信号与系统

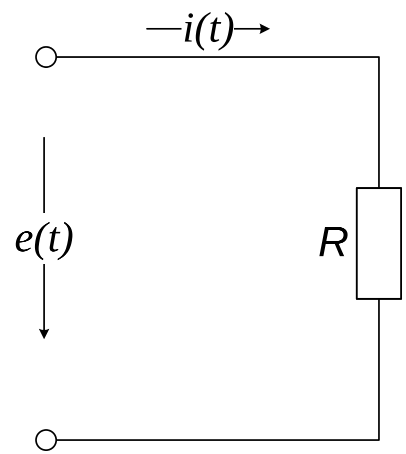
第二章 *LTI*连续时间系统的时域分析

第二章 *LTI*连续时间系统的时域分析

- §2.1 系统的数学模型
- §2.2 *LTI*系统的响应
- §2.3 *LTI*系统的冲激响应与阶跃响应
- §2.4 卷积

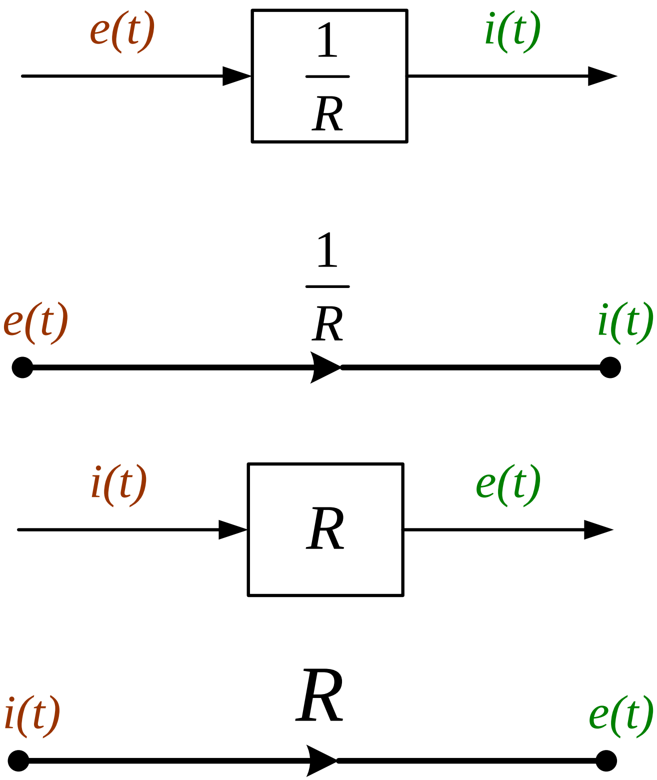
§ 2.1 系统的数学模型

- 1. *R.L.C*上的*e(t)~i(t)*
  - (1)



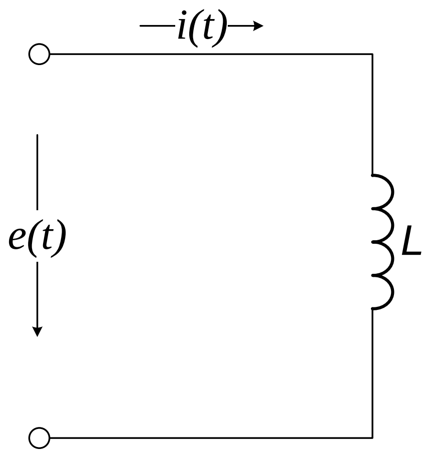
$$i(t)=\frac{1}{R}e(t)$$

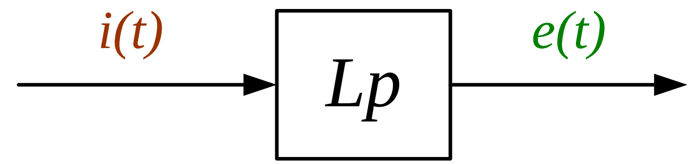
$$e(t)=Ri(t)$$

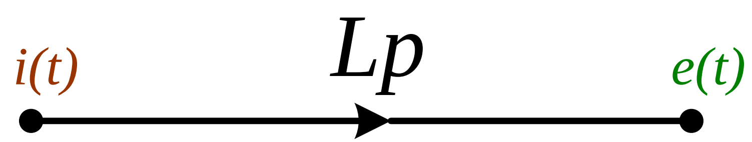


§2.1系统的数学模型

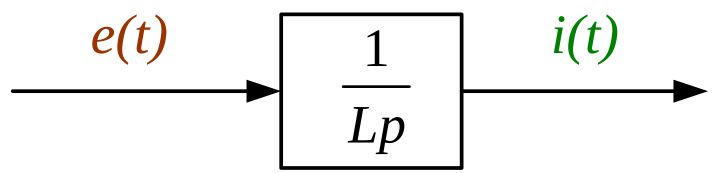
– (2)



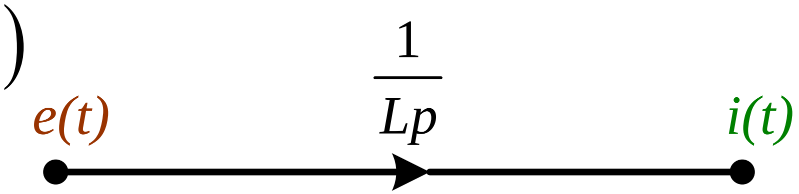




$$e(t)=L\frac{di(t)}{dt}=Lpi(t)$$

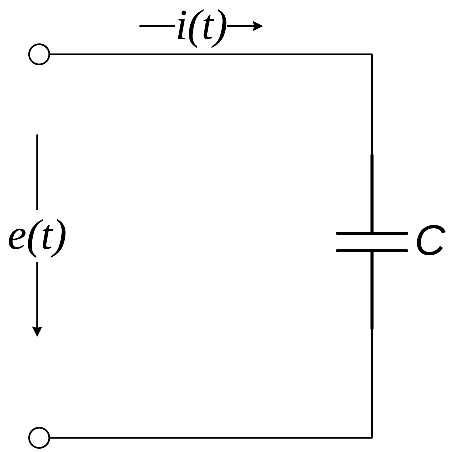


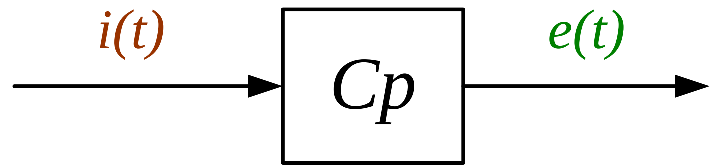
$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} e(\tau)d\tau=\frac{1}{Lp}e(t)$$

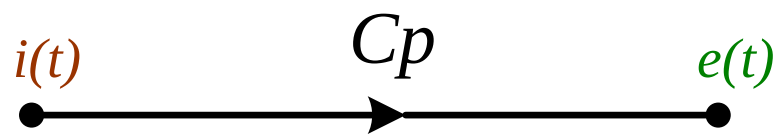


§ 2.1系统的数学模型

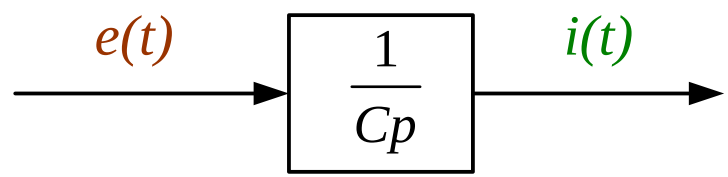
– (3)



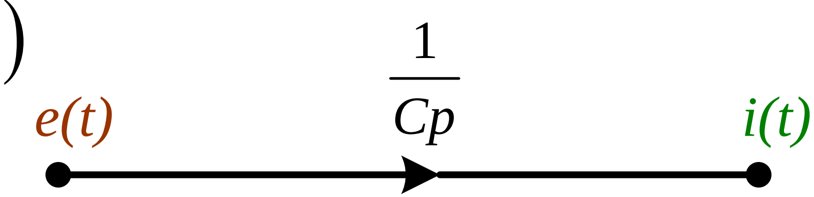




$$i(t) = C\frac{de(t)}{dt} = Cpe(t)$$

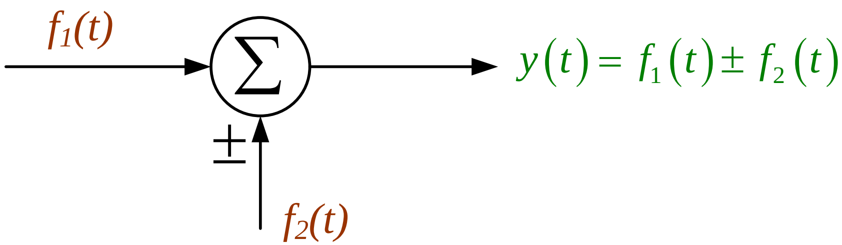


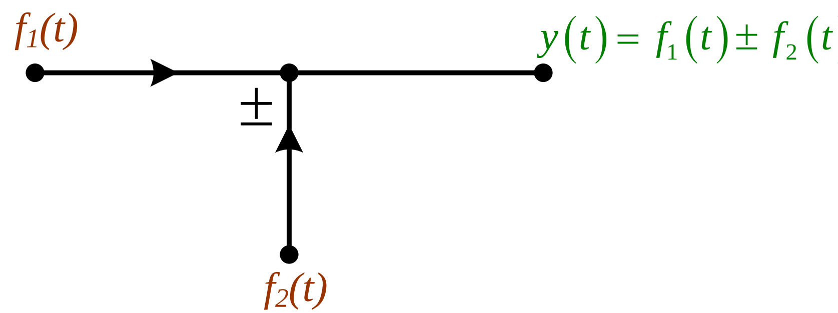
$$e(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau = \frac{1}{Cp}i(t)$$



§2.1系统的数学模型

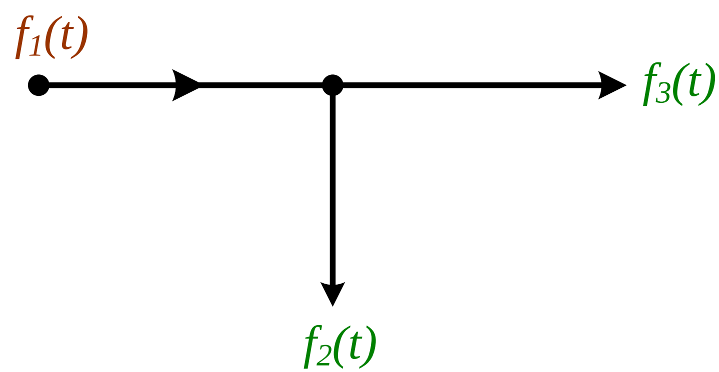
– (4)求和 $y(t) = f_1(t) \pm f_2(t)$





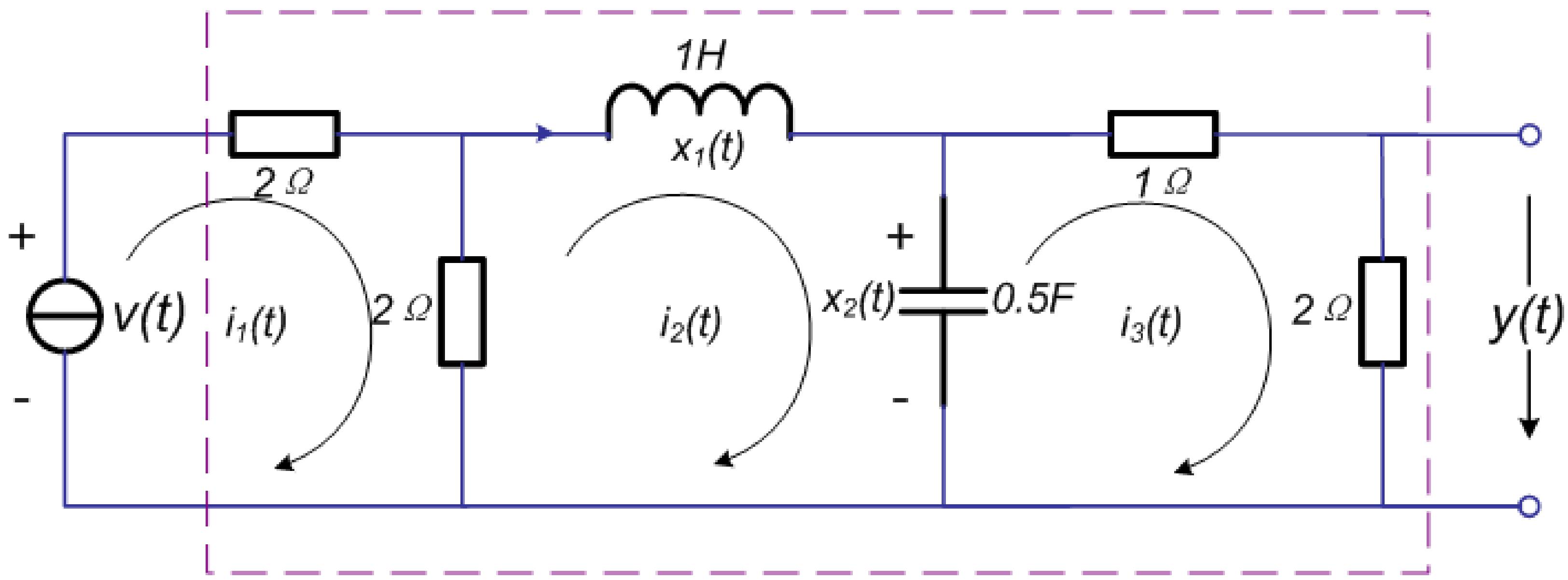
– (5)分支

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t)$$



§2.1系统的数学模型

- 2. *LTI*连续时间系统的状态空间模型
- 例1.



问题(1) $y(t)$~$v(t)$； (2)$x_1(t),x_2(t)$~$v(t)$

§2.1系统的数学模型

– 解：

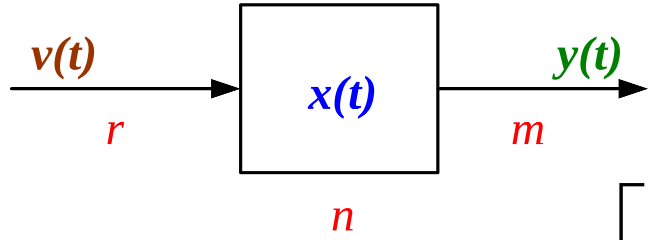
$$\begin{cases} v(t) = 4i_1(t) - 2i_2(t) \\ x_1(t) = i_2(t) \\ \dfrac{1}{2}\dot{x}_2(t) = i_2(t) - i_3(t) \\ \dot{x}_1(t) + x_2(t) + 2\left[i_2(t) - i_1(t)\right] = 0 \\ x_2(t) - 3i_3(t) = 0 \\ y(t) = 2i_3(t) \end{cases}$$

§2.1系统的数学模型

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} v(t) \cdots\cdots \text{状态方程} \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0 \times v(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{观测方程} \end{cases}$$

§2.1系统的数学模型

- 状态空间模型



输入向量

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})=\begin{bmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ v_r(t) \end{bmatrix} \in L_r^2[t_0,t_\alpha]$$

输出向量

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \in L_m^2[t_0,t_\alpha]$$

状态向量

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in L_n^2[t_0,t_\alpha]$$

状态向量

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})=\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} \in L_n^2[t_0,t_\alpha]$$

§ 2.1系统的数学模型

- $$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = A_{n\times n}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + B_{n\times r}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) \cdots\cdots\cdots\cdots \text{状态方程} \\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = C_{m\times n}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + D_{m\times r}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) \cdots\cdots\cdots\cdots \text{观测方程} \end{cases}$$

状态的零输入响应　　状态的零状态响应

- 解 $$\begin{cases} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = e^{At}\boldsymbol{x_0} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\boldsymbol{v}(\tau)d\tau \\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = Ce^{At}\boldsymbol{x_0} + \int_0^t \left[Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)\right]\boldsymbol{v}(\tau)d\tau \end{cases}$$

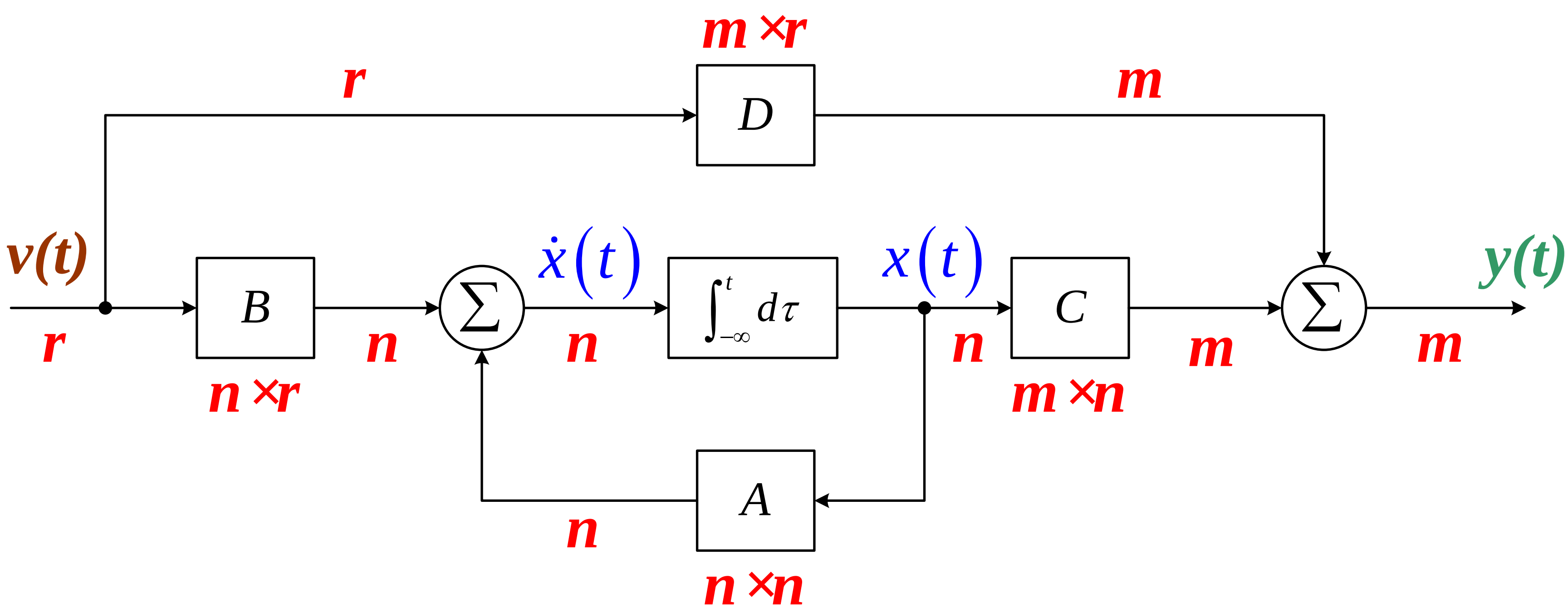
输出的零输入响应　　输出的零状态响应

其中 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\big|_{t=0} = \boldsymbol{x_0}$

$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})u(t) \cdots\cdots$ 因果信号

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \ldots\ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k x^k$$

§2.1系统的数学模型



§2.1系统的数学模型

- 状态：定义能够完全表征系统时域动力学行为的一组最小的内部变量组为状态。
- 物理上，状态的维数

  dim $\boldsymbol{x}(t)$=系统中独立储能元件的个数
- 状态的选择不唯一。
  – 注：电容或电感的直接串联和并联的元件不独立，电压源断路，电流源短路，串并联简化不了的储能元件的个数。

§2.1系统的数学模型

- 3. *LTI* 系统的微分方程模型
  - 对一个有n个独立储能元件的单输入单输出（*SISO*）有：

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y^{(0)}(t)$$
$$=b_mv^{(m)}(t)+b_{m-1}v^{(m-1)}(t)+\ldots+b_1v^{(1)}(t)+b_0v^{(0)}(t)$$

已知：$v(t)$，$y(0),\ldots,y^{(n-1)}(0)$，求$y(t)=?$

－ $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0})=\left[x_1(0),x_2(0),\ldots,x_n(0)\right]^T$ 与$\left\{y(0),\cdots,y^{(n-1)}(0)\right\}$

一般为线性变换

－ $t\in[0,\infty)$ 因果性

§2.1系统的数学模型

- 4. *LTI* 系统的系统算子模型

– 令$p=\dfrac{d}{dt},\dots,p^n=\dfrac{d^n}{dt^n}$

$$\left[p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\dots+a_1p+a_0\right]y(t)=\left[b_mp^m+\dots+b_1p+b_0\right]v(t)$$

– 令$D(p)\triangleq p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\dots+a_1p+a_0$

$$N(p)\triangleq b_mp^m+\dots+b_1p+b_0$$

有：$y(t)=\dfrac{N(p)}{D(p)}v(t)\triangleq H(p)v(t)$

其中，$H(p)=\dfrac{N(p)}{D(p)}$为系统算子。

§2.1系统的数学模型

– 注：
  - 1. $D(p)$与$N(p)$的公因式一般不可相消。
  - 2. $\dfrac{1}{p}$与p一般不可交换。
  - 3.对于不同的物理系统，其输入－输出方程可能相同。

可对$H(p)$进行因式分解，其基本单元：

$$\frac{1}{p+\alpha}v(t) \underset{\text{零状态}}{=\!=} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}v(\tau)d\tau = e^{-\alpha t} * v(t)$$

§2.2 *LTI*系统的响应

- 1. $y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)=$

  $b_mv^{(m)}(t)+\cdots+b_1v^{(1)}(t)+b_0v(t)$

- 讨论$\left[0,+\infty\right)$时间内的系统输出

- 起始状态（0_-状态）：$\left[y(0_-),\ldots,y^{(n-1)}(0_-)\right]^T$ 或$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0}_-)$

- 初始状态（0_+状态）：$\left[y(0_+),\ldots,y^{(n-1)}(0_+)\right]^T$ 或$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0}_+)$

- 一般情况下 $\boldsymbol{y(0_-)\neq y(0_+)}$

§ 2.2 *LTI*系统的响应

- 零输入（***Zero Input***）响应$y_{zi}(t)$:

  激励信号$v(t)\equiv 0$,由***y(0₋)***产生的响应

- 零状态（***Zero State***）响应$y_{zs}(t)$:

  系统储能作用$\boldsymbol{y(0_-)}=0$,由$v(t)$=$v(t)u(t)$产生的响应

- 对$y_{zi}(t): y_{zi}(0_-)=y_{zi}(0_+)$

  （$\because$ 储能元件的演化是连续的）

- 对$y_{zs}(t): y_{zs}(0_-)\neq y_{zs}(0_+)=0$

  （$\because$ 有信号加入，产生跳变）

§2.2 *LTI*系统的响应

- 2.如何求$y_{zi}(t)$?

$$D(p)y(t)=0$$

$$\Updownarrow$$

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)=0$$

  – 互异特征根$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$（无重根）

$$y_{zi}(t)=\sum_{i=1}^{n}A_ie^{\alpha_i t}u(t)\Big|_{y(0_-)=y(0_+)}$$

§ 2.2 *LTI*系统的响应

- 3.零状态响应

$$\boldsymbol{y(0_-)} = 0, v(t) = v(t)u(t) \neq 0,\ D(p)y(t) = N(p)v(t)$$

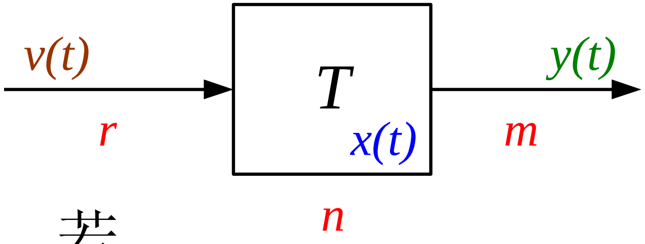
$$y_{zs}(t) = \frac{N(p)}{D(p)}v(t) \triangleq H(p)v(t) = \frac{N(p)}{\prod_{i=1}^{n}(p-\alpha_i)}v(t)$$

$$= N(p)[e^{\alpha_n t} * \cdots * e^{\alpha_1 t} * v(t)] \qquad （\alpha_i\text{互异}）$$

$$y_{zs}(t) = \text{齐次解}\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\alpha_i t} + \text{特解}B(t)$$

– 特解*B(t)*反映系统输入对输出的强迫

§ 2.2 *LTI*系统的响应



- 4.非零状态线性系统
  - 定义（非零状态线性系统）：对T，若

$$\begin{cases}\{x_1(0_-),v_1(t)\}\Rightarrow\{x_1(t),y_1(t)\}\\ \{x_2(0_-),v_2(t)\}\Rightarrow\{x_2(t),y_2(t)\}\end{cases}\quad \text{则}$$

$$\alpha\{x_1(0_-),v_1(t)\}+\beta\{x_2(0_-),v_2(t)\}\Rightarrow\alpha\{x_1(\mathrm{t}),y_1(t)\}+\beta\{x_2(\mathrm{t}),y_2(t)\}$$

称T为非零状态线性系统。

  - 推论：线性系统响应＝ <u>零状态响应</u> ＋ <u>零输入响应</u>

说明：

$$\{x_1(t),y_1(t)\}+\{x_2(t),y_2(t)\}$$

$$\{x(0_-),v(t)\}=\{\boldsymbol{0}_n+x(0_-);v(t)+\boldsymbol{0}_r\}=\{\boldsymbol{0}_n,v(t)\}+\{x(0_-),\boldsymbol{0}_r\}$$

§2.2 *LTI*系统的响应

- 5. 自由响应和强迫响应

$$\text{系统响应}=\underbrace{\text{齐次解}\sum_{i=1}^{n}A_i e^{\alpha_i t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{\text{特解}B(t)}_{\text{强迫响应}}\Big|_{\text{带入}\,y(0_-)\neq y(0_+)\neq 0}\qquad t\geq 0$$

§ 2.3*LTI*系统的冲激响应与阶跃响应

- 冲激响应*h(t)*：输入为单位冲激函数时的零状态响应。

$$h(t)=T\delta(t)$$

- 阶跃响应$y_{step}(t)$：输入为单位阶跃函数时的零状态响应。

$$y_s(t)=Tu(t)$$

- $h(t)$与$y_s(t)$关系：

$$y_s(t)=Tu(t)=T\frac{1}{p}\delta(t)\underset{=\!=\!=}{\text{零状态}}\frac{1}{p}T\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t)dt$$

$$h(t)=T\delta(t)=Tpu(t)\underset{=\!=\!=}{\text{零状态}}pTu(t)=py_s(t)=\frac{d}{dt}y_s(t)$$

§2.3*LTI*系统的冲激响应与阶跃响应

- 如何求*h(t)*？

$$y_{zs}(t)=H(p)v(t)=\frac{N(p)}{D(p)}v(t),\ \ v(t)=\delta(t),h(t)=\frac{N(p)}{D(p)}\delta(t)$$

$$\text{degree}\,N(p)=\text{degree}\,D(p)+q$$

一 $H(p)=\dfrac{N(p)}{D(p)}=\beta_q p^q+\beta_{q-}p^{q-1}+\ldots+\beta_1 p+\beta_0+\dfrac{E(p)}{D(p)}$

$$=\sum_{i=0}^{q}\beta_i p^i+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{p-\alpha_j}\qquad (D(p)=\prod_{j=1}^{n}(p-\alpha_j))$$

一 $h(t)=H(p)\delta(t)=\sum_{i=0}^{q}\beta_i\delta^{(i)}(t)+\sum_{j=1}^{n}b_j e^{\alpha_j t}u(t)$

§2.4 卷积

- 对任意两个信号 $f_1(t)$、$f_2(t)$，两者的卷积运算定义为：

$$f_1(t) * f_2(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

- 性质
  - 代数性质
  - 拓扑性质

设 $\forall f(t), g(t), h(t) \in L^1(\Omega)$，$L^1(\Omega)$绝对可积函数集合

§2.4 卷积

- 代数性质
  - $f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$（可交换性）
  - $f(t)*\{g(t)*h(t)\}=\{f(t)*g(t)\}*h(t)$（可结合性）
  - $\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}*h(t)=\alpha f(t)*h(t)+\beta g(t)*h(t)$（线性）
  - 定义$\|f(t)\|_1=\int_\Omega |f(t)|dt$为$f(t)$的$L^1$范数

$$\|f(t)*g(t)\|_1 \le \|f(t)\|_1 \|g(t)\|_1$$

  - $f(t)*\delta(t)=f(t)$
  - $\int_\Omega |\delta(t)|dt=\int_\Omega \delta(t)dt=1$
  - $\delta(t)$既非黎曼可积,亦非勒贝格可积。

§ 2.4 卷积

- 拓扑性质

  - $$\frac{d}{dt}[f(t)*g(t)]=[\frac{d}{dt}f(t)]*g(t)=f(t)*[\frac{d}{dt}g(t)]$$

  - $$\int_{-\infty}^{t}[f(\lambda)*g(\lambda)]d\lambda=f(t)*[\int_{-\infty}^{t}g(\lambda)d\lambda]=[\int_{-\infty}^{t}f(\lambda)d\lambda]*g(t)$$

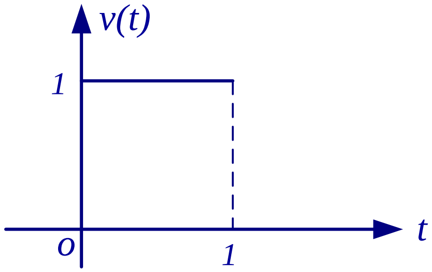
  - $$f(t)*\delta^{'}(t)=f^{'}(t)$$

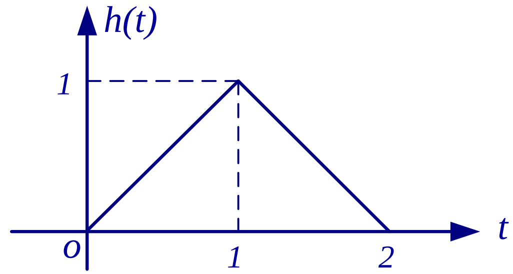
    $$f(t)*\delta^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)$$

  - $$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau=\frac{1}{p}f(t)$$

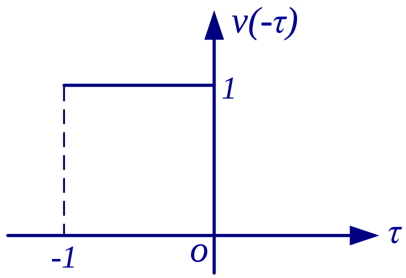
§ 2.4 卷积

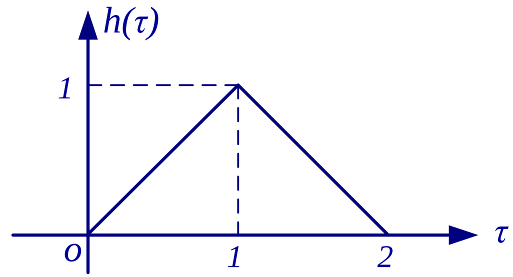
- 例

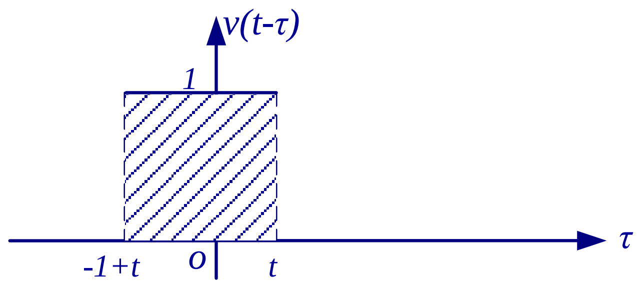




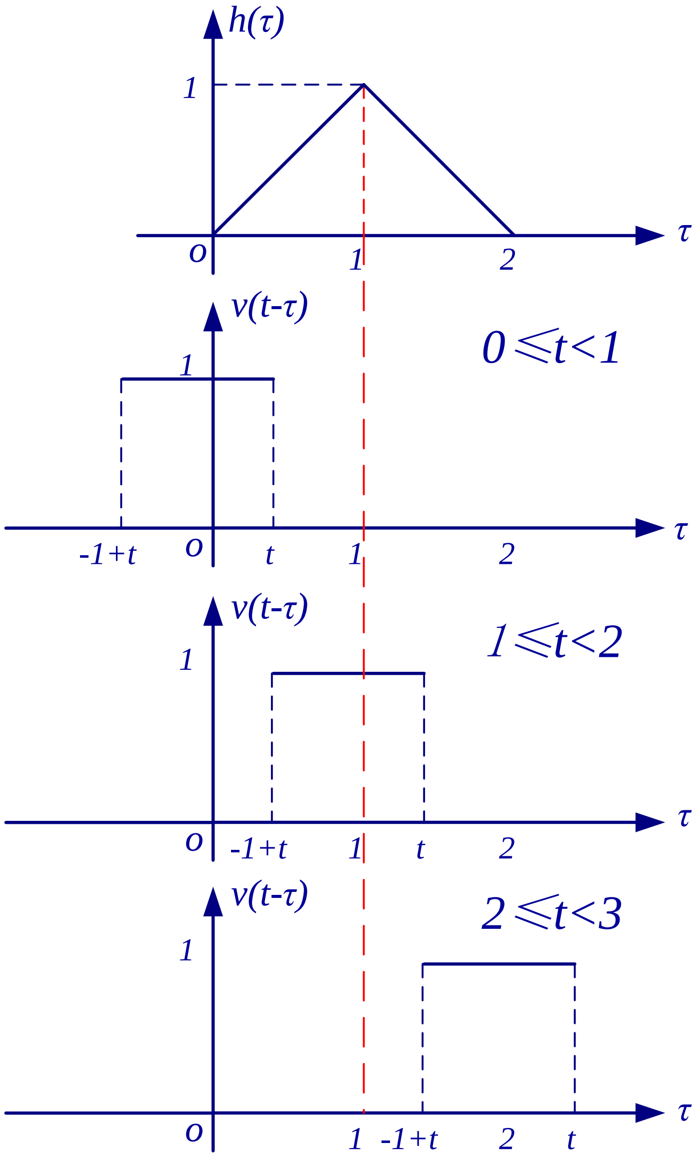
$$y(t) = v(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) v(t-\tau) d\tau$$







§ 2.4 卷积



$$y(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2, 0\le t<1\\ -\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}, 1\le t<2\\ \frac{1}{2}(t-3)^2, 2\le t<3\\ 0, \text{其它}\end{cases}$$