

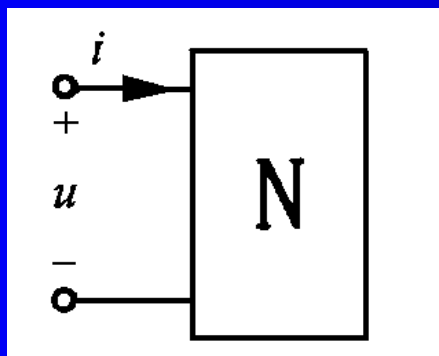
第十一章 正弦稳态的功率 三相电路

本章先讨论正弦稳态单口网络的瞬时功率、平均功率和功率因数。再讨论正弦稳态单口网络向可变负载传输最大功率的问题以及非正弦稳态平均功率的计算。最后介绍三相电路的基本概念。

§ 11-1 瞬时功率和平均功率

一、瞬时功率和平均功率

图示单口网络，在端口电压和电流采用关联参考方向
的条件下，它吸收的功率为



$$p(t) = u(t)i(t) \quad (11-1)$$

在单口网络工作于正弦稳态的情况下。端口电压和电流是相同频率的正弦电压和电流，即

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \psi_u)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi_i)$$

其瞬时功率为

$$p(t) = u(t)i(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u) I_m \cos(\omega t + \psi_i)$$

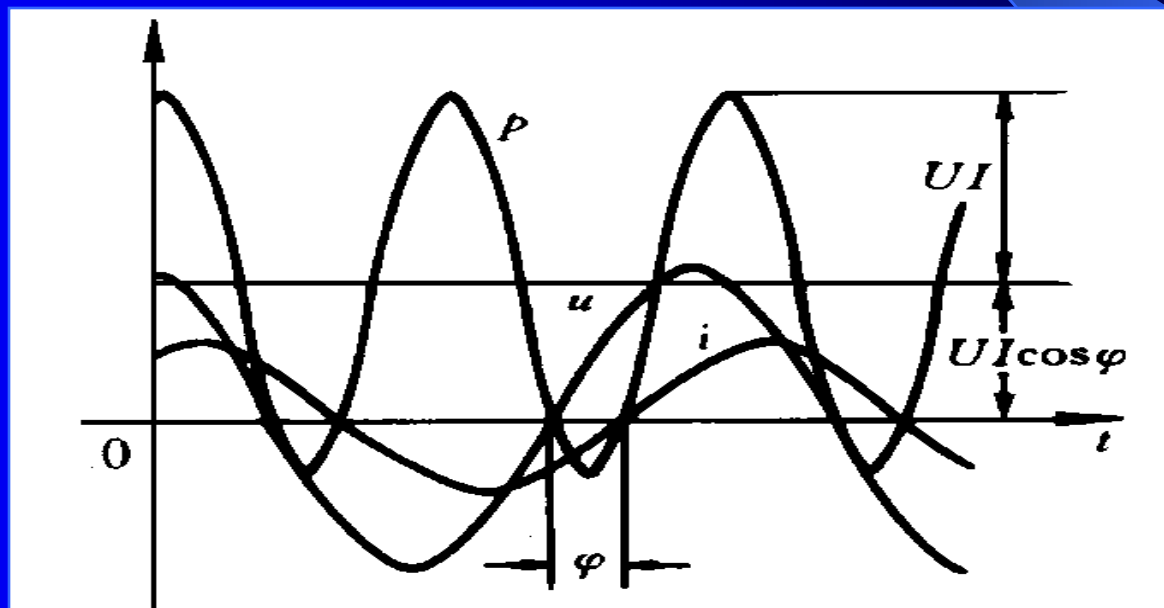
$$= \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(\psi_u - \psi_i) + \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)]$$

$$= UI \cos\varphi + UI \cos(2\omega t + 2\psi_u - \varphi) \quad (11-2)$$

$$2\cos x \cdot \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$

$$p(t) = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + 2\psi_u - \varphi)$$

其中 $\varphi = \psi_u - \psi_i$ 是电压与电流的相位差, 瞬时功率的波形
如图所示



周期性变化的瞬时功率在一个周期内的平均值，称为平均功率，用 P 表示，其定义是

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)] dt \\ &= UI \cos \varphi \end{aligned} \quad (11-3)$$

由此式看出正弦稳态的平均功率不仅与电压电流有效值乘积 UI 有关，还与电压电流的相位差 $\varphi = \psi_u - \psi_i$ 有关，式中的因子 $\cos \varphi$ 称为**功率因数**。平均功率是一个重要的概念，得到广泛使用，我们通常说某个家用电器消耗多少瓦的功率，就是指它的平均功率，简称为功率。

下面我们讨论单口网络的几种特殊情况。

1. 单口网络是一个电阻，或其等效阻抗为一个电阻。

此时单口网络电压与电流相位相同，即 $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$,

$\cos \varphi = 1$ ，式(11-2)变为

$$p(t) = UI + UI \cos(2\omega t + 2\psi_u)$$

其波形如下图所示。

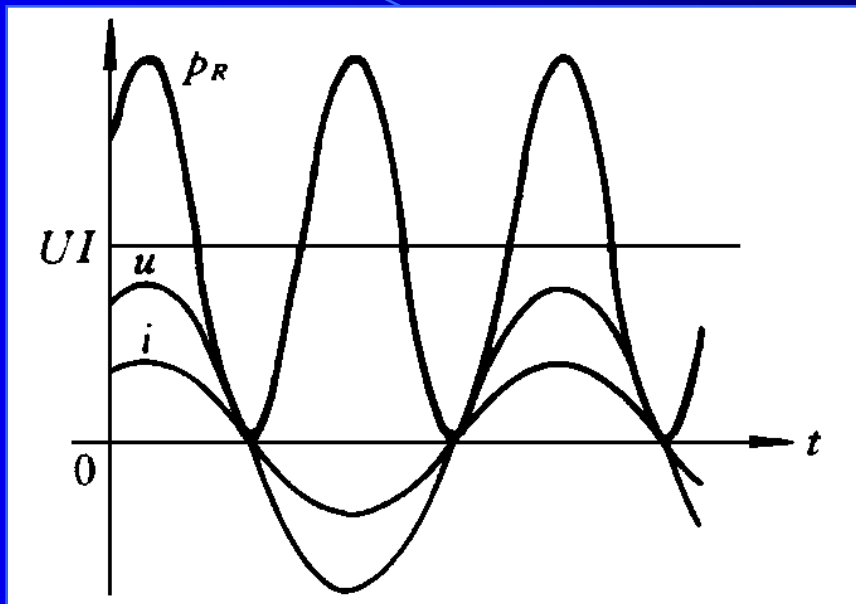


图11-3 电阻的瞬时功率和平均功率

瞬时功率 $p(t)$ 在任何时刻均大于或等于零，电阻始终吸收功率和消耗能量。此时平均功率的表达式为

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad (11-4)$$

$$p(t) = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + 2\psi_u - \varphi) \quad (11-2)$$

2. 单口网络是一个电感性或电容性，或等效为一个电抗。

此时单口网络电压与电流相位为正交关系，即 $\varphi = \psi_u -$

$\psi_i = \pm 90^\circ$ ， $\cos \varphi = 0$ ，式(11-2)变为

$$\begin{aligned} p_L(t) &= UI \cos(2\omega t + 2\psi_u - 90^\circ) \\ &= UI \sin(2\omega t + 2\psi_u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_C(t) &= UI \cos(2\omega t + 2\psi_u + 90^\circ) \\ &= UI \sin(2\omega t + 2\psi_u - 180^\circ) \end{aligned}$$

其波形如图(a)和(b)所示。其特点是在一段时间吸收功率获得能量；另外一段时间释放出它所获得的全部能量。

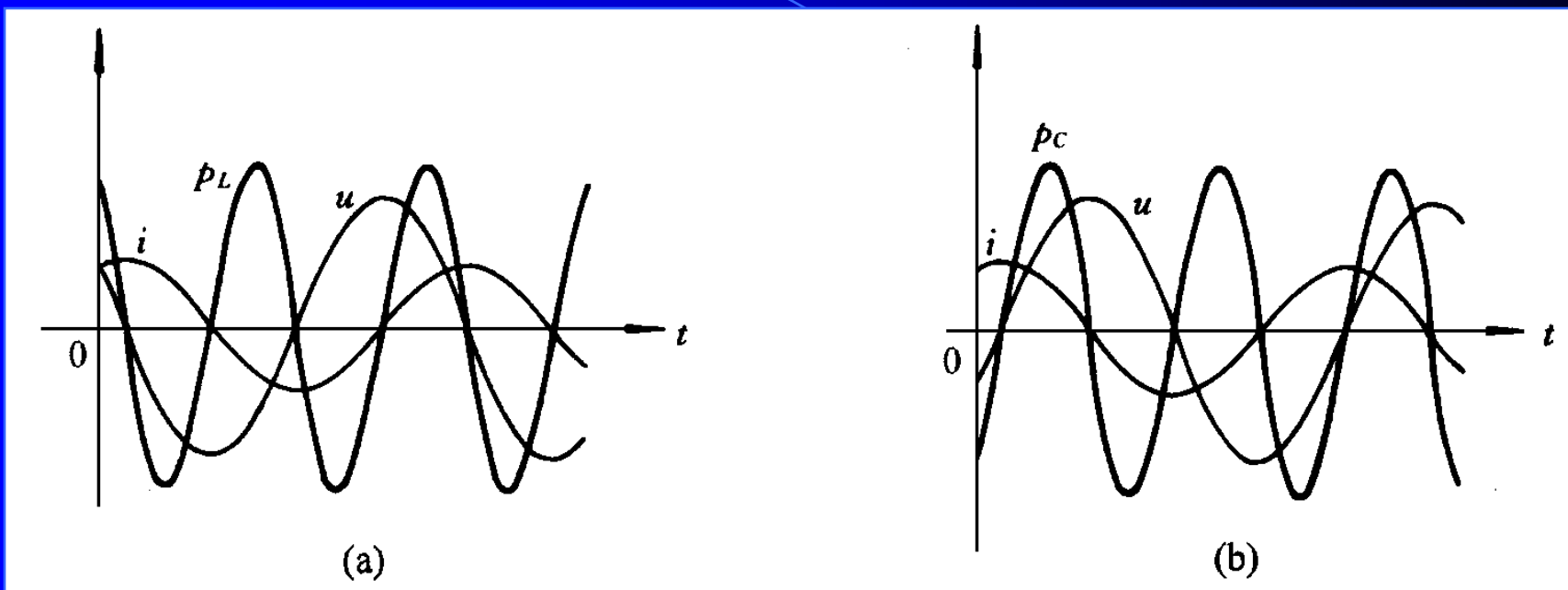


图11-4 电感和电容的瞬时功率和平均功率

此时平均功率的表达式(11-3)变为

$$P = UI \cos(\pm 90^\circ) = 0 \quad (11-5)$$

这说明在正弦稳态电路中，任何电感或电容吸收的平均功率为零。

3.由无源 RLC 元件构成的单口网络，其相量模型等效为一个正值电阻与电抗的串联或一个正值电导与电纳的并联。其电压电流的相位差 φ 在 -90° 到 $+90^\circ$ 之间变化，功率因数 $\cos\varphi$ 在0到1之间变化。

此时瞬时功率 $p(t)$ 随时间作周期性变化，所吸收的平均功率为

$$P = UI \cos \varphi = I^2 \operatorname{Re}(Z) = U^2 \operatorname{Re}(Y) \quad (11-6)$$

式中的 $\operatorname{Re}(Z)$ 是单口网络等效阻抗的电阻分量，它消耗的平均功率，就是单口网络吸收的平均功率。

与此相似，式中的 $\operatorname{Re}(Y)$ 是单口网络等效导纳的电导分量，它消耗的平均功率，就是单口网络吸收的平均功率。

当单口网络中包含有独立电源和受控源时，计算平均功率的式(11-3)仍然适用，但此时的电压与电流的相位差 φ 可能在 $+90^\circ$ 到 $+270^\circ$ 之间变化，功率因数 $\cos\varphi$ 在0到-1之间变化，导致平均功率为负值，这意味着单口网络向外提供能量。

值得注意的是在用 $UI\cos\varphi$ 计算单口网络吸收的平均功率时，一定要采用电压电流的关联参考方向，否则会影响相位差 φ 的数值，从而影响到功率因数 $\cos\varphi$ 以及平均功率的正负。

二、功率因数

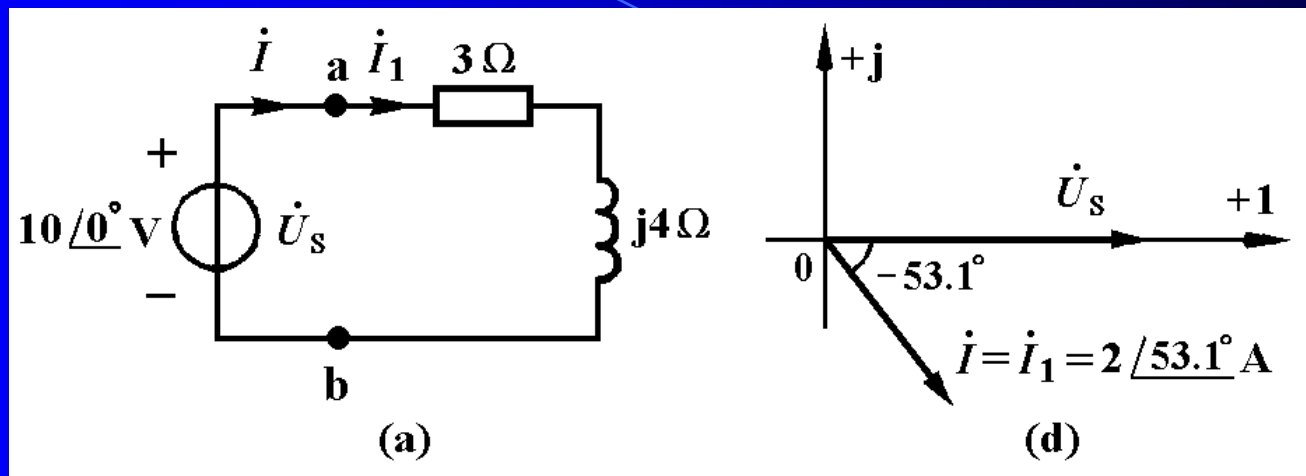
从式(11-3)可见, 在单口网络电压电流有效值的乘积 UI 一定的情况下, 单口网络吸收的平均功率 P 与 $\cos\varphi$ 的大小密切相关, $\cos\varphi$ 表示功率的利用程度, 称为功率因数, 记为 λ , 它与 P 和 UI 的关系为

$$\lambda = \cos\varphi = \frac{P}{UI} \quad (11-7)$$

功率因数 $\cos\varphi$ 之值与单口网络电压与电流间的相位差密切相关, 故称 $\varphi = \psi_u - \psi_i$ 为功率因数角。

当单口网络呈现纯电阻时，功率因数角 φ 为零以及功率因数 $\cos\varphi=1$ ，功率利用程度最高。当单口网络等效为一个电阻与电感或电容连接时，即单口呈现电感性或电容性时，功率因数角 $\varphi=0\sim\pm 90^\circ$ 以及功率因数 $\cos\varphi<1$ ，以致于 $P<UI$ 。为了提高电能的利用效率，电力部门采用各种措施力求提高功率因数。

例11-1 图(a)表示电压源向一个电感性负载供电的电路模型，试用并联电容的方法来提提高负载的功率因数。



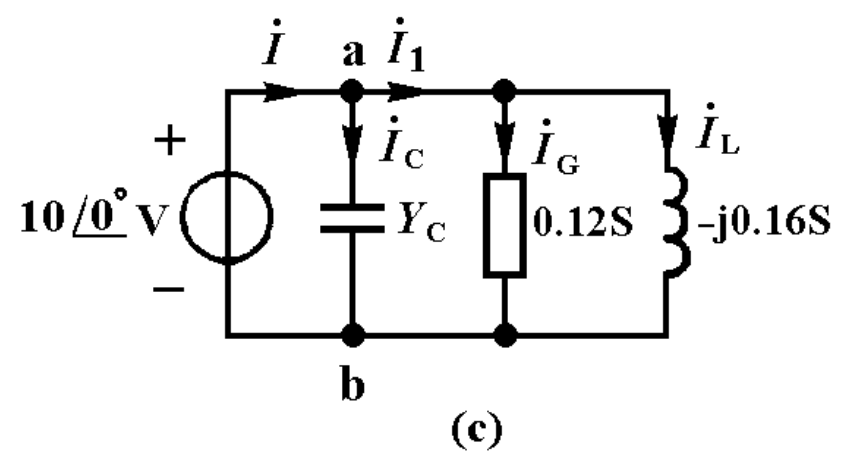
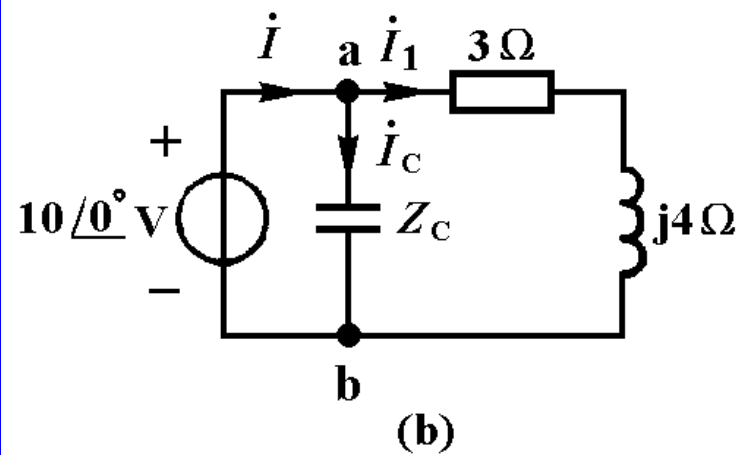
解：图(a)电路中的电流为

$$\dot{I} = \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{Z} = \frac{10 \angle 0^\circ}{3 + j4} = 2 \angle -53.1^\circ \text{ A}$$

其相量图如图(d)所示。单口网络吸收的平均功率为

$$P = UI \cos \varphi = 10 \times 2 \times \cos(53.1^\circ) = 12 \text{ W}$$

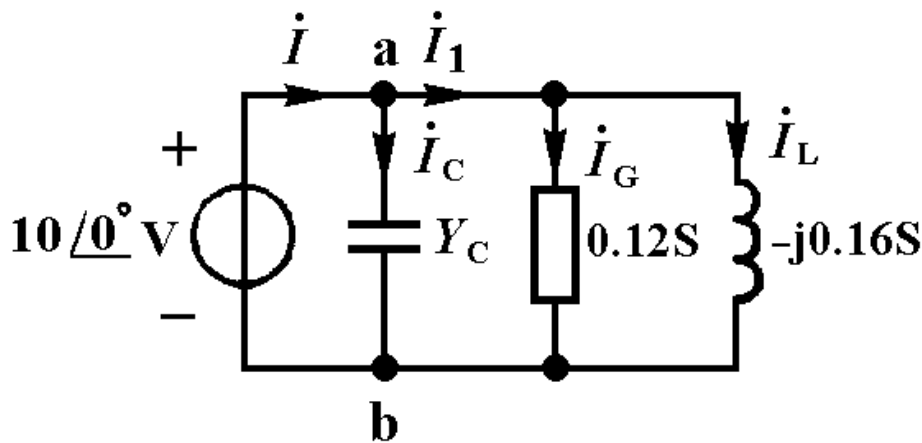
此时的功率因数 $\lambda = \cos \varphi = 0.6$ ，功率的利用效率很低。



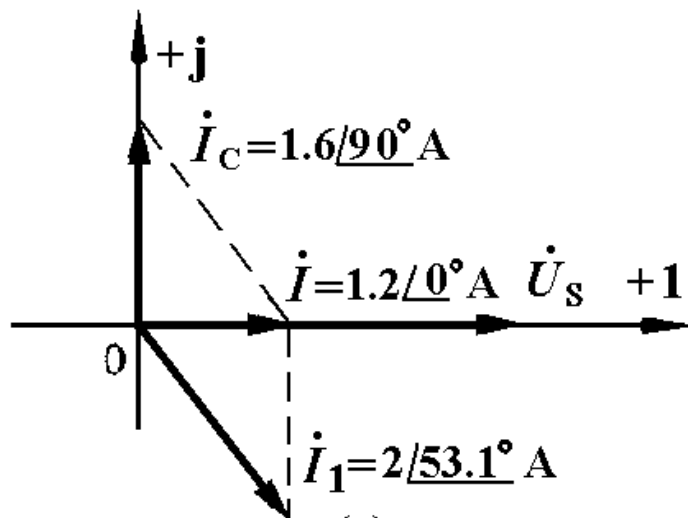
为了提高功率因数，可以在ab两端上并联一个电容，如图(b)所示。为分析方便，先将电阻与电感串联等效变换为电阻和电感的并联，如图(c)所示，其电导和电纳值由下式确定

$$Y = G + jB = \frac{1}{3 + j4} = \frac{3 - j4}{3^2 + 4^2} = (0.12 - j0.16)\text{S}$$

从此式可见，并联的电容的导纳为 $Y_C = j\omega C = +j0.16\text{S}$ 时，单口网络呈现为纯电阻，可以使功率因数提高到1，即效率达到100%。



(c)



(e)

并联电容后，图(b)和(c)电路端口的电流变为

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_C = (\dot{I}_G + \dot{I}_L) + \dot{I}_C = (G\dot{U}_S + Y_L\dot{U}_S) + Y_C\dot{U}_S \\ &= (1.2 - j1.6) + j1.6 = 1.2\angle 0^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

其相量图如图(e)所示，由此可见，并联电容后，不会影响电阻中的电流和吸收的平均功率 $P=12\text{W}$ 。而端口电流由 2A 减小到 1.2A ，提高了电源的利用效率。可以将节省下来的电流，提供给其它用户使用。

§ 11-2 复功率

一、复功率

为了便于用相量来计算平均功率，引入复功率的概念。图11-6所示单口网络工作于正弦稳态，其电压电流采用关联的参考方向，假设电压和电流的有效值相量分别为

$$\begin{aligned}\dot{U} &= U \angle \psi_u \\ \dot{I} &= I \angle \psi_i\end{aligned}$$

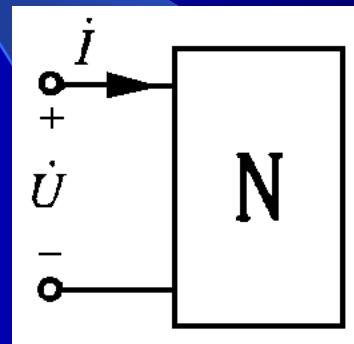
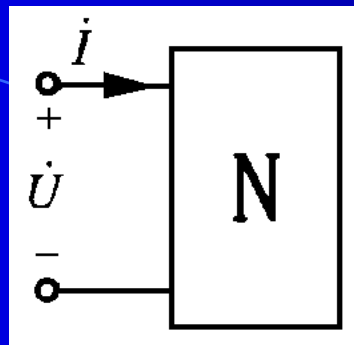


图 11-6



电流相量的共轭复数为 $\dot{I}^* = I \angle -\phi_i$ ，则单口网络吸收的复功率为

$$\begin{aligned}
 \tilde{S} &= \dot{U} \dot{I}^* \\
 &= UI \angle \psi_u - \psi_i = UI \angle \varphi \\
 &= UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ \quad (11-8)
 \end{aligned}$$

其中，复功率的实部 $P=UI \cos \varphi$ 称为有功功率，它是单口网络吸收的平均功率，单位为瓦(W)。

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \dot{U} I^* \\ &= UI \angle \psi_u - \psi_i = UI \angle \varphi \\ &= UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ \quad (11-8)\end{aligned}$$

复功率的虚部 $Q=UI \sin \varphi$ 称为无功功率，它反映电源和单口网络内储能元件之间的能量交换情况，为与平均功率相区别，单位为乏(var)。

复功率的模称为视在功率，它表示一个电气设备的容量，是单口网络所吸收平均功率的最大值，为与其它功率相区别，用伏安(VA)为单位。例如我们说某个发电机的容量为100kVA，而不说其容量为100kW。

二、复功率守恒

复功率守恒定理：对于工作于正弦稳态的电路来说，由每个独立电源发出的复功率的总和等于电路中其它电路元件所吸收复功率的总和。可以用数学式表示如下：

$$\sum \tilde{S}_{\text{发出}} = \sum \tilde{S}_{\text{吸收}} \quad (11-9)$$

由此可以导出一个正弦稳态电路的有功功率和无功功率也是守恒的结论：可以用数学式表示如下：

$$\sum P_{\text{发出}} = \sum P_{\text{吸收}} \quad \sum Q_{\text{发出}} = \sum Q_{\text{吸收}}$$

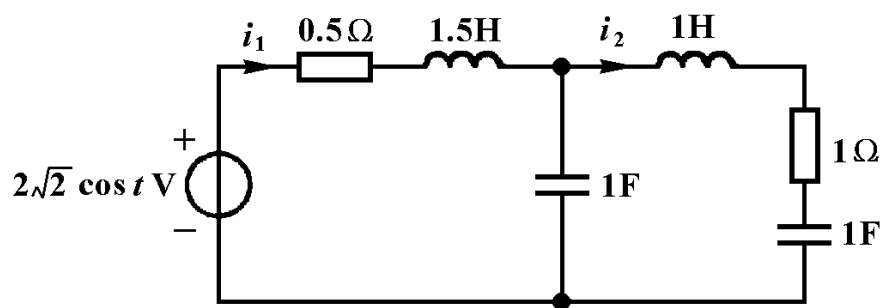
$$\sum P_{\text{发出}} = \sum P_{\text{吸收}} \quad \sum Q_{\text{发出}} = \sum Q_{\text{吸收}}$$

由此可以得出单口网络吸收的有功功率等于该单口网络内每个电阻吸收的平均功率总和的结论。

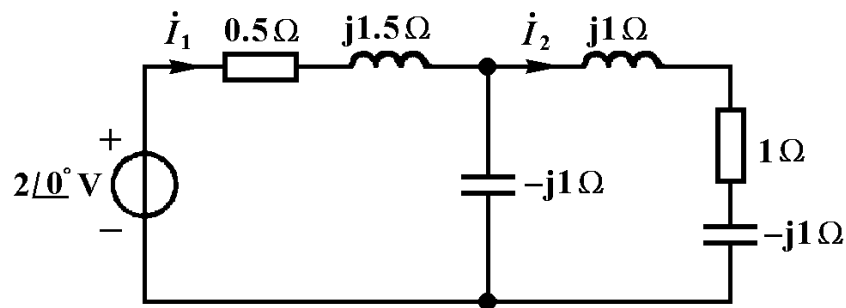
值得注意的是一个正弦稳态电路中的视在功率并不守恒。

例11-2 图(a)电路工作于正弦稳态，已知电压源电压为

$$u_S(t) = 2\sqrt{2} \cos t \text{ V} , \text{ 求电压源发出的平均功率。}$$



(a)



$\omega = 1 \text{ rad/s}$

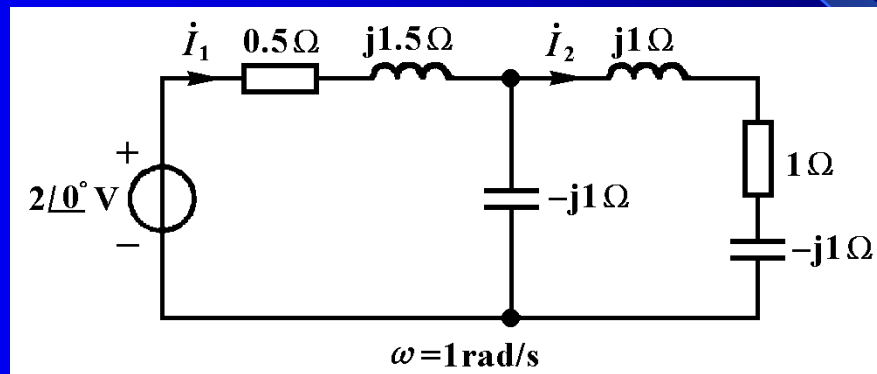
(b)

解：图a)电路的相量模型，如图(b)所示。先求出连接电压源单口网络的等效阻抗

$$Z = 0.5 + j1.5 + \frac{(-j1)(j1 + 1 - j1)}{1 - j1} = 0.5 + j1.5 + 0.5 - j0.5 = (1 + j1)\Omega$$

用欧姆定律求出电流

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_S}{Z} = \frac{2\angle 0^\circ}{1 + j1} = \sqrt{2}\angle -45^\circ \text{ A}$$



用分流公式求出电流 \dot{I}_2

$$\dot{I}_2 = \frac{-j1}{1 - j1} \times \dot{I}_1 = \frac{-j1}{\sqrt{2}\angle -45^\circ} \times \sqrt{2}\angle -45^\circ = -j1 = 1\angle -90^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_S = 2\angle 0^\circ \text{ V} \quad \dot{I}_1 = \sqrt{2}\angle -45^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_2 = 1\angle -90^\circ \text{ A}$$

求出各电压电流相量后，可以用以下几种方法计算电压源发出的平均功率。

$$\begin{aligned} 1. \quad P_{\text{发出}} &= U_S I_1 \cos\varphi \\ &= 2 \times \sqrt{2} \times \cos 45^\circ \text{ W} = 2 \text{ W} \end{aligned}$$

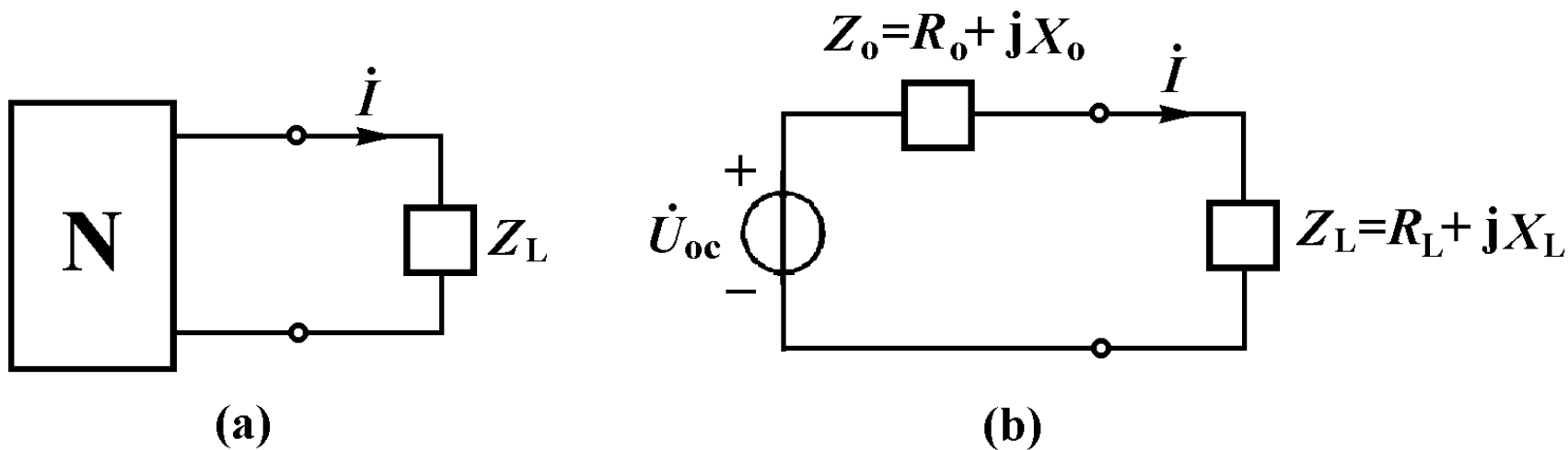
$$\begin{aligned} 2. \quad \tilde{S} &= \dot{U}_S \dot{I}_1^* \\ &= 2 \times \sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ V} \cdot \text{A} = (2 + j2) \text{ V} \cdot \text{A} \rightarrow P = \text{Re}(\tilde{S}) = 2 \text{ W} \end{aligned}$$

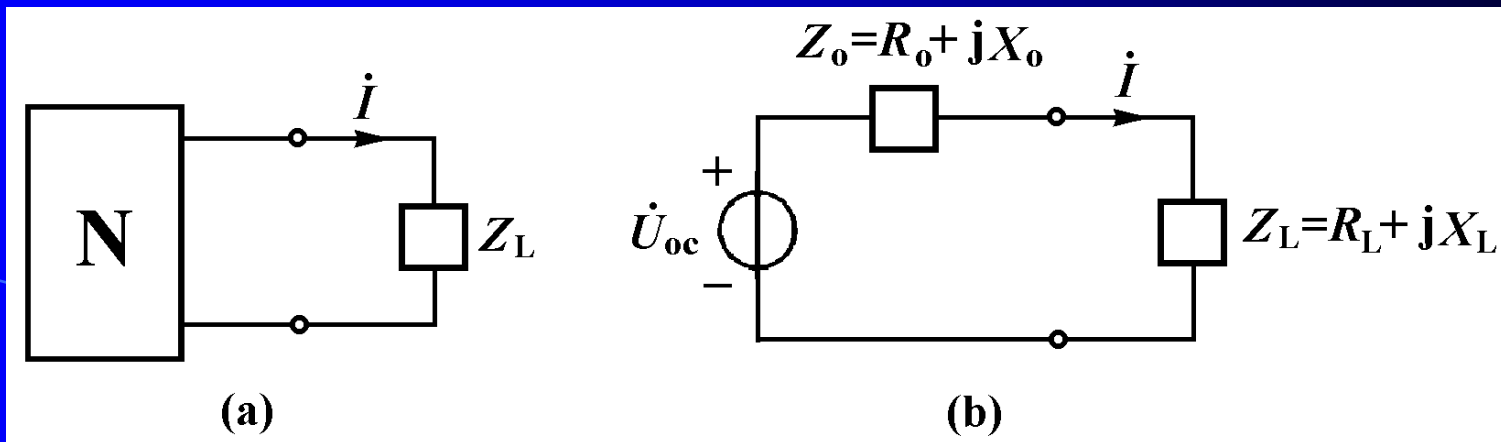
$$\begin{aligned} 3. \quad P_{\text{发出}} &= I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 \\ &= (2 \times 0.5 + 1 \times 1) \text{ W} = 2 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad P_{\text{发出}} &= I_1^2 \text{Re}[Z] \\ &= I_1^2 \text{Re}[1 + j1] = 2 \times 1 \text{ W} = 2 \text{ W} \end{aligned}$$

§ 11-3 最大功率传输定理

本节讨论正弦稳态电路中，含独立电源单口网络向可变负载传输最大平均功率的问题。将图(a)所示含独立电源单口网络用戴维宁等效电路代替，得到图(b)所示电路。其中， \dot{U}_{oc} 含源单口网络的开路电压， $Z_0=R_0+jX_0$ 是含源单口网络的输出阻抗， $Z_L=R_L+jX_L$ 是负载阻抗。





负载 Z_L 获得的平均功率等于

$$P_L = U_{oc} I \cos\varphi - I^2 R_0$$

现在求负载 $Z_L = R_L + jX_L$ 变化时所获得的功率 P_L 的最大值。首先令 $jX_L = -jX_0$ ，使其功率因数 $\cos\varphi = 1$ ，上式变为

$$P_L = U_{oc} I - I^2 R_0$$

再对电流求导数，并令其等于零

$$\frac{dP_L}{dI} = U_{oc} - 2IR_o = 0 \longrightarrow \frac{U_{oc}}{I} = 2R_o \rightarrow R_L = R_o$$

得到极大值或极小值的条件是 $R_L = R_o$ 。再对电流 I 求一次导数，并令其小于零

$$\frac{d^2 P_L}{dI^2} = -2R_o < 0$$

上式表明在 $R_o > 0$ 的前提下，负载获得最大功率的条件是

$$Z_L = R_L + jX_L = Z_o^* = R_o - jX_o \quad (11-10)$$

所获得的最大平均功率为

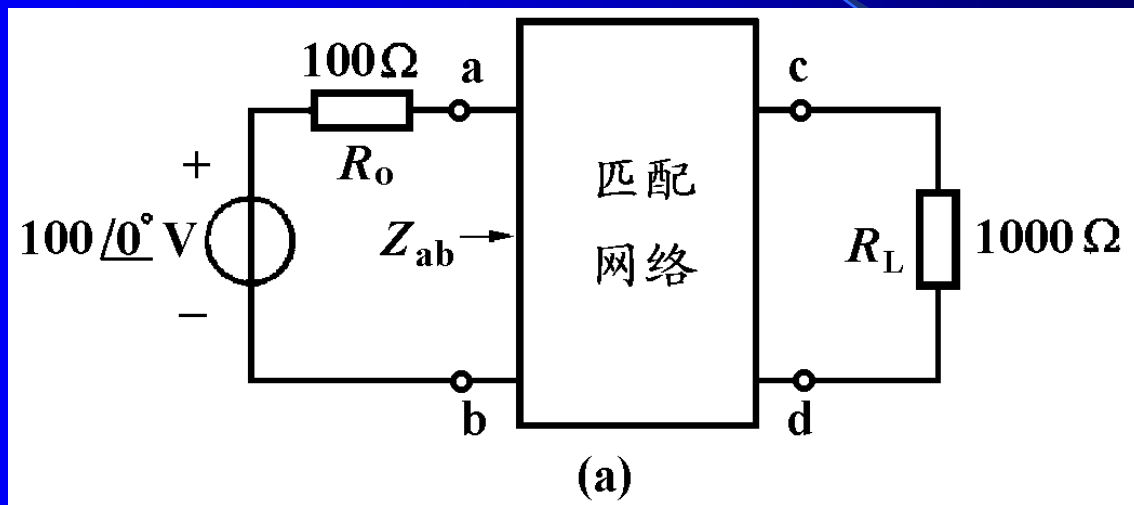
$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_o} \quad (11-11)$$

最大功率传输定理：工作于正弦稳态的单口网络向一个负载 $Z_L=R_L+jX_L$ 供电，如果该单口网络可用戴维宁等效电路(其中 $Z_0=R_0+jX_0, R_0>0$)代替，则在负载阻抗等于含源单口网络输出阻抗的共轭复数（ $Z_L = Z_0^*$ ）时，负载可以获得最大平均功率

$$P_{\max} = \frac{U_{\text{oc}}^2}{4R_0}$$

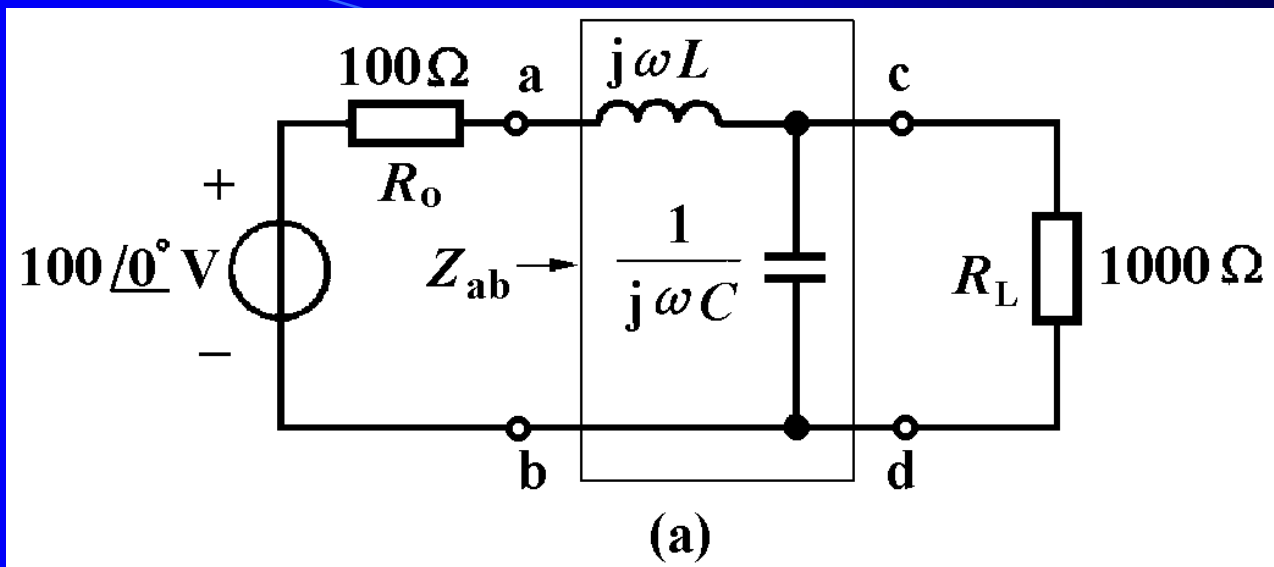
通常将满足 $Z_L = Z_0^*$ 条件的匹配，称为共轭匹配。在通信和电子设备的设计中，常常要求满足共轭匹配，以使负载得到最大功率。

例11-3 图(a)所示电路中，为使 $R_L=1000\Omega$ 负载电阻从单口网络中获得最大功率，试设计一个由电抗元件组成的网络来满足共轭匹配条件。



解：1. 假如不用匹配网络，将 1000Ω 负载电阻与电抗网络直接相连时，负载电阻获得的平均功率为

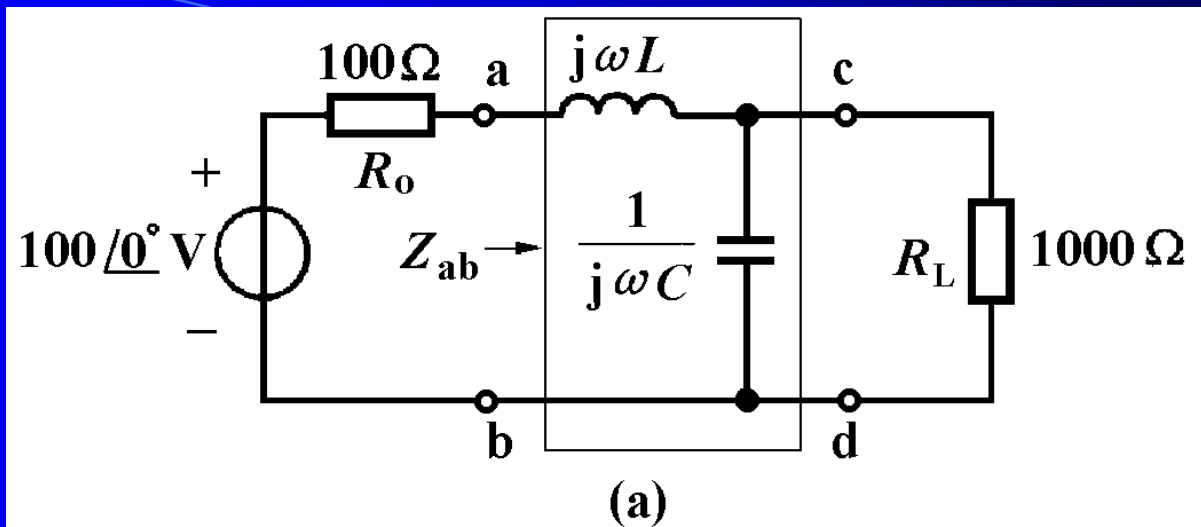
$$P_L = \left(\frac{100}{100 + 1000} \right)^2 \times 1000 = 8.26 \text{ W}$$



2. 假如采用匹配网络满足共轭匹配条件， 1000Ω 负载电阻可能获得的最大平均功率为

$$P_L = \left(\frac{100}{100 + 100} \right)^2 \times 100 = 25\text{W}$$

由上可见，采用共轭匹配网络，负载获得的平均功率将大大增加。



3. 设计一个由图(a)所示电感和电容元件构成的网络来满足共轭匹配条件，以便使负载获得最大功率。

将电容和电阻并联单口等效变换为串联单口，写出输入阻抗

$$Z_{ab} = j\omega L + \frac{\frac{1}{R_L}}{\frac{1}{R_L^2} + (\omega C)^2} - j \frac{\omega C}{\frac{1}{R_L^2} + (\omega C)^2} = Z_o^* = R_o - jX_o \quad (11-12)$$

$$Z_{ab} = j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R_L} + (\omega C)^2} - j \frac{\omega C}{\frac{1}{R_L} + (\omega C)^2} = \overset{*}{Z_o} = R_o - jX_o \quad (11-12)$$

令上式的实部相等可以求得

$$\omega C = \frac{1}{R_L} \sqrt{\frac{R_L}{R_o} - 1} \quad (11-13)$$

代入电阻值得到

$$\omega C = \frac{1}{1000} \sqrt{10 - 1} = 3\text{mS}$$

$$\text{当 } \omega = 10^3 \text{ rad/s 时 } C = \frac{3\text{mS}}{\omega} = \frac{3\text{mS}}{1000} = 3\mu\text{F}$$

$$Z_{ab} = j\omega L + \frac{\frac{1}{R_L}}{\frac{1}{R_L^2} + (\omega C)^2} - j \frac{\omega C}{\frac{1}{R_L^2} + (\omega C)^2} = Z_o^* = R_o - jX_o \quad (11-12)$$

令式(11-12)虚部相等可以求得

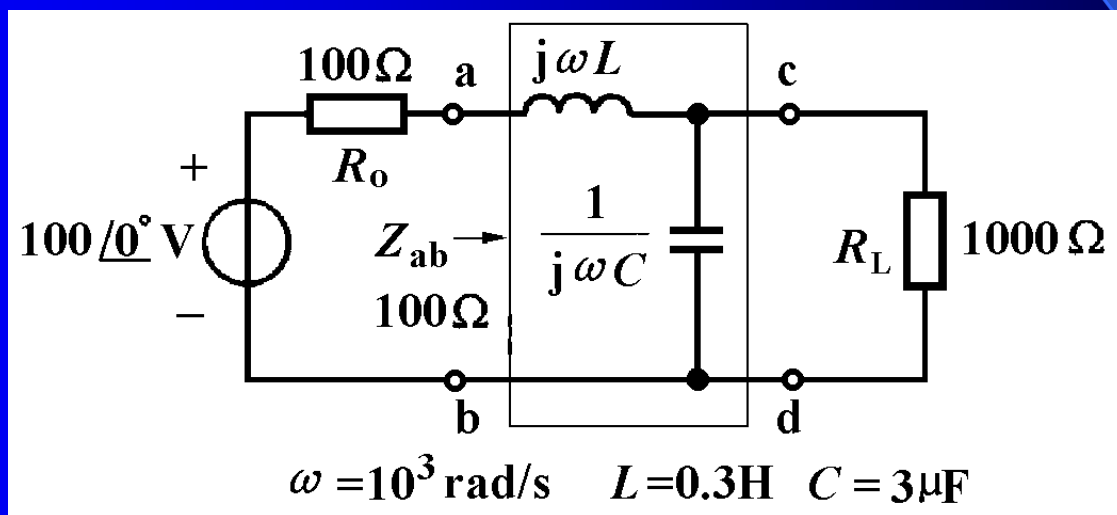
$$\omega L = \frac{\omega C}{\frac{1}{R_L^2} + (\omega C)^2} \times \frac{1}{R_L} = \omega C R_L R_o \quad (11-14)$$

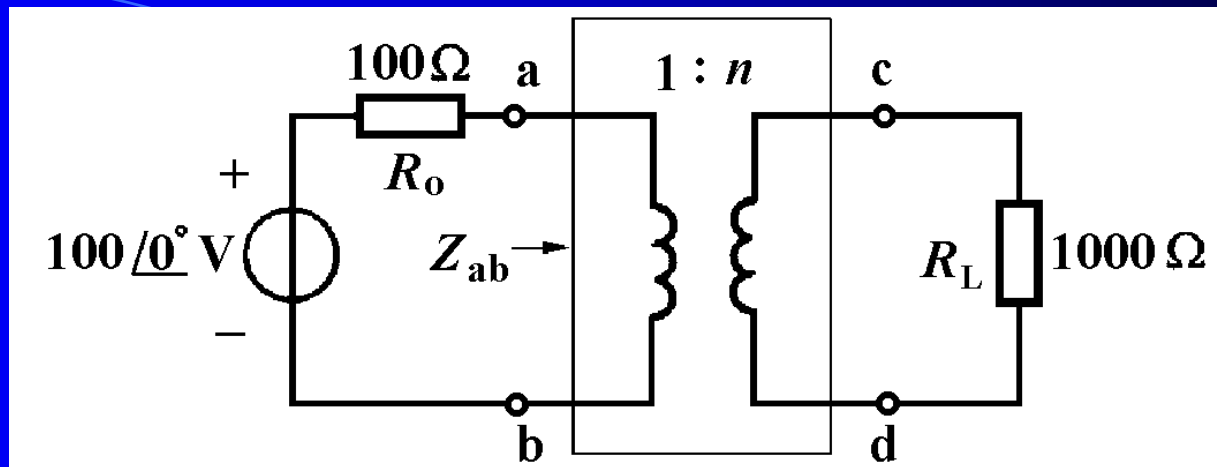
代入电阻和电容值得到

$$\omega L = \omega C R_L R_o = 3 \times 10^{-3} \times 10^3 \times 10^2 = 300 \Omega$$

$$\text{当 } \omega = 10^3 \text{ rad/s 时 } L = \frac{\omega L}{\omega} = \frac{300}{1000} = 0.3 \text{ H}$$

计算表明，如选择 $L=0.3\text{H}$ ， $C=3\mu\text{F}$ ，图示电路ab两端以右单口网络的输入阻抗等于 100Ω ，它可以获得 25W 的最大功率，由于其中的电感和电容平均功率为零，根据平均功率守恒定理，这些功率将为 $R_L=1000\Omega$ 的负载全部吸收。



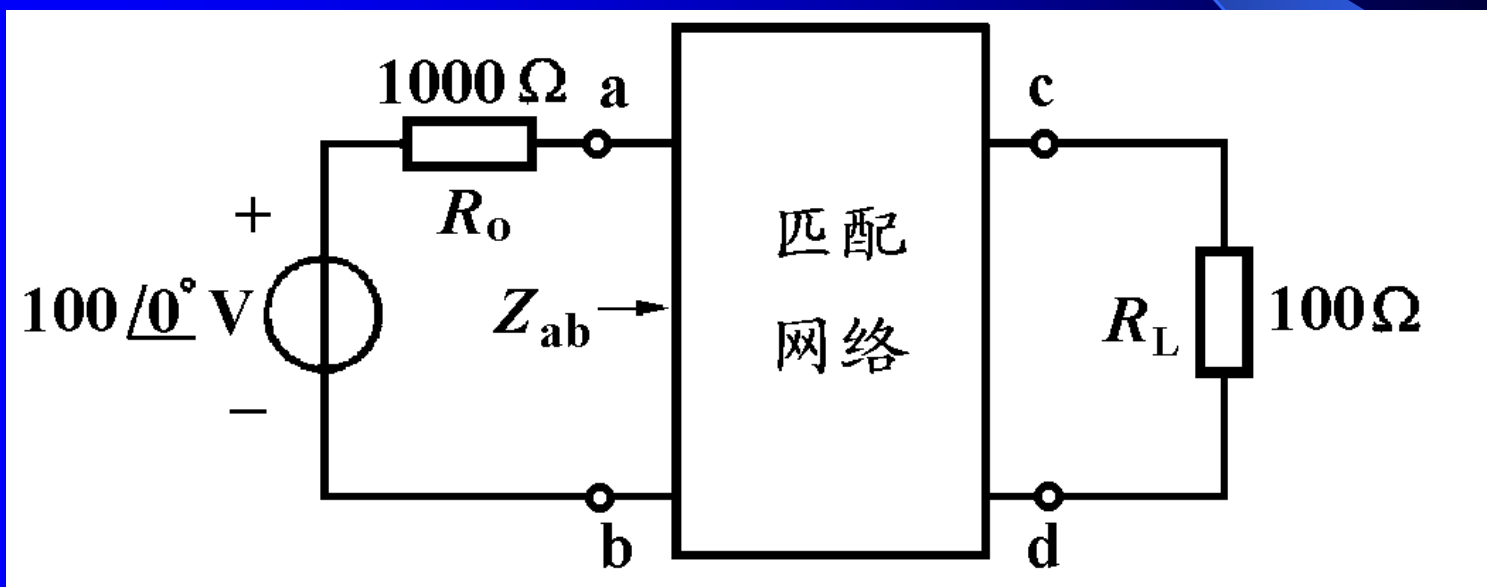


我们也可以采用理想变压器来作为匹配网络使负载电阻 $R_L=1000\Omega$ 获得最大功率。此时理想变压器的变比的计算公式如下：

$$n = \sqrt{\frac{R_L}{R_o}} = \sqrt{\frac{1000}{100}} = \sqrt{10} = 3.162$$

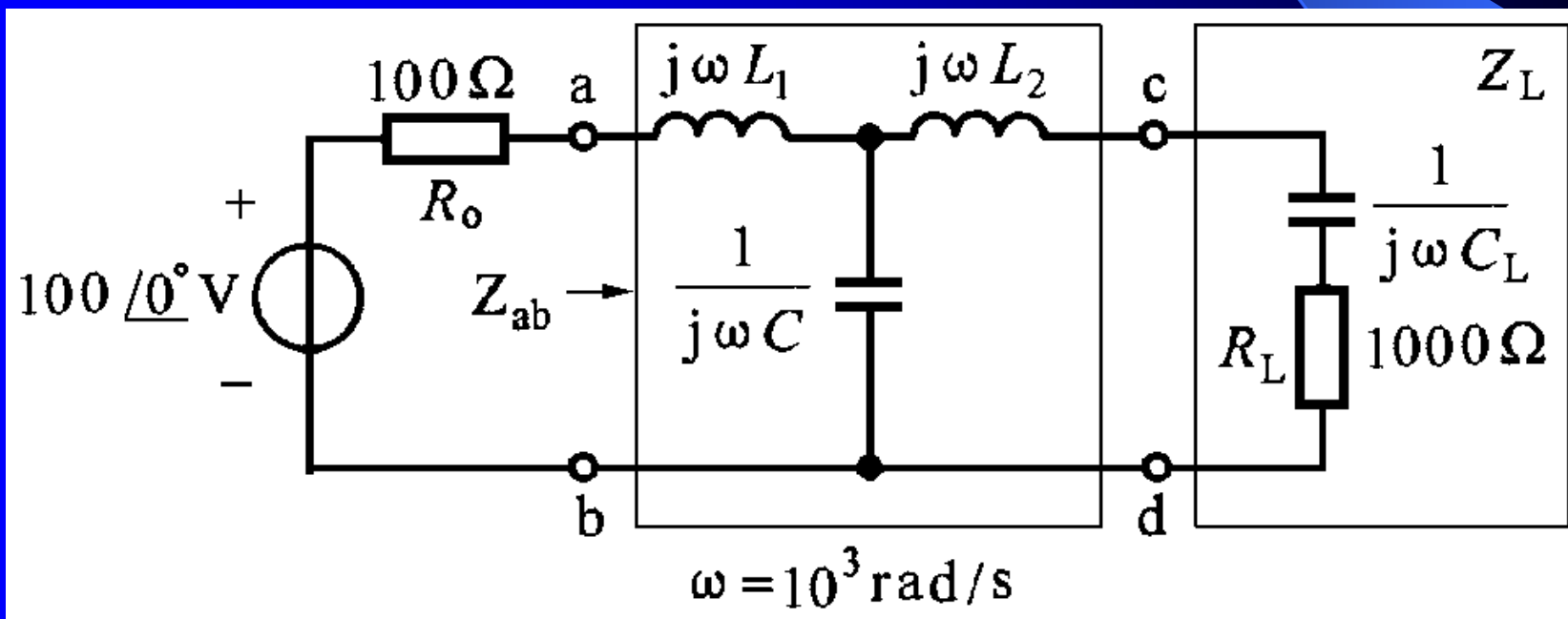
变比 $n=3.162$ 的变压器将 1000Ω 的电阻变换为 100Ω 来满足阻抗匹配条件，由于理想变压器不消耗功率，根据平均功率守恒定理， 25W 的最大功率将全部为负载电阻 $R_L=1000\Omega$ 所吸收。

补充题：图示电路中，为使 $R_L=100\Omega$ 负载电阻从单口网络中获得最大功率，试设计一个由电抗元件组成的网络来满足共轭匹配条件。



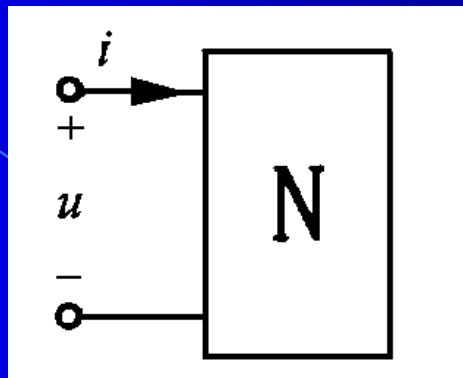
思考与练习

11-3-1 图示电路中，已知电容性负载中的电容 $C_L=1\mu\text{F}$ ， LC 匹配网络中的 $L_1=0.3\text{H}$ ， $C=3\mu\text{F}$ 。试证明当 LC 匹配网络中的 $L_2=1\text{mH}$ 时，电容性负载 Z_L 可以获得最大平均功率。



§ 11-4 平均功率的叠加

本节讨论几种不同频率正弦信号激励的非正弦稳态的平均功率。



图示单口网络，在端口电压和电流采用关联参考方向
的条件下，假设其电压和电流为

$$u(t) = U_{1m} \cos(\omega_1 t + \psi_{u1}) + U_{2m} \cos(\omega_2 t + \psi_{u2})$$

$$i(t) = I_{1m} \cos(\omega_1 t + \psi_{i1}) + I_{2m} \cos(\omega_2 t + \psi_{i2})$$

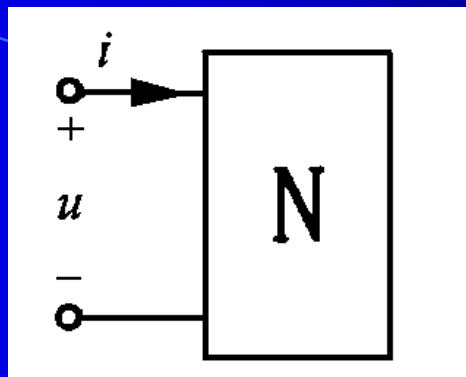
$$\text{且 } \omega_1 \neq \omega_2$$

单口网络的瞬时功率为

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) \\ &= U_{1m} \cos(\omega_1 t + \psi_{u1}) I_{1m} \cos(\omega_1 t + \psi_{i1}) \\ &\quad + U_{2m} \cos(\omega_2 t + \psi_{u2}) I_{2m} \cos(\omega_2 t + \psi_{i2}) \\ &\quad + U_{1m} \cos(\omega_1 t + \psi_{u1}) I_{2m} \cos(\omega_2 t + \psi_{i2}) \\ &\quad + U_{2m} \cos(\omega_2 t + \psi_{u2}) I_{1m} \cos(\omega_1 t + \psi_{i1}) \end{aligned}$$

瞬时功率随时间作周期性变化，它在一个周期内的平均功率为

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + 0 + 0 \\ &= P_1 + P_2 \end{aligned}$$



一般来说， n 种不同频率正弦信号作用于单口网络引起的平均功率等于每种频率正弦信号单独引起的平均功率之和，即

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n \quad (11-15)$$

其中

$$\begin{aligned} P_k &= U_k I_k \cos(\psi_{uk} - \psi_{ik}) \\ &= U_k I_k \cos\varphi_k \end{aligned}$$

例11-4 已知单口网络的电压和电流为

$$u(t) = (100 + 100\cos t + 50\cos 2t + 30\cos 3t)\text{V}$$

$$i(t) = 10\cos(t - 60^\circ)\text{A} + 2\cos(3t - 135^\circ)\text{A}$$

试求单口网络吸收的平均功率。

解：分别计算每种频率正弦信号单独作用产生的平均功率

$$P_0 = 0 \quad P_1 = \frac{100 \times 10}{2} \cos 60^\circ = 250\text{W}$$

$$P_2 = 0 \quad P_3 = \frac{30 \times 2}{2} \cos 135^\circ = -21.2\text{W}$$

将这些平均功率相加得到单口网络吸收的平均功率

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = (0 + 250 + 0 - 21.2) = 228.8\text{W}$$

例11-5 已知流过 5Ω 电阻的电流为

$$i(t) = (5 + 10\sqrt{2} \cos t + 5\sqrt{2} \cos 2t) \text{A}$$

试求电阻吸收的平均功率。

解：分别计算各种频率成分的平均功率再相加，即

$$\begin{aligned} P &= P_0 + P_1 + P_2 \\ &= 5^2 \times 5 + 10^2 \times 5 + 5^2 \times 5 = 125 + 500 + 125 = 750 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\text{或 } P = (5^2 + 10^2 + 5^2) \times 5 = (\sqrt{150})^2 \times 5 = 750 \text{ W}$$

式中的 $I = \sqrt{150}$ 是周期性非正弦电流的有效值。

一般来说，周期性非正弦电压和电流，用傅里叶级数分解出它的直流分量和各种谐波分量后，可以用以下公式计算其有效值。

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \cdots + I_n^2} \quad (11-16)$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_n^2} \quad (11-17)$$

引入周期性非正弦电压和电流的有效值后，可以用以下公式计算电阻的平均功率

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad (11-18)$$

应该特别注意的是电路在频率相同的几个正弦信号激励时，不能用平均功率叠加的方法来计算正弦稳态的平均功率。

应该先计算出总的电压和电流后，再用公式 $P=UI\cos\varphi$ 来计算平均功率。

例11-6 图11-11(a)所示电路中，已知

$$u(t) = 10\sqrt{2} \cos t + 5\sqrt{2} \cos 2t \text{ V}$$

试求该单口网络向外传输的最大平均功率。

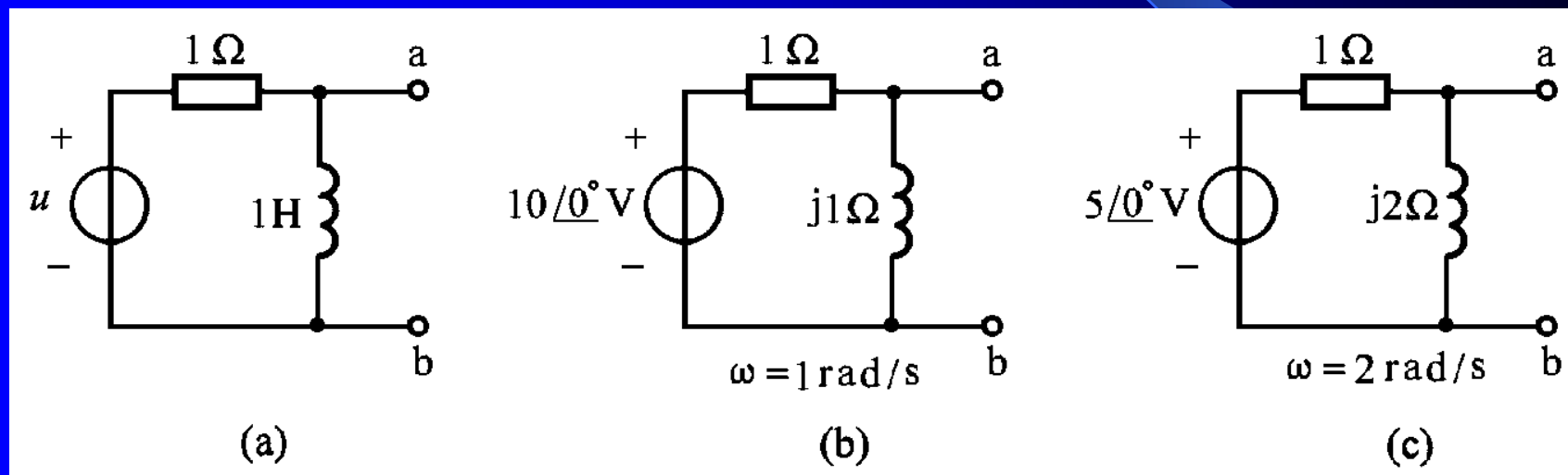
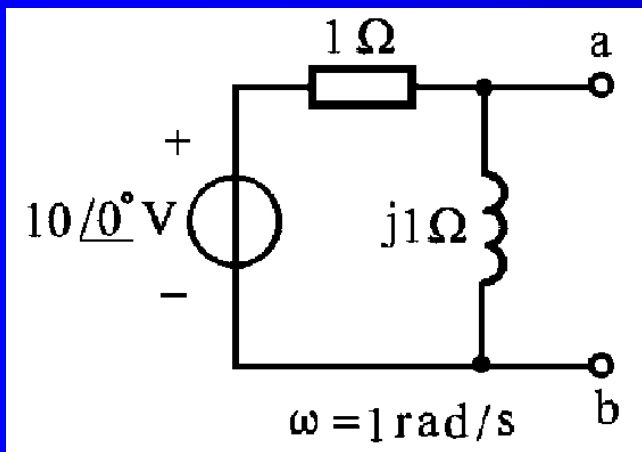


图 11-11

解：分别计算出每个频率成分正弦信号所产生的最大平均功率，然后相加。

1. $u_1(t) = 10\sqrt{2} \cos t \text{ V}$ 单独作用时，画出 $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$ 的相量模型，此时



$$\dot{U}_{oc} = \frac{j1}{1 + j1} \times 10 \angle 0^\circ = 5\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ V}$$

$$Z_o = \frac{j1}{1 + j1} = (0.5 + j0.5) \Omega$$

图 11-11(b)

当负载阻抗为 $Z_L = Z_o^* = (0.5 - j0.5) \Omega$ 时，含源单口网络输出的最大平均功率为

$$P_{1\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_o} = \frac{50}{4 \times 0.5} = 25 \text{ W}$$

2. $u_2(t) = 5\sqrt{2} \cos 2t \text{ V}$ 单独作用时，画出 $\omega_2 = 2 \text{ rad/s}$ 的相量模型，此时

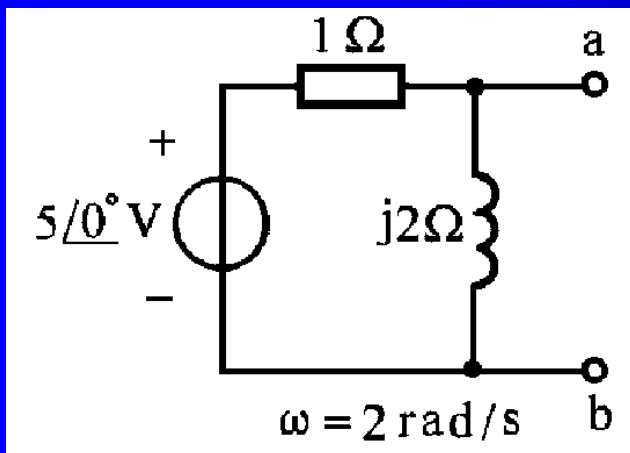


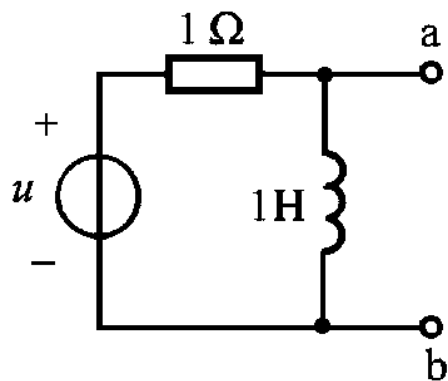
图 11-11(c)

$$\dot{U}_{oc} = \frac{j2}{1+j2} \times 5\angle 0^\circ = 2\sqrt{5}\angle 26.6^\circ \text{ V}$$

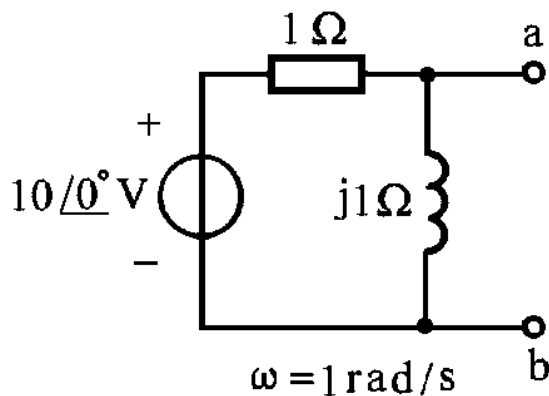
$$Z_o = \frac{j2}{1+j2} = (0.8 + j0.4)\Omega$$

当负载阻抗为 $Z_L = Z_o^* = (0.8 - j0.4)\Omega$ 时，含源单口网络输出的最大平均功率为

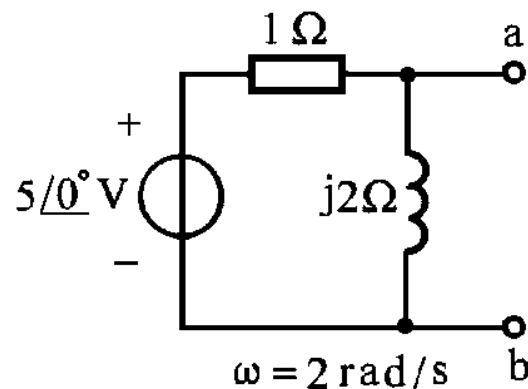
$$P_{2\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_o} = \frac{20}{4 \times 0.8} = 6.25 \text{ W}$$



(a)



(b)



(c)

3. 将不同频率成分正弦信号产生的平均功率叠加得到单口向外传输的最大平均功率为

$$P_{\max} = P_{1\max} + P_{2\max} = 25 + 6.25 = 31.25\text{ W}$$

你能够设计一个负载 $Z_L(j\omega)$ 来满足以上传输最大功率吗?

$$Z_o(j1) = (0.5 + j0.5)\ \Omega \quad Z_L(j1) = (0.5 - j0.5)\ \Omega$$

$$Z_o(j2) = (0.8 + j0.4)\ \Omega \quad Z_L(j2) = (0.8 - j0.4)\ \Omega$$

思考与练习

11-4-1 你能设计一个负载网络，使图11-11(a)所示单口网络输出最大平均功率吗？

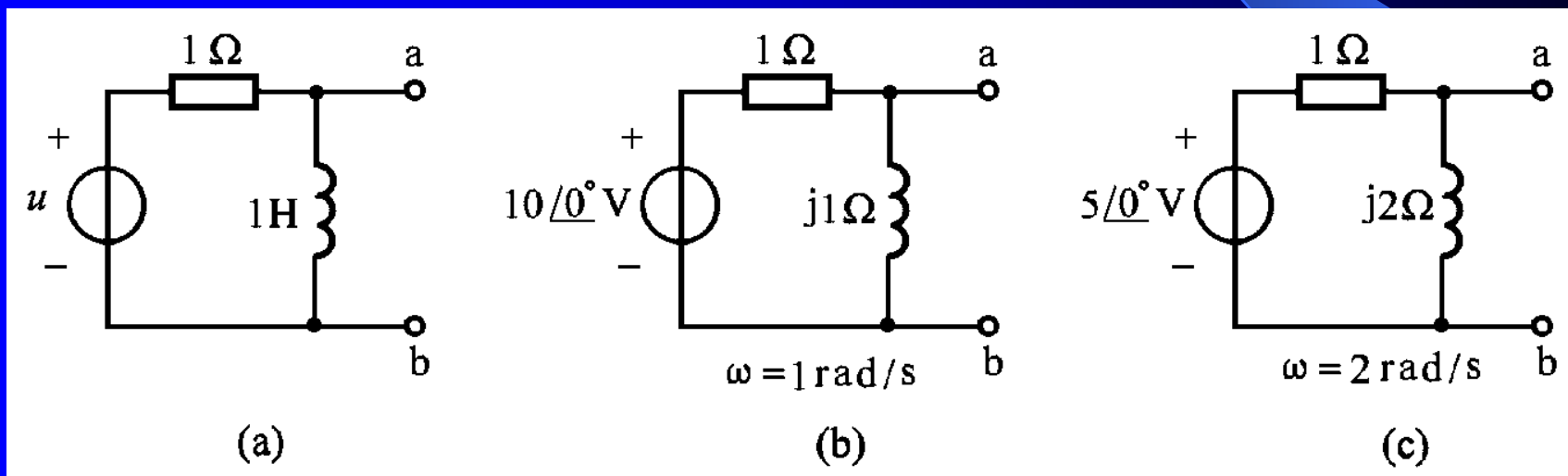


图 11-11

- 11-4-2 (1) 试计算图11-4-2(a)所示单口网络在任意角频率时的输出阻抗。
- (2) 试计算图11-4-2(b)所示单口网络在任意角频率时的等效阻抗，它与上面计算的输出阻抗有什么关系？
- (3) 你能说明图11-4-2(c)所示电路中，含源单口网络 N_1 在其正弦电压源 $u(t)$ 的频率为任何数值时，均能输出最大平均功率吗？

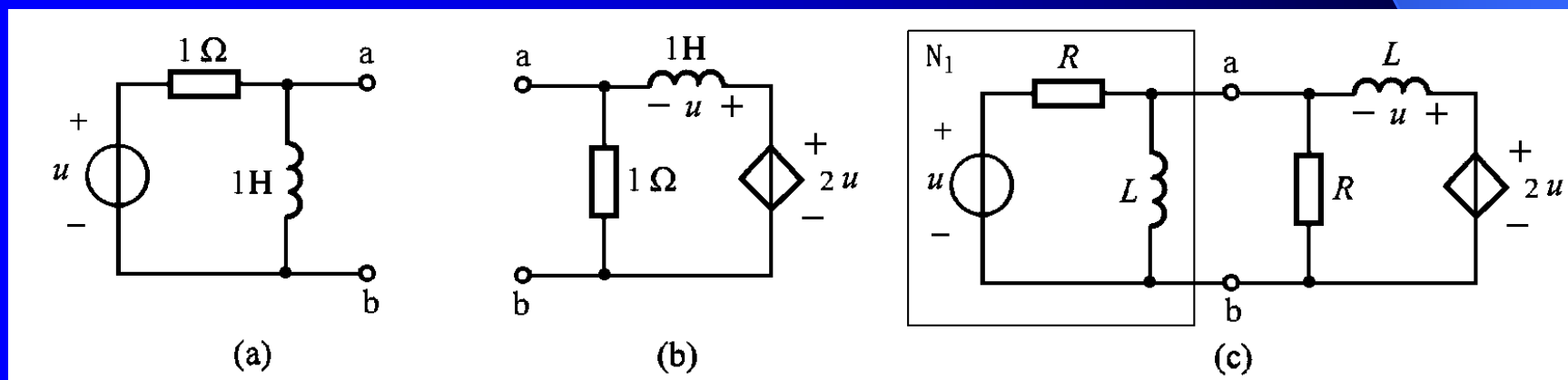


图 11-4-2

§ 11-5 三相电路

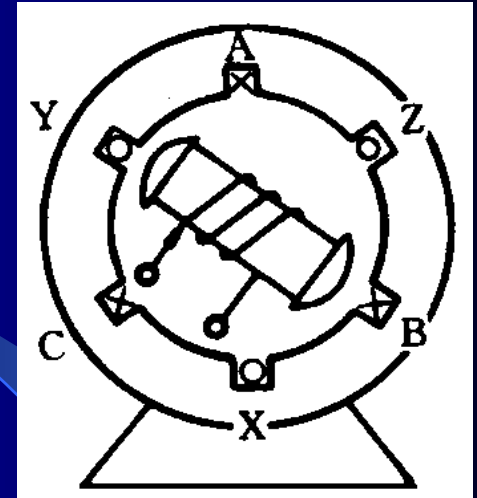
由三相电源供电的电路，称为三相电路。三相供电系统具有很多优点，为各国广泛采用。在发电方面，相同尺寸的三相发电机比单相发电机的功率大，在三相负载相同的情况下，发电机转矩恒定，有利于发电机的工作；在传输方面，三相系统比单相系统节省传输线，三相变压器比单相变压器经济；在用电方面，三相电容易产生旋转磁场使三相电动机平稳转动。

本节介绍三相电路的一些基本概念和简单三相电路的计算。

一、三相电源

三相供电系统的三相电源是三相发电机。右图是三相发电机的结构示意图，它有定子和转子两大部分。

定子铁心的内圆周的槽中对称地安放三个绕组AX、BY和CZ。A、B、C为首端；X、Y、Z为末端。三绕组在空间上彼此间隔 120° 。转子是旋转的电磁铁。它的铁心上绕有励磁绕组。选择合适的铁心端面形状和励磁绕组分布规律，使励磁绕组中通以直流时，产生在转子和定子间气隙中的磁感应强度，沿圆周按正弦规律分布。当转子恒速旋转时，AX、BY、CZ三绕组的两端将分别感应振幅相等、频率相同的三个正弦电压 $u_A(t)$ 、 $u_B(t)$ 、 $u_C(t)$ 。如果指定它们的参考方向都由首端指向末端，则它们的初相互相差 120° 。



若以 \dot{U}_A 作为参考相量，这三个电压相量为

$$\dot{U}_A = U_p \angle 0^\circ \quad \dot{U}_B = U_p \angle -120^\circ \quad \dot{U}_C = U_p \angle 120^\circ$$

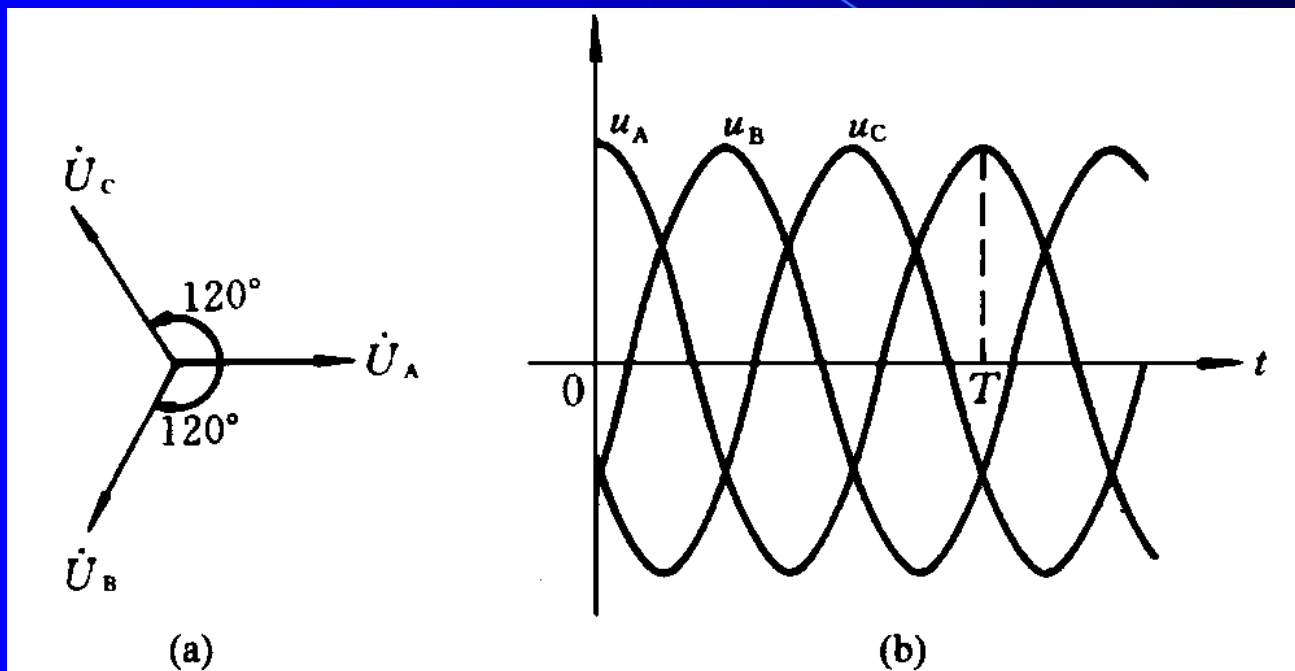
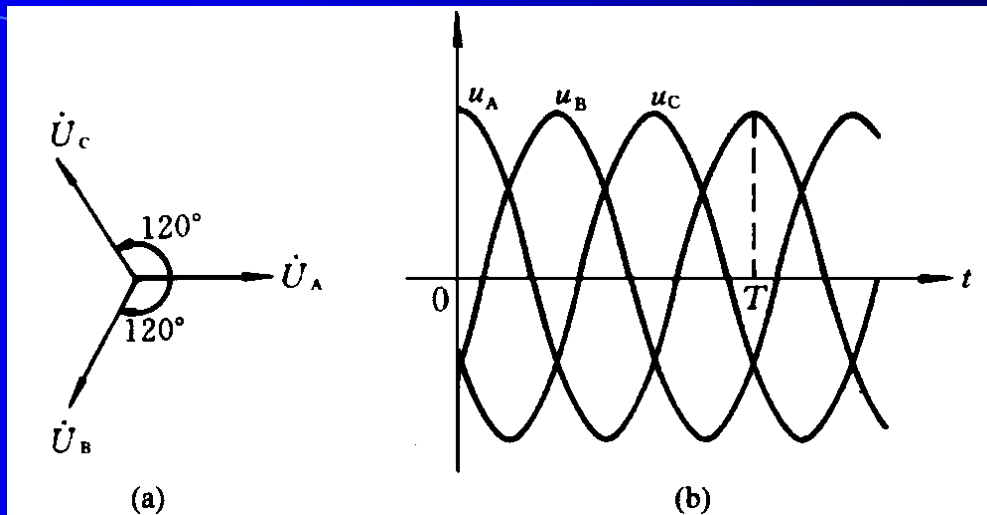


图11-13 对称三相电压源的相量图和波形图

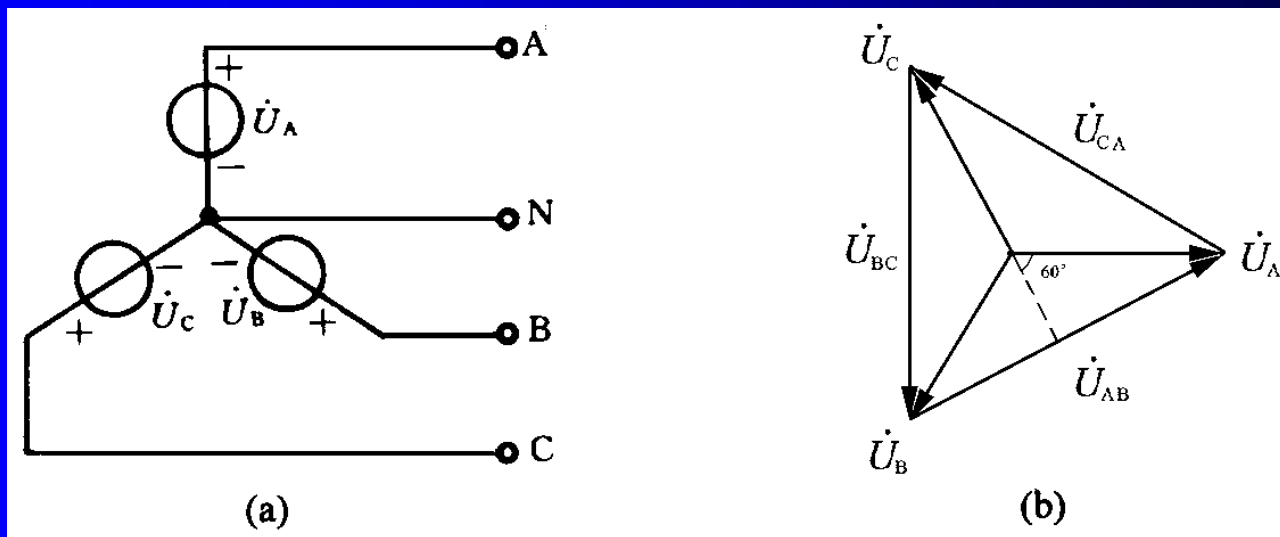
它们的相量图和波形图分别如图(a)、(b)所示。这样三个振幅相等、频率相同、相位差 120° 的一组正弦电源称为对称三相正弦电源。它们分别称为A相、B相和C相。



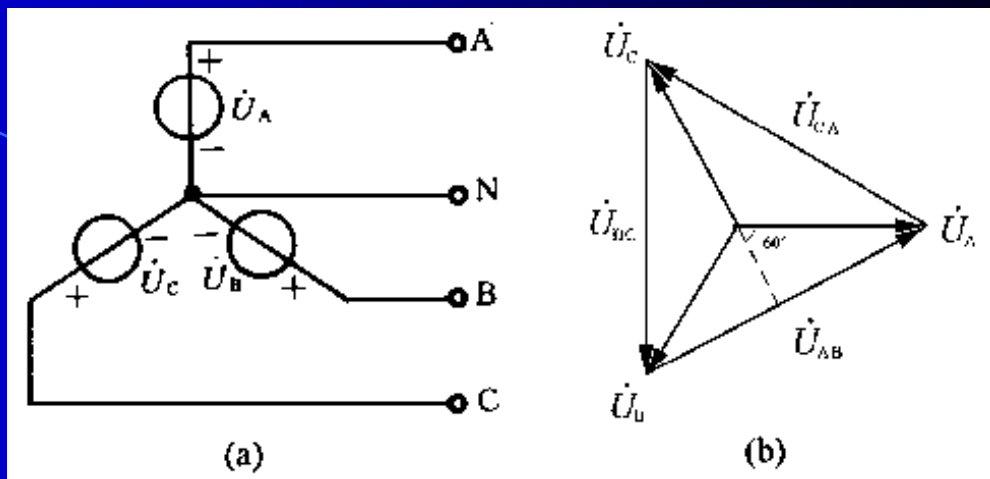
$$\dot{U}_A = U_p \angle 0^\circ \quad \dot{U}_B = U_p \angle -120^\circ \quad \dot{U}_C = U_p \angle 120^\circ$$

它们分别称为A相、B相和C相，每相的电压称为相电压。按照各相电压经过正峰值的先后次序来说，它们的相序是A、B、C，称为正序，如果各相电压到达正峰值的次序为 $u_A(t)$ 、 $u_C(t)$ 、 $u_B(t)$ ，称为负序。用户可以改变三相电源与三相电动机的连接方式来改变相序，从而改变三相电动机的旋转方向。

三相电源有两种基本联接方式：星形联接和三角形联接。星形联接(又称Y形联接)是将三相电源的末端 X、Y、Z接在一起，形成一个结点，记为 N，称为中性点或中点，将各相的首端 A、B、C以及中点N与四根输电线（分别称为相线和中线）联接，如图(a)所示。与传输线相联接的负载，可以从相线与中线之间得到三个相电压，用 \dot{U}_A 、 \dot{U}_B 、 \dot{U}_C 表示，也可以从三根相线之间得到三个线电压，用 \dot{U}_{AB} 、 \dot{U}_{BC} 、 \dot{U}_{CA} 表示。线电压与相电压之间的关系可以从图(b)相量图中计算出来。



$$\begin{aligned}\dot{U}_{AB} &= \dot{U}_A - \dot{U}_B = \sqrt{3}U_P \angle 30^\circ \\ \dot{U}_{BC} &= \dot{U}_B - \dot{U}_C = \sqrt{3}U_P \angle -90^\circ \\ \dot{U}_{CA} &= \dot{U}_C - \dot{U}_A = \sqrt{3}U_P \angle 150^\circ\end{aligned}$$



从上式可以看出，线电压是相电压的 $\sqrt{3}$ 倍，即 $U_l = \sqrt{3}U_p$ 。例如我们日常生活用电是220V相电压，相应的线电压则是380V。从相量图上可以看出，三个对称相电压以及三个对称线电压之间存在以下关系

$$\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0 \quad (11-19)$$

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0 \quad (11-20)$$

在星形联接中，流过相线的线电流等于流过每相电源的相电流，即 $I_l = I_p$

对称三相电源可以采用三角形联接(又称 Δ 联接),它是将三相电源各相的始端和末端依次相连,再由A、B、C引出三根相线与负载相连,如图11-15所示。

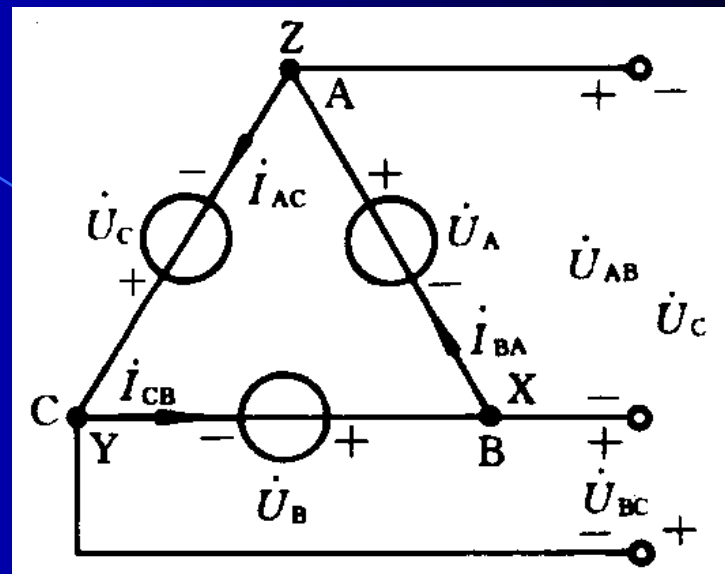
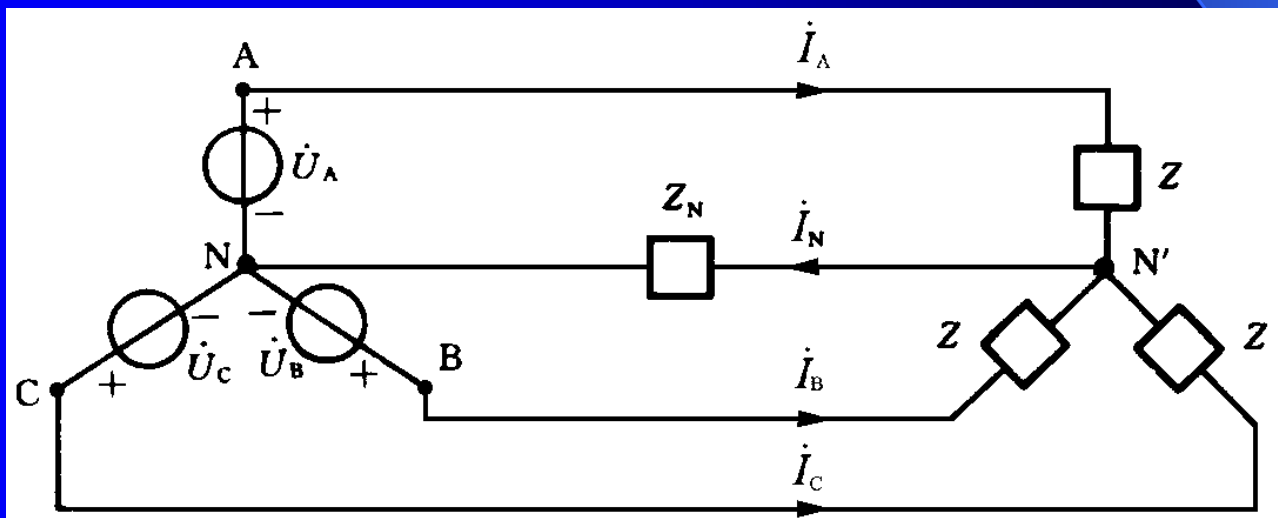


图11-15 三相电源的三角形联接

将三相电源作三角形联接时,要求三绕组的电压对称,如不对称程度比较大,所产生的环路电流将烧坏绕组。对称三相电源在 Δ 联接时,不能将各电源的始末端接错,否则将烧坏绕组。

二、Y-Y联接的三相电路

三相负载也有Y和 Δ 两种连接方式。下图表示Y形三相负载连接到Y形对称三相电源的情况。当三相负载相同时，即 $Z_A=Z_B=Z_C=Z$ 时，该电路是对称三相电路。



列出电路的结点方程，并代入 $\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0$

得到

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\frac{\dot{U}_A}{Z} + \frac{\dot{U}_B}{Z} + \frac{\dot{U}_C}{Z}}{\frac{3}{Z} + \frac{1}{Z_N}} = \frac{\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C}{\frac{3}{Z} + \frac{1}{Z_N}} = 0$$

由于 $\dot{U}_{N'N} = 0$ ，相当于中线短路，每相负载上的电压是相电压，其电流可以单独计算如下：

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z} = \frac{U_p}{|Z|} \angle -\varphi \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{Z} = \frac{U_p}{|Z|} \angle -\varphi - 120^\circ$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{Z} = \frac{U_p}{|Z|} \angle -\varphi + 120^\circ$$

例11-7 图11-16所示电路中，已知

$$u_A(t) = 220\sqrt{2} \cos 314t \text{ V}, Z = (10 + j10)\Omega$$

试求三相电流。

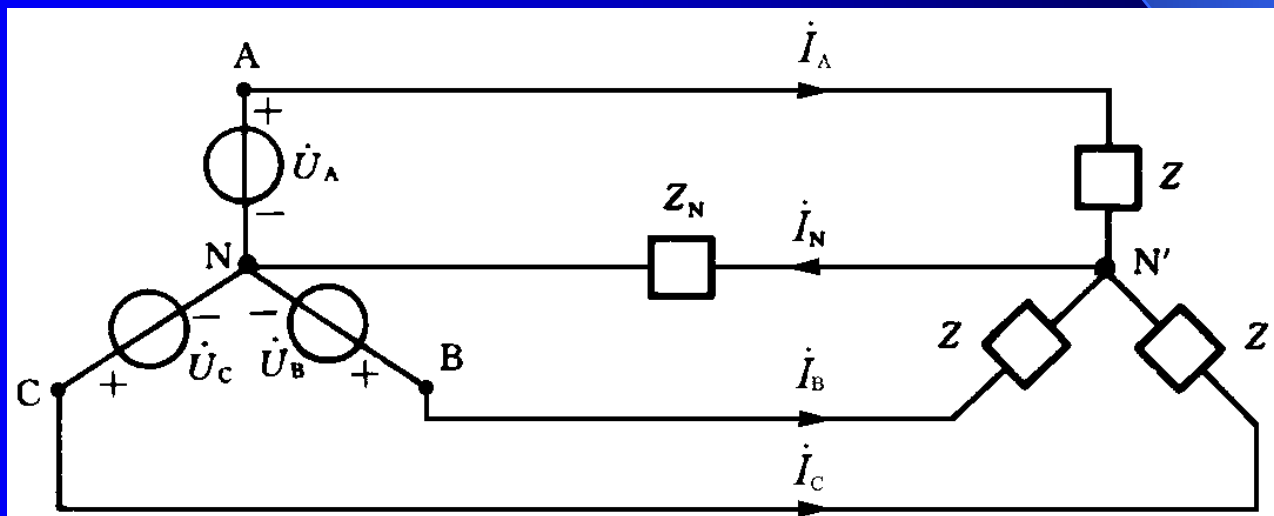


图11-16

解：由于 $\dot{U}_{\dot{N}N} = 0$ ，相当于中线短路，可以按单相电路计算出三相电流

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z} = \frac{220\angle 0^\circ}{10 + j10} = 15.56\angle -45^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{Z} = \frac{220\angle -120^\circ}{10 + j10} = 15.56\angle -165^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{Z} = \frac{220\angle 120^\circ}{10 + j10} = 15.56\angle 75^\circ \text{ A}$$

从以上分析计算可以看出，在Y-Y形联接的对称三相电路中，由于 $\dot{U}_{\dot{N}N} = 0$ ，中线电流为零，中线可以不用，可以只用三根相线传输(称为**三相三线制**)，适合于高压远距离传输电之用。

对于日常生活的低压用电，由于三相负载不完全对称，还有一定的中线电流存在，中线还必须保留，即采用**三相四线制供电系统**。假如不用中线，不对称三相负载的三相电压将不相同，过高的相电压可能损坏电气设备。

例如将例11-7中的C相负载阻抗变为 $Z_C=(2+j2)\Omega$ ，用正弦稳态电路的计算方法可以得到在不用中线时的三相电压为

$$\dot{U}_A = 303.1 \angle -21.05^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_B = 303.1 \angle -98.95^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_C = 94.29 \angle 120^\circ \text{ V}$$

由此可见，A相和B相的电压由220伏升高到303伏，这两相的电气设备可能损坏；B相的电压降低到94伏，使得C相的电气设备不能正常工作。

由此可知，在三相四线制供电系统中，保险丝绝对不能接在中线上，因为中线断开后，各相负载上的电压将随负载大小变化，过高的电压可能损坏电气设备。

从以上分析可以看出，在Y-Y联接的对称三相电路中，其负载电压电流关系为

$$U_l = \sqrt{3}U_p \quad I_l = I_p \quad (11-21)$$

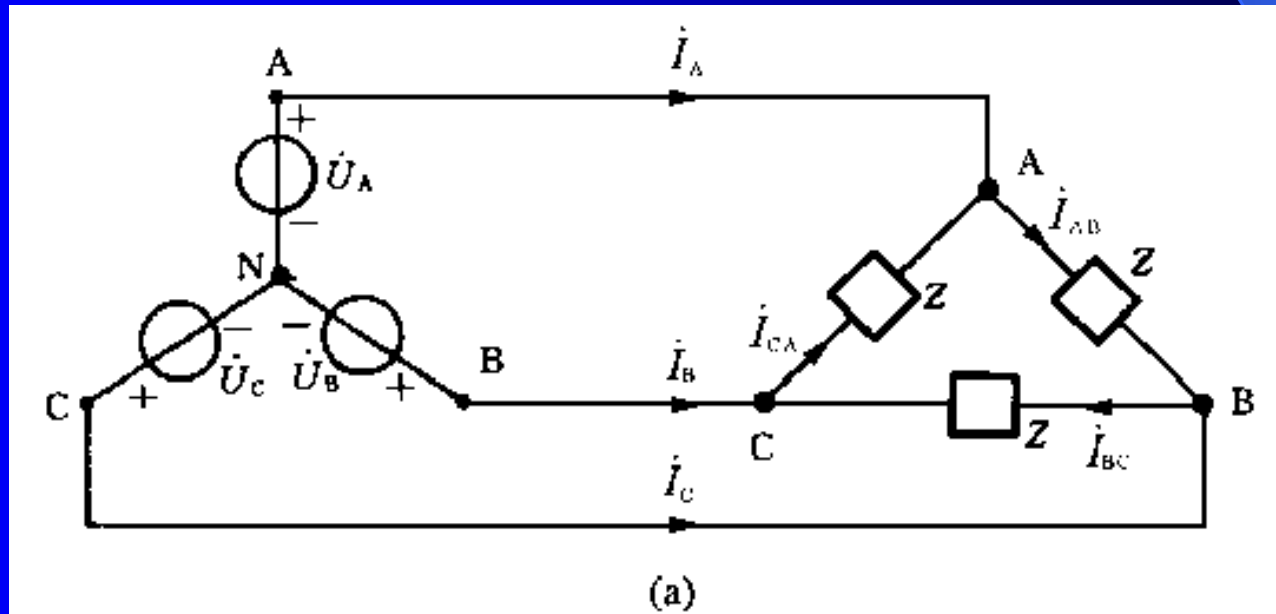
三、Y-Δ联接的三相电路

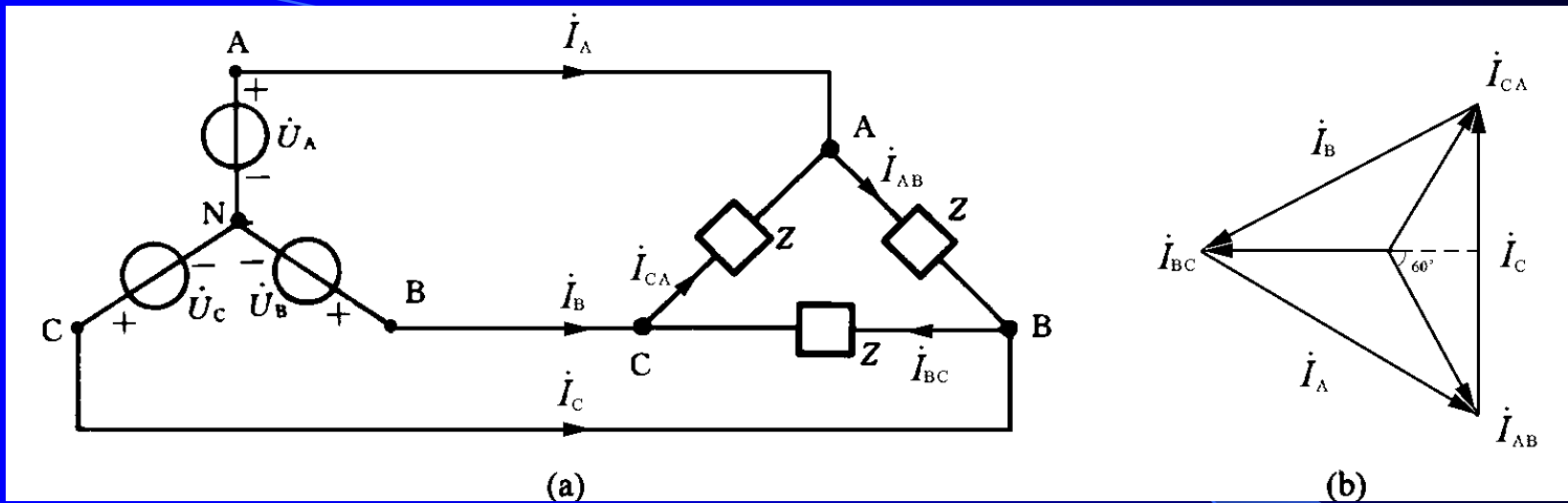
三相负载也可以按照三角形方式联接。图(a)表示Y形联接的对称三相电源和Δ联接的对称负载，这是一个对称三相电路。每相负载上的电压为线电压，其相电流为

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z} = \frac{U_l}{|Z|} \angle -\varphi$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z} = \frac{U_l}{|Z|} \angle -120^\circ - \varphi$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z} = \frac{U_l}{|Z|} \angle 120^\circ - \varphi$$





此时三根相线中的线电流为 $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = \sqrt{3}I_l \angle 30^\circ - \varphi$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = \sqrt{3}I_l \angle -90^\circ - \varphi$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = \sqrt{3}I_l \angle 150^\circ - \varphi$$

由此看出，Y- Δ 联接的对称三相电路中，线电流是相电流的 $\sqrt{3}$ 倍，即 $I_l = \sqrt{3}I_p$

例11-8 图11-17(a)所示电路中，已知

$$u_{AB}(t) = 220\sqrt{2} \cos 314t \text{ V}, \quad Z = 10\sqrt{2} \angle 60^\circ \Omega$$

试求相电流和线电流。

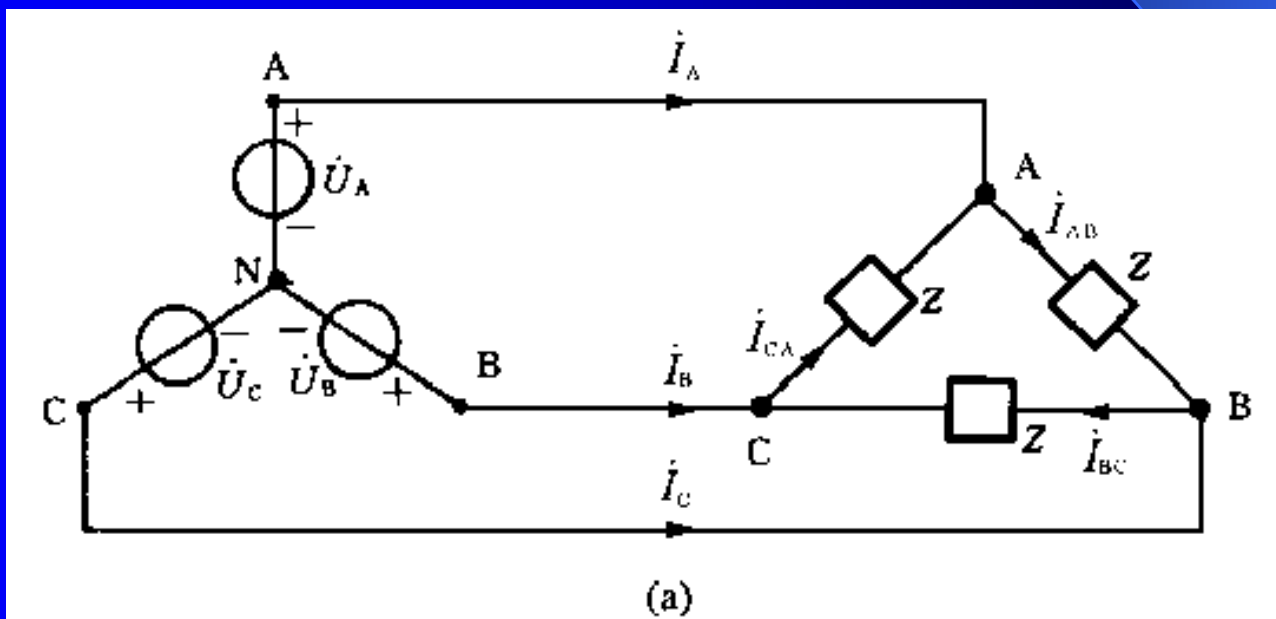


图11-17

解：三个相电流为

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z} = \frac{220\angle 0^\circ}{10\sqrt{2}\angle 60^\circ} = 15.56\angle -60^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z} = \frac{220\angle -120^\circ}{10\sqrt{2}\angle 60^\circ} = 15.56\angle 180^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z} = \frac{220\angle 120^\circ}{10\sqrt{2}\angle 60^\circ} = 15.56\angle 60^\circ \text{ A}$$

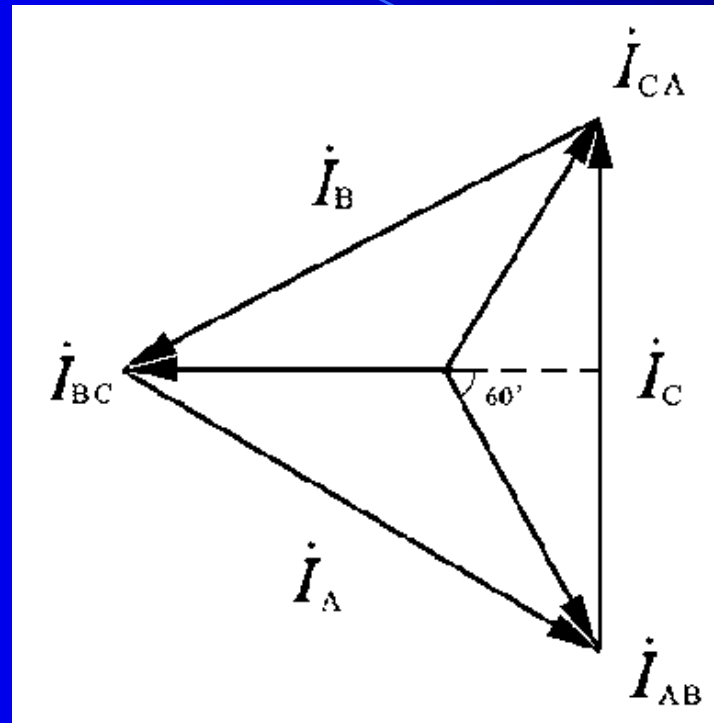
此时三个线电流为

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{BC} = 15.56\angle -60^\circ - 15.56\angle 180^\circ = 15.56\sqrt{3}\angle -30^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{CA} = 15.56\angle 180^\circ - 15.56\angle 60^\circ = 15.56\sqrt{3}\angle -150^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{AB} = 15.56\angle 60^\circ - 15.56\angle -60^\circ = 15.56\sqrt{3}\angle 90^\circ \text{ A}$$

相电流和线电流的相量图，如图(b)所示。



从以上分析可以看出，在Y-Δ对称联接时，其负载电压电流关系为

$$U_l = U_p \quad I_l = \sqrt{3}I_p \quad (11-22)$$

四、对称三相电路的功率

对称Y形联接负载吸收的总平均功率

$$P_Y = 3P_A = 3U_A I_A \cos \varphi = 3U_p I_p \cos \varphi$$

其中 $\cos \varphi$ 是功率因数， φ 是相电压与相电流的相位差， U_A 、 I_A 是相电压和相电流的有效值。由于线电压和线电流容易测量，注意到关系式 $U_l = \sqrt{3}U_p$ ， $I_l = I_p$ ，上式变为

$$P_Y = 3 \frac{U_l}{\sqrt{3}} I_l \cos \varphi = \sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi$$

用相似的方法，得到对称 Δ 形联接负载吸收的总平均功率

$$P_{\Delta} = 3P_{AB} = 3U_{AB}I_{AB} \cos\varphi = 3U_p I_p \cos\varphi = \sqrt{3}U_l I_l \cos\varphi$$

最后得到对称三相电路中三相负载吸收的平均功率的一般公式

$$P = 3U_p I_p \cos\varphi = \sqrt{3}U_l I_l \cos\varphi \quad (11-23)$$

在例11-7的电路中，

$$\dot{U}_A = 220\angle 0^\circ \text{ V}, \dot{I}_A = 15.56\angle -45^\circ \text{ A}$$

三相负载吸收的平均功率为

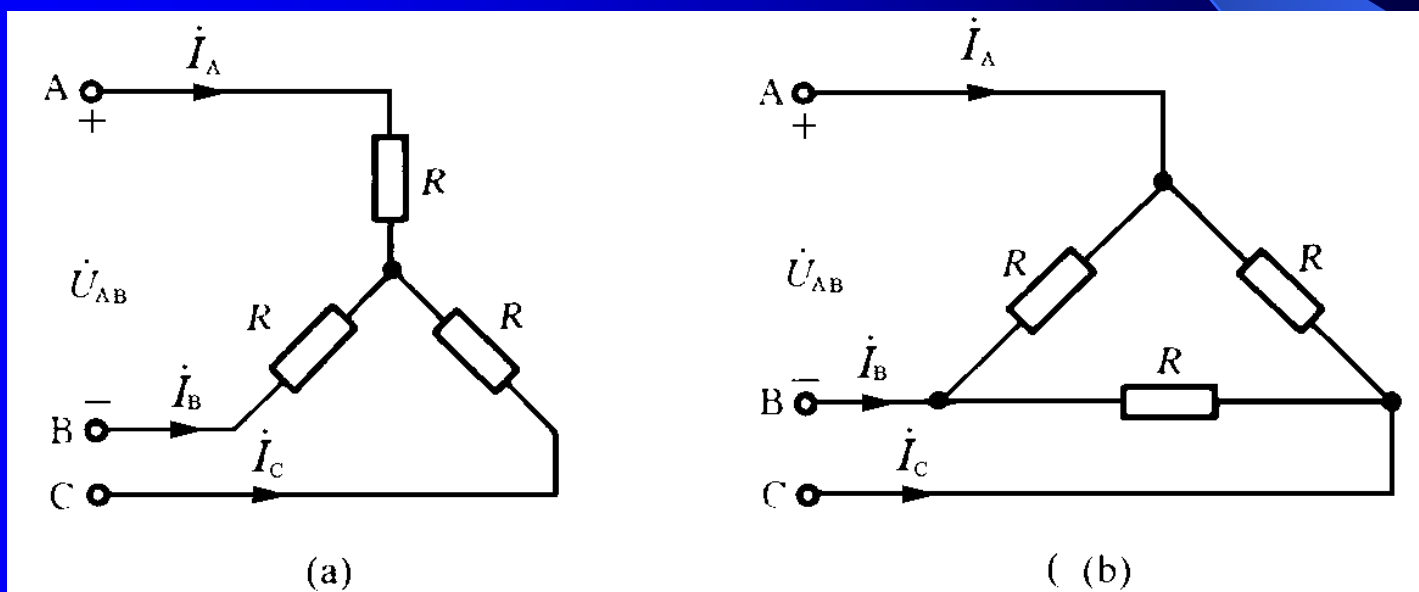
$$P = 3 \times 220 \times 15.56 \cos 45^\circ = 7262 \text{ W}$$

下面讨论对称三相电路的瞬时功率。

$$\begin{aligned} p(t) &= p_A(t) + p_B(t) + p_C(t) \\ &= U_{pm} I_{pm} \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) \\ &\quad + U_{pm} I_{pm} \cos(\omega t - 120^\circ) \cos(\omega t - 120^\circ - \varphi) \\ &\quad + U_{pm} I_{pm} \cos(\omega t + 120^\circ) \cos(\omega t + 120^\circ - \varphi) \\ &= U_p I_p [\cos\varphi + \cos(2\omega t - \varphi)] \\ &\quad + U_p I_p [\cos\varphi + \cos(2\omega t - 240^\circ - \varphi)] \\ &\quad + U_p I_p [\cos\varphi + \cos(2\omega t + 240^\circ - \varphi)] = 3U_p I_p \cos\varphi \end{aligned}$$

由于上式中的三项交变分量之和为零，三相瞬时功率是不随时间变化的常数，并且等于其平均功率。在这种情况下，三相电动机的转矩是恒定的，有利于发电机和电动机的工作，是三相电路的优点之一。

例11-9 三相电炉的三个电阻，可以接成星形，也可以接成三角形，常以此来改变电炉的功率。假设某三相电炉的三个电阻都是 43.32Ω ，求在 380V 线电压上，把它们接成星形和三角形时的功率各为多少？



解：1.三相负载为星形联接时，如图(a)所示，则线电流为

$$\begin{aligned} I_l &= I_p \\ &= \frac{U_p}{R} = \frac{380}{43.32} = 5.064 \text{ A} \end{aligned}$$

三相负载吸收的功率为

$$\begin{aligned} P_Y &= \sqrt{3}U_l I_l \cos\varphi \\ &= \sqrt{3} \times 380 \times 5.064 = 3333.02 \text{ W} \end{aligned}$$

2. 三相负载为三角形联接时，如图(b)所示，则相电流为

$$I_p = \frac{U_p}{R} = \frac{U_l}{R} = \frac{380}{43.32} = 8.7719 \text{ A}$$

线电流为

$$I_l = \sqrt{3}I_p = \sqrt{3} \times 8.7719 = 15.193 \text{ A}$$

三相负载吸收的功率为

$$P_{\Delta} = \sqrt{3}U_l I_l = \sqrt{3} \times 380 \times 15.193 = 10000 \text{ W} = 10 \text{ kW}$$

通过以上计算表明，三相电炉连接成三角形吸收的功率是连接成星形时的三倍。