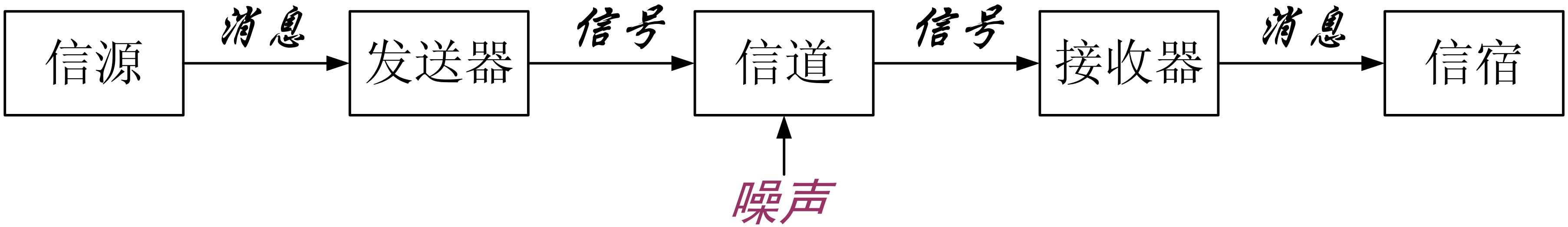
信号与系统

第一章 绪论

第一章 绪论

- §1.1 信号与系统
- §1.2 信号分类与典型确定性信号
- §1.3 冲激函数、广义函数
- §1.4 信号分解
- §1.5 系统分类
- §1.6 线性系统

§1.1 信号与系统



- *Message*（消息）
  - 信源的输出＋语义学上的理解
- *Signal*（信号）
  - *Information Vector*消息/信息的载体
- *Information*（信息）
  - 消息、内容、情报
- *System*系统
  - 由若干个相互作用和相互依赖的部分组合而成的具有特定功能的整体。

本课要解决的问题

- 信号表示（分析）
  - 把信号分解成它的各个组成分量或成分的概念、理论和方法，即用简单表示复杂。
- 信号通过系统
  - 系统分析
    - 在给定系统的条件下，研究系统对于输入激励信号所产生的输出响应。
  - 系统综合
    - 按某种需要先提出对于给定激励的响应，而后跟据此要求设计（综合）系统。

§1.2 信号分类与典型确定性信号

信号分类 I

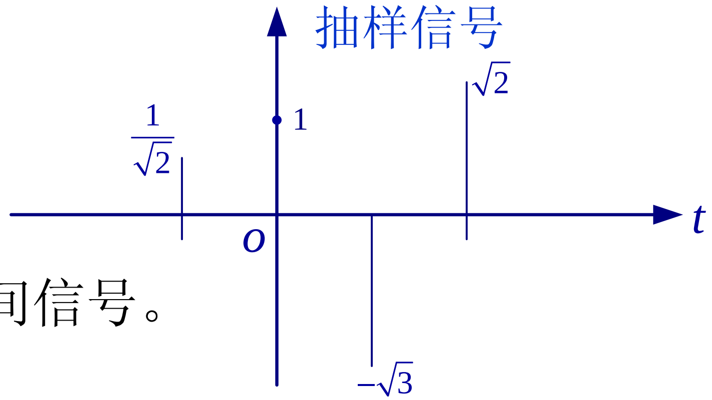
- 确定性信号
  - 由确定性系统产生的，物理参数确定的信号。
- 非确定性信号
  - 随机信号
    - 具有不可预知的不确定性的信号。
  - 模糊信号

信号分类 II

- 周期信号
  - $f(t) = f(t + nT), n \in \mathbf{Z}$
- 非周期信号
  - $f(t) \neq f(t + nT), \forall n \in \mathbf{Z}$

信号分类III

- 连续时间信号
  - 模拟信号
    - 时间和幅值都连续的信号。
  - 阶梯信号
    - 时间连续，幅值离散的信号。
- 离散时间信号
  - 抽样信号
    - 幅值具有无限精度的离散时间信号。
  - 数字信号
    - 幅值具有有限精度的离散时间信号。



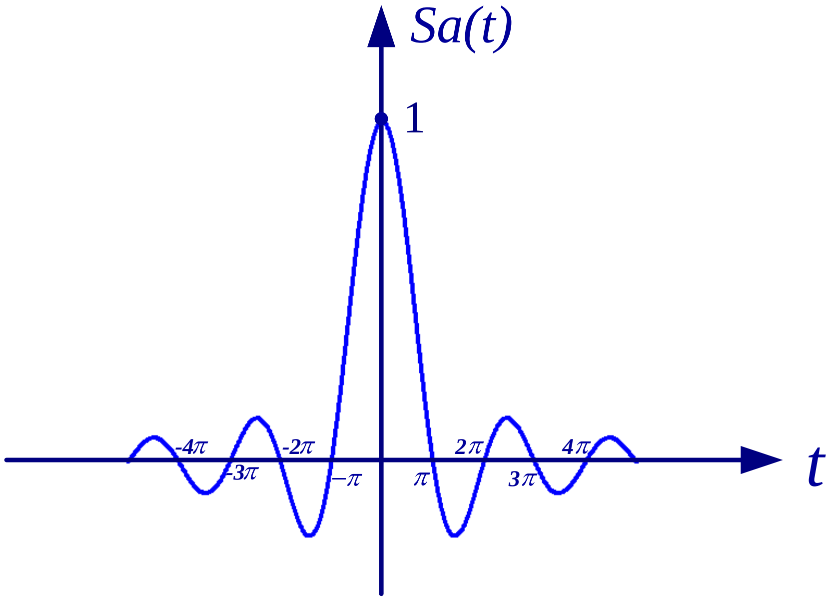
典型确定性信号

- 1. $f(t)=Ke^{\alpha t}$
- 2. $f(t)=A\sin(\omega t+\theta)$
- 3. $f(t)=\begin{cases}0 & ,t<0 \\ A\sin(\omega t+\theta)e^{-\alpha t} & ,t\geq 0\end{cases}$
- 4. $f(t)=Ke^{st},s=\sigma+j\omega,t\in(-\infty,+\infty)$

$$=Ke^{\sigma t}\cos\omega t+jKe^{\sigma t}\sin\omega t$$

典型确定性信号

- 5. $f(t)=Sa(t)\triangleq\dfrac{\sin t}{t}$
  - 采样函数$Sa(t)$为偶函数
  - 在t的正、负两方向振幅都逐渐衰减，当$t=\pm\pi$, $\pm 2\pi, \ldots, \pm n\pi$时，函数值为零。



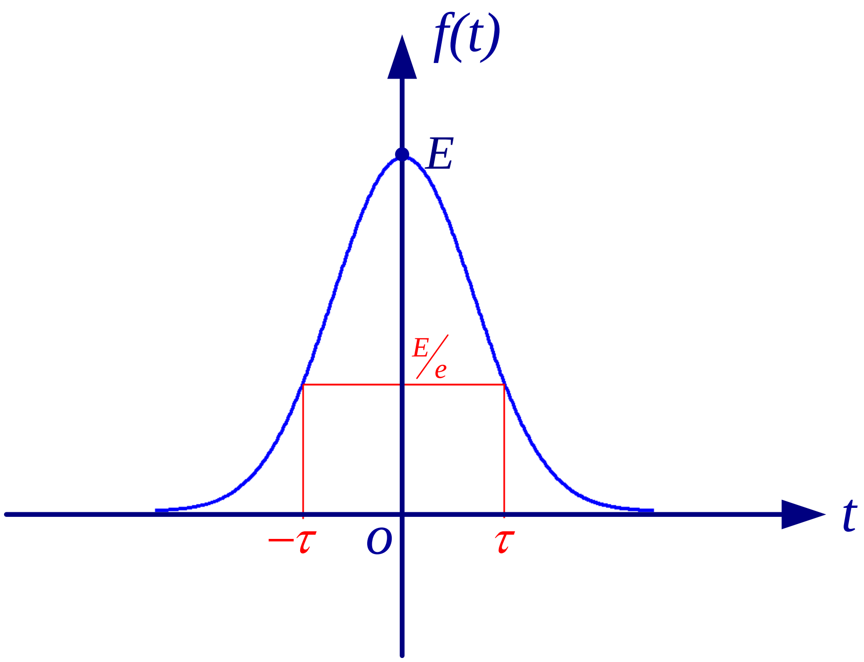
$$\int_0^{\infty} Sa(t)dt=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Sa(t)dt=\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|Sa(t)\right| dt=\infty$$

典型确定性信号

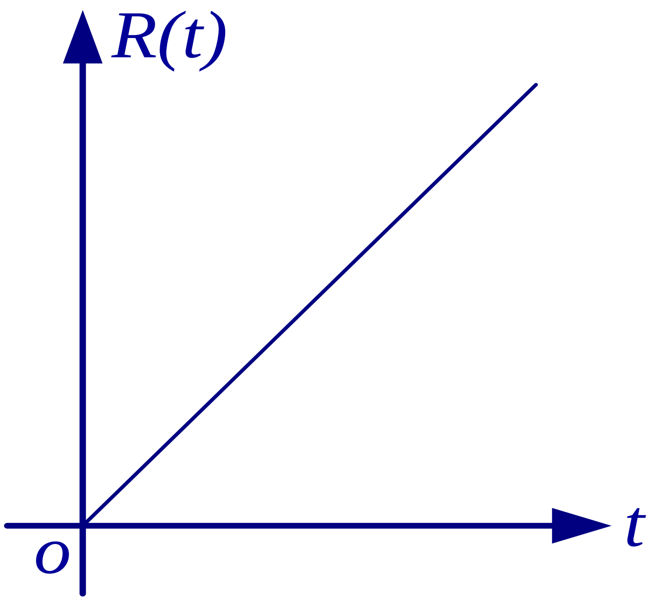
- 6 $f(t)=Ee^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$
  - 高斯函数比任何一个多项式的倒数衰减都快，$\dfrac{f(t)}{\sum_{i=0}^{n}\alpha_i t^i}$是一个高阶无穷小量。
  - 高斯函数的傅里叶变换仍为高斯的。
  - 高斯函数为正实函数。



- 光滑函数$C^{\infty}(\Omega)$：Ω上任意阶导数都存在的函数的集合。

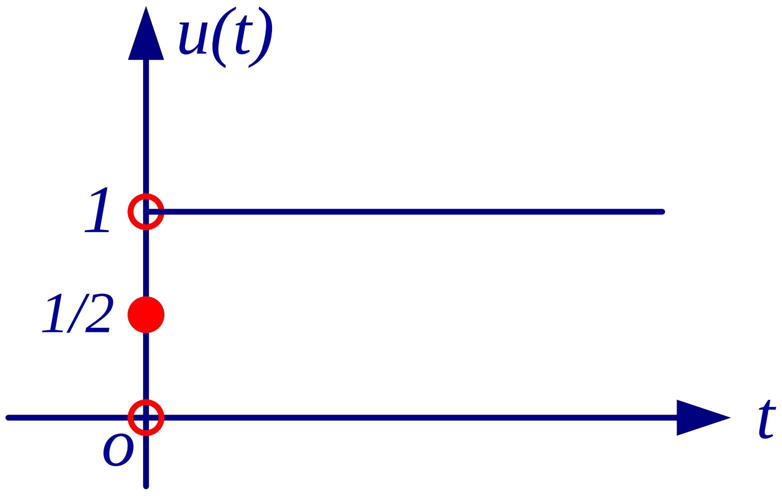
奇异函数

- 1. $R(t)=\begin{cases} t, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$



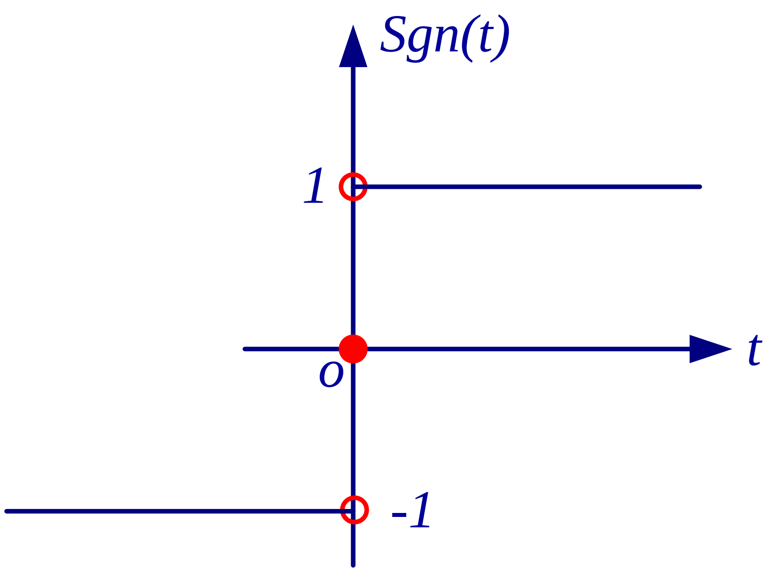
奇异函数

- 2. $u(t)=\begin{cases} 1, t>0 \\ 0, t<0 \\ 1/2, t=0 \end{cases}$



奇异函数

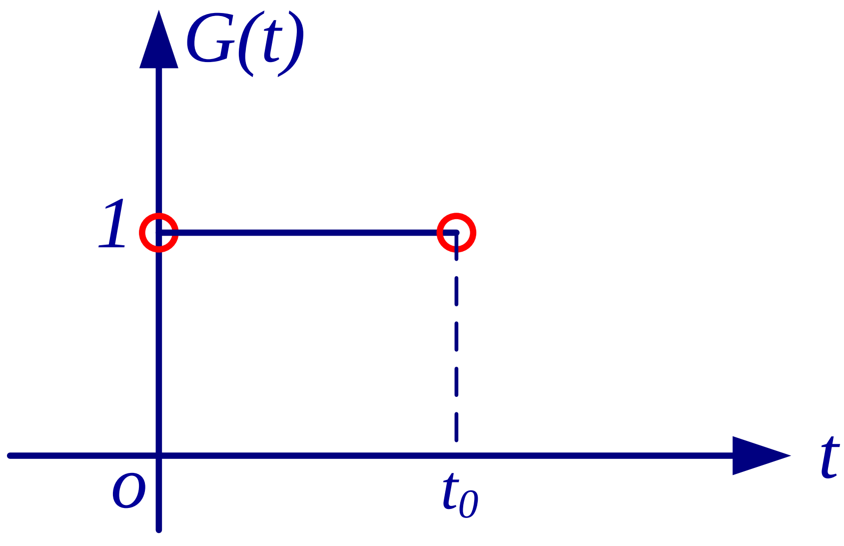
- 3.符号函数: $Sgn(t)=\begin{cases}1, t>0\\-1, t<0\\0, t=0\end{cases}$



奇异函数

- 4.门函数

$$G(t)=u(t)-u(t-t_0),t_0>0$$

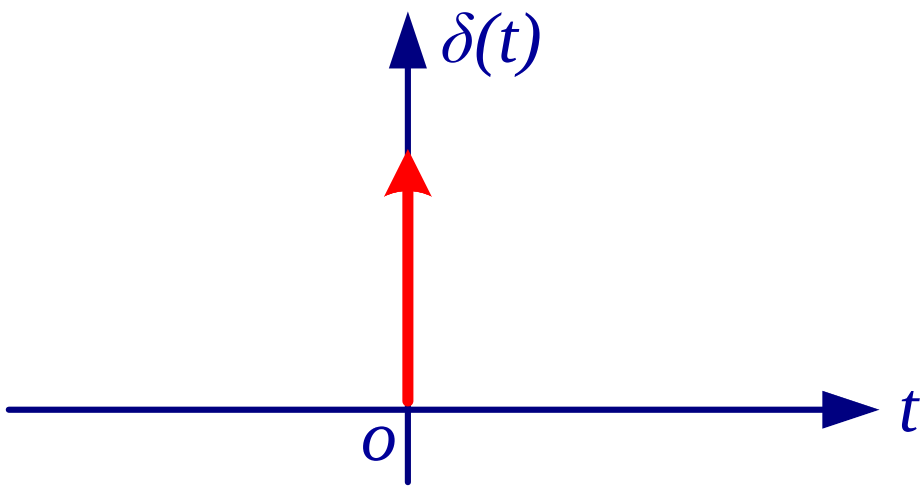


§1.3 冲激函数、广义函数

定义

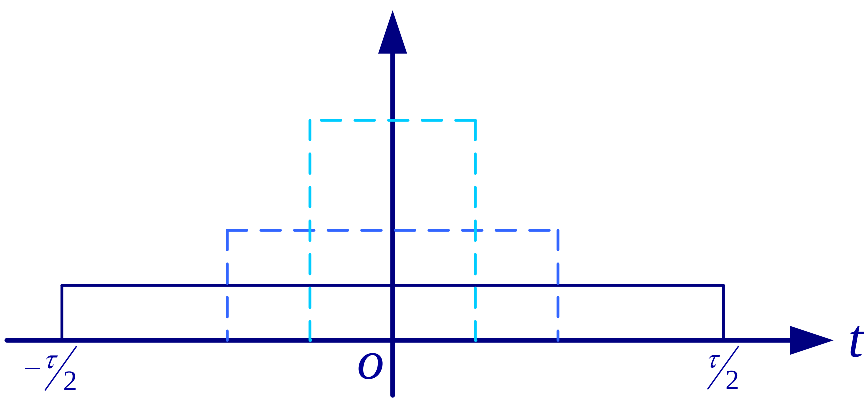
- Ⅰ. P.A.M. Dirac定义

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1 \\ \delta(t) = 0, t \neq 0 \Rightarrow \delta(t)\big|_{t=0} = \infty \end{cases}$$



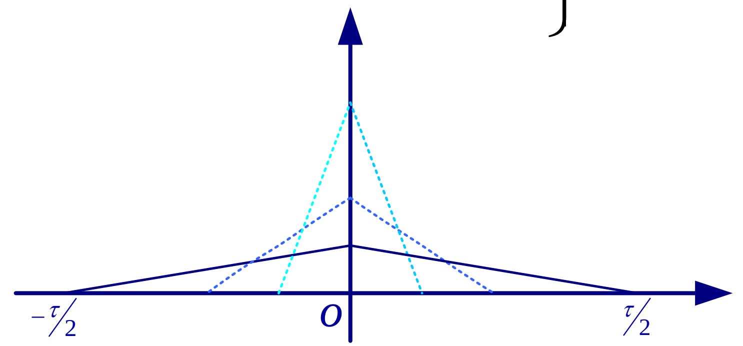
定义

- Ⅱ.面积（强度）为1，等效宽度→0函数的极限，此种函数有多可数多个
  - (1) $\delta(t) \triangleq \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$

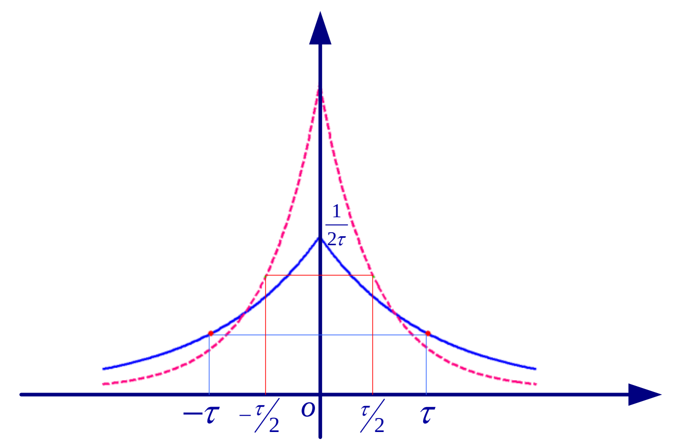


定义

– (2) $\delta(t) \triangleq \lim\limits_{\tau \to 0}\left\{\dfrac{1}{\tau}\left(1-\dfrac{|t|}{\tau}\right)\left[u(t+\tau)-u(t-\tau)\right]\right\}$

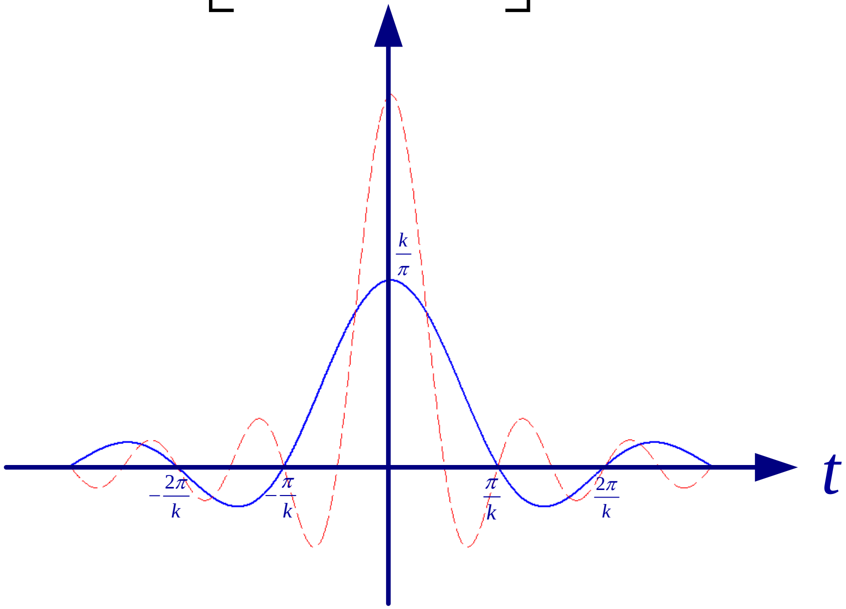


– (3) $\delta(t) \triangleq \lim\limits_{\tau \to 0}\left[\dfrac{1}{2\tau}e^{-\frac{|t|}{\tau}}\right]$



定义

– (4) $\delta(t) \square \lim_{k\to\infty}\left[\frac{k}{\pi}Sa(kt)\right] = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{\pi}\square\frac{\sin kt}{kt}$



– (5) $\delta(t) \square \lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-k}^{k} e^{j\xi t} d\xi\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\xi t} d\xi$

定义

– (6) $\delta(t) \equiv \lim_{\tau \to 0}\left[\frac{1}{\tau}e^{-\pi\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}\right]$

– (7) $\delta(t) \equiv \lim_{k \to \infty}\frac{\sin^2 kt}{\pi k t^2}$

– (8) $\delta(t) \equiv \lim_{n \to \infty}\frac{n}{\pi\left(1+n^2t^2\right)}$

一般定义

- 检验函数
  - 区间$\Omega=(a,b)(-\infty<a<b<\infty)$上的光滑函数（连续的，具有各阶连续导数）$\phi(t)$为检验函数。检验函数的全体记为 D（$\Omega$）。
- $\delta(t)$定义：对$\forall\phi(x)\in \boldsymbol{D}\ (\Omega)$，满足

$$\left\langle f(t),\phi(t)\right\rangle=\int_{\Omega} f(t)\phi(t)dt=\phi(0),\text{ 则}f(t)=\delta(t)\text{。}$$

性质

- 1) $f(t)$有界,$t=0$连续, $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$
- 2) $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$
- 3) $\delta(-t)=\delta(t)$
- 4) $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt=\frac{1}{p}\delta(t)$
- 5) $\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}=pu(t)$

性质

□6) $\left\langle \delta(t), \phi(t) \right\rangle \square \int_{\Omega} \delta(t)\phi(t)\,dt = \phi(0)$

□7) $\left\langle \delta(t-t_0), \phi(t) \right\rangle \square \int_{\Omega} \delta(t-t_0)\phi(t)\,dt = \phi(t_0)$

□8) $\delta\left[f(x)\right] = \left|f'(x_0)\right|^{-1} \delta(x-x_0)$

□9) 若光滑$f(x)\Big|_{x=x_1,x_2\ldots} = 0$, 且$f'(x_i) \neq 0, \forall i = 1, 2, \cdots$

则$\delta\left[f(x)\right] = \sum_n \left|f'(x_n)\right|^{-1} \delta(x-x_n)$

广义函数

- 检验函数
  - 设 $\Omega \subseteq R^n$为开域，ϕ是Ω上的实/复函数，具有以下性质：
    - ϕ是Ω上的光滑函数（各阶导数处处存在）
    - $\text{supp}\{\phi\}$是Ω中紧集（有界闭集）

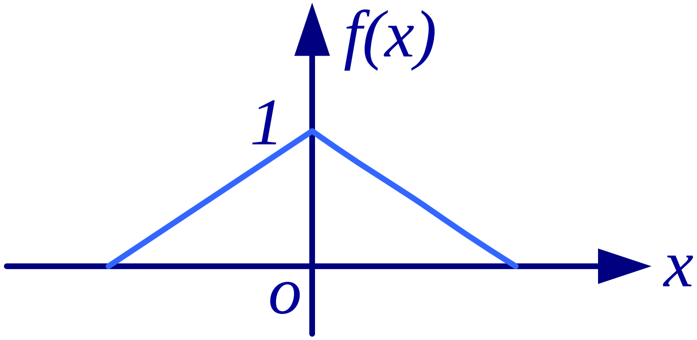
    则称 ϕ 是Ω上的检验函数。
  - 检验函数的全体记为 D（Ω）。
- Supp－（*support*承托/支撑）

  闭包

  - $\text{supp}\{f(x)\} \square \overline{\{X \in R^n \mid f(x) \neq 0\}}$称为$f(x)$的支集。

广义函数

例：
$$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1\\ 0, & |x|\geq 1\end{cases}$$



$$\Rightarrow f(x)\notin \boldsymbol{D}(\Omega)$$

例：
$$f(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{1-|x|}\right), & |x|<1\\ 0, & |x|\geq 1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)\in \boldsymbol{D}(\Omega)$$

广义函数定义

- 广义函数（广函）
  - 若 $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$（函数列），*f(x)*（函数）

  对 $\forall\phi(x)\in \boldsymbol{D}\ (\Omega)$，均有 $\langle f(x),\phi(x)\rangle=\lim\limits_{m\to\infty}\langle f_m(x),\phi(x)\rangle$

  即 $\int_\Omega f(x)\phi(x)dx=\lim\limits_{m\to\infty}\int_\Omega f_m(x)\phi(x)dx$，

  则称 $f(x)$ 是 $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ 的弱（广义）极限，

  亦称 $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ 弱收敛于*f(x)*，亦称*f(x)*是 D（Ω）上的广义函数 。

广义函数

- $\delta(t)$定义
  - 对$\forall \phi(x) \in \boldsymbol{D}\ (\Omega)$，满足

$$\lim_{m\to\infty}\left\langle f_m(x),\phi(x)\right\rangle=\left\langle f(x),\phi(x)\right\rangle=\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dt=\phi(0),$$

则 $f(x)=\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) \Box \delta(x)$

广义函数

- 广函的（广义）导数
  - $\forall \phi(x) \in \boldsymbol{D}(\Omega)$在某个$[a,b]$之外恒等于0,

  考虑 $\boldsymbol{D}(\Omega)$上的广函$f(x)$，有

  $$\left\langle f^{(n)}(x), \phi(x) \right\rangle = (-1)^n \left\langle f(x), \phi^{(n)}(x) \right\rangle,$$

  即$\int_a^b f^{(n)}(x)\phi(x)dx = (-1)^n \int_a^b f(x)\phi^{(n)}(x)dx$

  特别地,

  $$\left\langle \delta^{(n)}(x), \phi(x) \right\rangle = (-1)^n \left\langle \delta(x), \phi^{(n)}(x) \right\rangle = (-1)^n \phi^{(n)}(0)$$

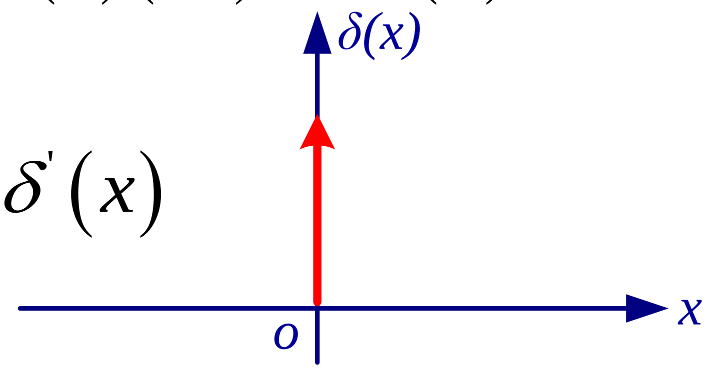
冲激偶

- 已知*f(x)*连续可微，

$$\delta^{(n)}(x)f(x)=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(0)(-1)^k\delta^{(k)}(x)$$

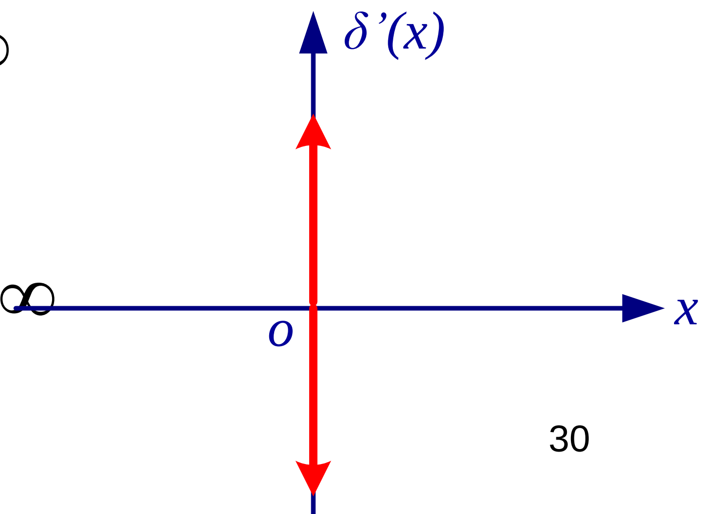
  – 特别地，

$$f(x)\delta'(x)=-f'(0)\delta(x)+f(0)\delta'(x)$$



- $$\delta'(x)=\frac{\delta(0)-\delta(0_-)}{0-0_-}=\frac{\infty-0}{0}=\infty$$

$$\delta'(x)=\frac{\delta(0)-\delta(0_+)}{0-0_+}=\frac{\infty-0}{-0}=-\infty$$



冲激偶性质

1) $\delta'(t) = -\delta'(-t)$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\,dt = 0$

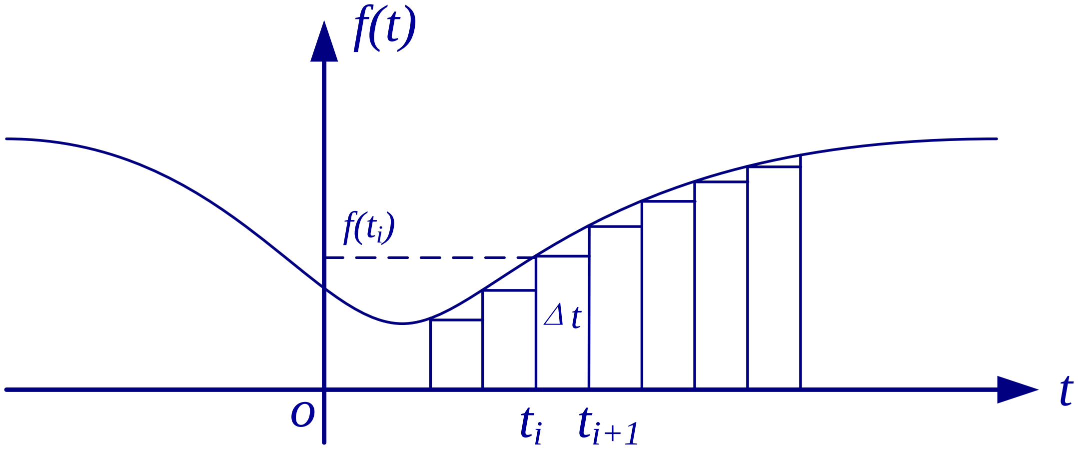
3) $\delta'(t) = \dfrac{d}{dt}\delta(t)$

4) $\dfrac{d}{dt}\left[\delta(t)\phi(t)\right] = \dfrac{d}{dt}\left[\phi(0)\delta(t)\right] = \phi(0)\delta'(t)$

5) $\delta'(at) = \dfrac{1}{|a|}\cdot\dfrac{1}{a}\delta'(t)$

§1.4 信号分解

- 1.直流分量/交流分量
- 2.偶分量/奇分量
- 3.脉冲分解
- 4.实分量/虚分量
- 5.正交分解
  - – *Fourier*分析



注：正交分解和脉冲分解的极限形式可通过 *Fourier*变换统一

§1.5 系统分类

- 1.简单/复杂
- 2.连续/离散/混合
- 3.即时/非即时（无记忆/有记忆）
- 4.集中参数/分布参数
- 5.线性/非线性
- 6.时变/时不变（定常）
- 7.确定/非确定（随机、混沌、模糊）

§1.6 线性系统

系统输入一输出描述

- 1.零状态系统
- 2.冲激响应
- 3.因果律
- 4.时不变性
- 5.线性系统

信号通过零状态*LTI*系统

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \;\square\; x(t)*\delta(t)$$

$$y(t)=Tx(t)=T\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\}$$

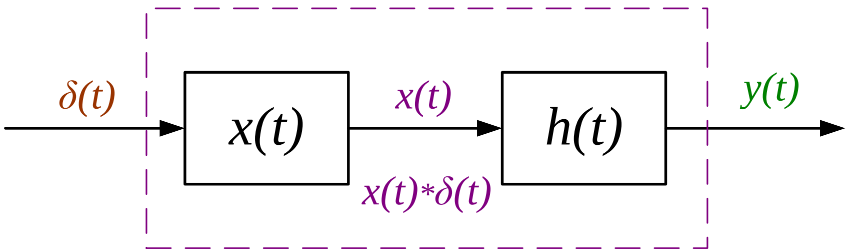
$$\overset{\text{线性}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)T\left\{\delta(t-\tau)\right\}d\tau$$

定常：$T\delta(t)=h(t)\Leftrightarrow T\delta(t-\tau)=h(t-\tau)$

$$\therefore y(t)\overset{\text{定常}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t)$$

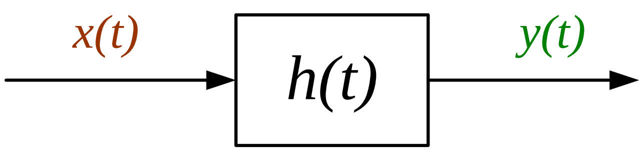
信号通过零状态*LTI*系统

- 零状态响应



$$
\begin{aligned}
y(t) &= x(t)*h(t) \\
&= x(t)*\delta(t)*h(t) \\
&= \delta(t)*\left[x(t)*h(t)\right]
\end{aligned}
$$

- 时变系统



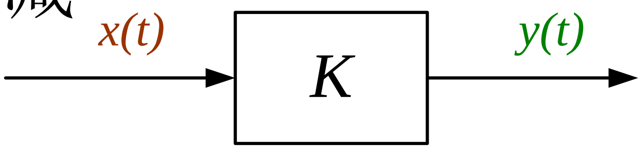
$$T\delta(t)=h(t),T\delta(t-\tau)=h(t,\tau)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t,\tau)d\tau$$

注：对于线性/非线性、时变/时不变系统均可定义冲激响应*h(t)*，但只对*LTI*系统有*y(t)=x(t)*h(t)*

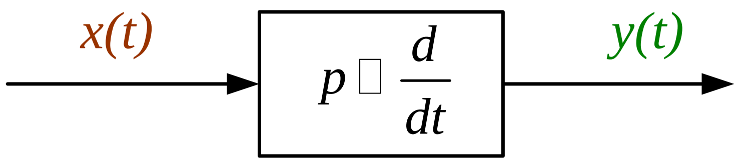
信号通过零状态*LTI*系统

- 放大/衰减



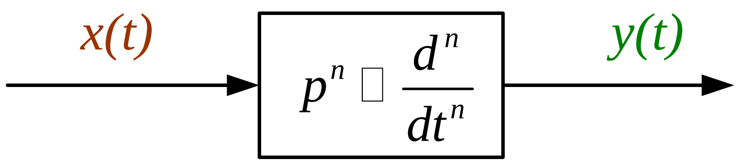
$$h(t)=K\delta(t)$$

- 微分



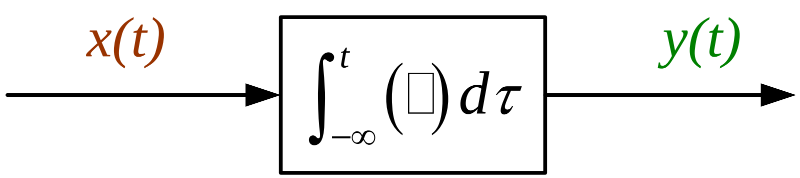
$$h(t)=\frac{d}{dt}\delta(t)$$

$$=p\delta(t)=\delta'(t)$$



$$h(t)=p^n\delta(t)=\delta^{(n)}(t)$$

- 积分



$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt=u(t)$$