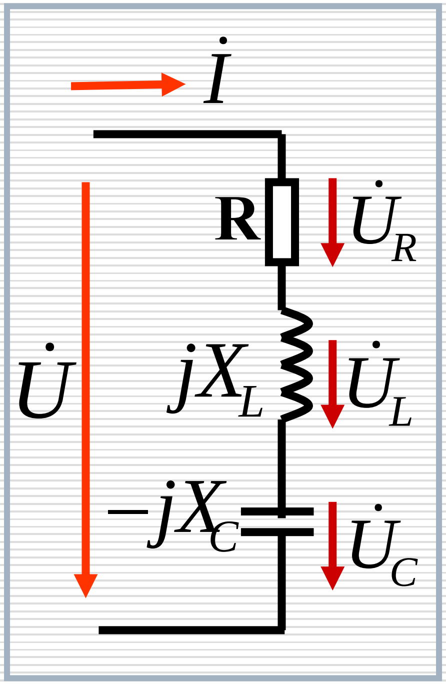
谐

串联谐振：L与C串联时无功完全补偿。

并联谐振：L与C并联时无功完全补偿。

5. R、L、C串联谐振

1、R-L-C串联谐振



u、i同相的条件是: $X_L = X_C$

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

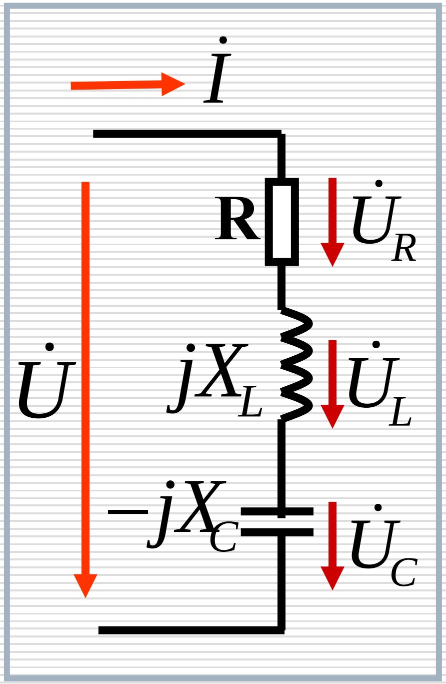
故谐振频率f_0或角频率 ω_0为:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

5. R、L、C串联谐振

2、串联谐振的特点：

1)电流达到最大



分析：$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

谐振 $|Z| = R \quad (\because X_L = X_C)$

（即阻抗值最小 → 电流最大）

谐振电 $I_0 = \dfrac{U}{R}$

当U一定时，I_0与R成反比。