信号与系统

第四章 信号的谱表示

第四章 信号的谱表示

- §4.1 $L^1[t_0, t_\alpha]$上的傅里叶级数
- §4.2 典型周期信号的谱
- §4.3 $L^1(-\infty, \infty)$上函数的傅里叶变换
- §4.4 傅里叶变换的性质
- §4.5 周期信号的傅里叶变换

Chapter 4 信号的谱表示

- §4.6 采样定理
- §4.7 傅里叶变换的渐近性质
- §4.8 相关函数与谱分析
- §4.9 匹配滤波器
- §4.10 等效带宽、等效时宽、Heisenberg 测不准原理

§ 4.1 $\mathrm{L}^1[t_0,t_\alpha]$上的傅里叶级数

- 1. $\mathrm{L}^1[t_0,t_\alpha]=\left\{f(t)\mid\int_{t_0}^{t_\alpha}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty\right\}$

  $[t_0,t_\alpha]$上绝对可积函数全体

- 2. Dirichlet条件：$\forall f(t),t\in[t_0,t_0+T]$

  -1) $\int_{t_0}^{t_0+T}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty$, $f(t)\in\mathrm{L}^1[t_0,t_0+T]$

  -2) $f(t)$在$[t_0,t_0+T]$上具有有限个极大值、极小值

  -3) $f(t)$在$[t_0,t_0+T]$上具有有限个第一类间断点

§ 4.1 $\mathrm{L}^1\left[t_0,t_\alpha\right]$上的傅里叶级数

- 3.三角函数形式的傅里叶级数
  - (1) 三角函数集

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\omega t,\sin\omega t,\cdots,\cos n\omega t,\sin n\omega t,\cdots\right\}$$

$$\triangleq\left\{\phi_0\left(t\right),\phi_1\left(t\right),\cdots,\phi_n\left(t\right),\cdots\right\}$$

是$\mathrm{L}^2\left[t_0,t_0+T\right]$上完备正交集, $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$

$$\left\langle\phi_i\left(t\right),\phi_j\left(t\right)\right\rangle\triangleq\int_{t_0}^{t_0+T}\phi_i\left(t\right)\phi_j\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{T}{2}\delta_{ij}$$

§ 4.1 $\mathrm{L}^1[t_0, t_\alpha]$上的傅里叶级数

– (2) $\forall f(t) \in \mathrm{L}^1[t_0, t_0+T] \supset \mathrm{L}^2[t_0, t_0+T]$, $f(t)$ 的傅里叶级数为

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad t \in [t_0, t_0+T]$$

其中 $$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{\langle f(t), \quad \cos n\omega t\rangle}{\langle \cos n\omega t, \quad \cos n\omega t\rangle}$$

$$b_n = \frac{\langle f(t), \quad \sin n\omega t\rangle}{\langle \sin n\omega t, \quad \sin n\omega t\rangle}$$

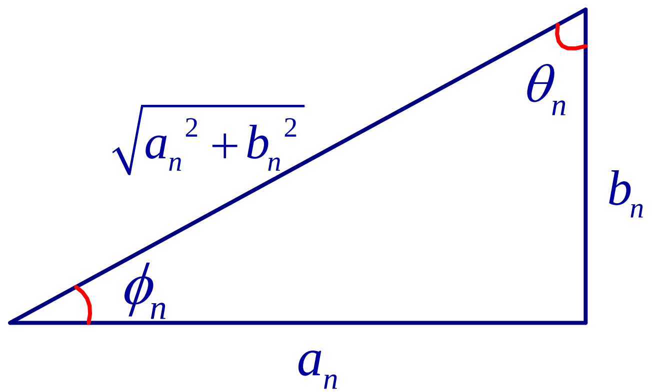
§ 4.1 $L^1[t_0,t_\alpha]$上的傅里叶级数

– (3)

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{a_n}{\left(a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}\right)^{\frac{1}{2}}}\cos n\omega t+\frac{b_n}{\left(a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}\right)^{\frac{1}{2}}}\sin n\omega t\right]$$

$$= c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\left(n\omega t-\phi_n\right)$$

$$= d_0+\sum_{n=1}^{\infty}d_n\sin\left(n\omega t+\theta_n\right)$$



其中：

$$\mathrm{tg}\phi_n=\frac{b_n}{a_n},\ \mathrm{tg}\theta_n=\frac{a_n}{b_n},\ a_0=c_0=d_0,\ c_n=d_n=\sqrt{a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}}$$

§ 4.1 $L^1[t_0,t_\alpha]$上的傅里叶级数

注：

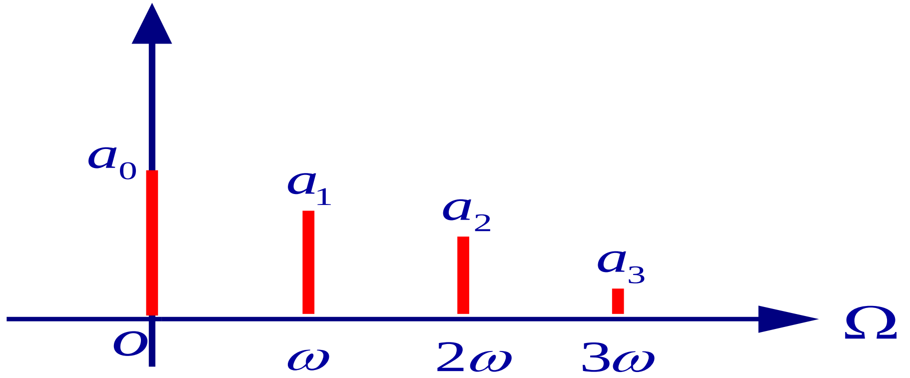
– 1. a_n,b_n,c_n,d_n是$n\omega$的函数, $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$

物理含义：第n次谐波的幅度

– 2. $-\phi_n,\theta_n$ 为第n次谐波的相位

– 3. $a_0=c_0=d_0$为直流分量

– 4. 离散幅度谱



§ 4.1 $\mathrm{L}^1[t_0, t_\alpha]$上的傅里叶级数

- 4.指数形式的傅里叶级数
  - (1) $\left\{e^{\mathrm{j}n\omega t}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ □ $\left\{\phi_n(t)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 是$\mathrm{L}^2\left[t_0, t_0+T\right]$上完备正交集, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$$\left(\left\{e^{\mathrm{j}n\omega t}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}\right)^{\perp} = \{0\}$$

$$\left\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \right\rangle = \int_{t_0}^{t_0+T} \phi_i^*(t)\,\phi_j(t)\,\mathrm{d}t = T\delta_{ij}$$

§ 4.1 $\mathrm{L}^1[t_0,t_\alpha]$上的傅里叶级数

– (2) $\forall f(t)\in \mathrm{L}^1[t_0,t_0+T]$，有

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\mathrm{j}n\omega t}$$

其中

$$F_n=\frac{\left\langle e^{\mathrm{j}n\omega t},\quad f(t)\right\rangle}{\left\langle e^{\mathrm{j}n\omega t},\quad e^{\mathrm{j}n\omega t}\right\rangle}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega t}\mathrm{d}t$$

注：复频率的引入完全由完备性决定。

§ 4.1 $L^1[t_0, t_\alpha]$上的傅里叶级数

– (3) $F_{-n} = F_n^*$

$$F_{-n}e^{-\mathrm{j}n\omega t} + F_n e^{\mathrm{j}n\omega t} = 2\,\mathrm{Re}\left[F_n e^{\mathrm{j}n\omega t}\right] = 2\left|F_n\right|\cos\left(n\omega t + \phi_n\right)$$

其中$F_n = \left|F_n\right| e^{\mathrm{j}\phi_n}$

– (4) F_n一般为$n\omega$的复变函数, 是离散的, 间隔为$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$。

$F_n = \left|F_n\right| e^{\mathrm{j}\phi_n}$, $\left|F_n\right|$和ϕ_n均为$n\omega$的函数。

$\left|F_n\right|$ □ $n\omega$: $f(t)$的幅度谱（线谱）

ϕ_n □ $n\omega$: $f(t)$的相位谱（线谱）

§ 4.1 $L^1[t_0, t_\alpha]$上的傅里叶级数

– (5) $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$

利用

$$e^{jn\omega t} = \cos n\omega t + j\sin n\omega t$$

可导出：

$$F_0 = a_0 = c_0 = d_0$$

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = |F_n| e^{-j\phi_n}$$

$$F_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = |F_n| e^{j\phi_n}$$

$$\phi_n = \mathrm{tg}^{-1}\frac{b_n}{a_n}$$

§4.1 $\mathrm{L}^1[t_0,t_\alpha]$上的傅里叶级数

- 5.傅里叶级数使用范围
  - (1) $\forall f(t)\in \mathrm{L}^1[t_0,t_0+T]$可展成傅里叶级数
  - (2) $f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{\mathrm{j}n\omega t}\left[u(t-t_0)-u(t-t_0-T)\right]$

将$f(t)$以为周期T向左、右做周期延拓得：

$$F(t)\ \square\ f(t-mT)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{\mathrm{j}n\omega(t-mT)}\left[u(t-mT-t_0)-u(t-mT-t_0-T)\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{\mathrm{j}n\omega t},t\in(-\infty,\infty)$$

所以，在一个周期内绝对可积的周期信号可展成傅里叶级数。

周期信号：$F(t)=F(t-nT)$

主周期：　$f(t)=F(t)\left[u\left(t+\frac{T}{2}\right)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$

§ 4.1 $L^1[t_0, t_\alpha]$上的傅里叶级数

- 6.函数的对称性与F.S.的定性性质

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t$$

§ 4.1 $\mathrm{L}^1[t_0,t_\alpha]$上的傅里叶级数

- (1) *f(t)*为偶函数： *f(t)*= *f(-t)*， *f(t)*的傅里叶级数只含有直流和余弦分量。
- (2) *f(t)*为奇函数： *f(t)*= -*f(-t)*， *f(t)*的傅里叶级数只含有正弦分量。
- (3) *f(t)*为奇谐函数：$f\left(t\right)=-f\left(t\pm\frac{T}{2}\right)$， *f(t)*的傅里叶级数只含有奇次正余弦分量（奇次谐波）。
- (4) *f(t)*为偶谐函数：$f\left(t\right)=f\left(t\pm\frac{T}{2}\right)$， *f(t)*的傅里叶级数只含有偶次正余弦分量（偶次谐波）。

§ 4.1 $\mathrm{L}^1[t_0,t_\alpha]$上的傅里叶级数

- 7. Parseval定理（内积不变性）
  - 定理（Parseval）：对$\forall f(t),g(t)\in\mathrm{L}^2[t_0,t_0+T]$,则

$$\left\langle f(t),g(t)\right\rangle=\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)g^*(t)\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_nG_n^*T=T\left\langle\{F_n\}_{n=-\infty}^{\infty},\{G_n\}_{n=-\infty}^{\infty}\right\rangle$$

§ 4.1 $\mathrm{L}^1[t_0, t_\alpha]$上的傅里叶级数

- 8.能量定理

对$\forall f(t) \in \mathrm{L}^2[t_0, t_0+T]$，有$\int_{t_0}^{t_0+T} \left| f(t) \right|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| F_n \right|^2 T$

§ 4.1 $\mathrm{L}^1\left[t_0,t_\alpha\right]$上的傅里叶级数

- 9.均方收敛性（依范数收敛，强收敛）
  - 定理（均方收敛）：对$\forall f\left(t\right)\in\mathrm{L}^2\left[t_0,t_0+T\right]$,则

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left|f\left(t\right)-\sum_{n=-N}^{N}F_n e^{\mathrm{j}n\omega t}\right|^2\mathrm{d}t=0$$

其中 $\varepsilon\left(t\right)=f\left(t\right)-\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{\mathrm{j}n\omega t}$为误差，

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left|f\left(t\right)-\sum_{n=-N}^{N}F_n e^{\mathrm{j}n\omega t}\right|^2\mathrm{d}t$$为均方误差。

  - 在个别点，甚至零测度集上不收敛不影响均方收敛性。
  - 2N+1项F.S.近似，欧式范数最小 $\Leftrightarrow$ 方差最小 $\Leftrightarrow$ 均方差最小。

§ 4.1 $\mathrm{L}^1[t_0,t_\alpha]$上的傅里叶级数

- 10.可F.S.展开的充分条件
  - 定理（可F.S.展开的充分条件）：

    若$\forall f(t)\in \mathrm{L}^1[t_0,t_0+T]$，则$|F_n|<\infty$。

  证明：
$$F_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega t}\mathrm{d}t$$

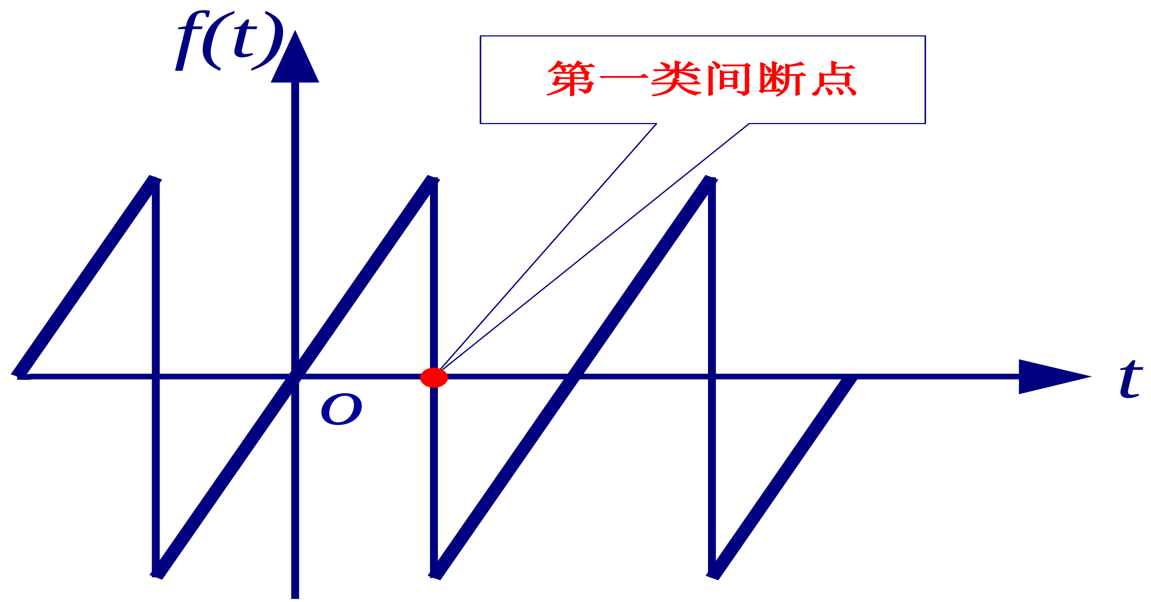
$$|F_n|\le\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}|f(t)||e^{-\mathrm{j}n\omega t}|\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}|f(t)|\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\|f(t)\|_1<\infty$$

$$\max_{\forall n}|F_n|\le\frac{1}{T}\|f(t)\|_1$$

§ 4.1 $L^1[t_0,t_\alpha]$上的傅里叶级数

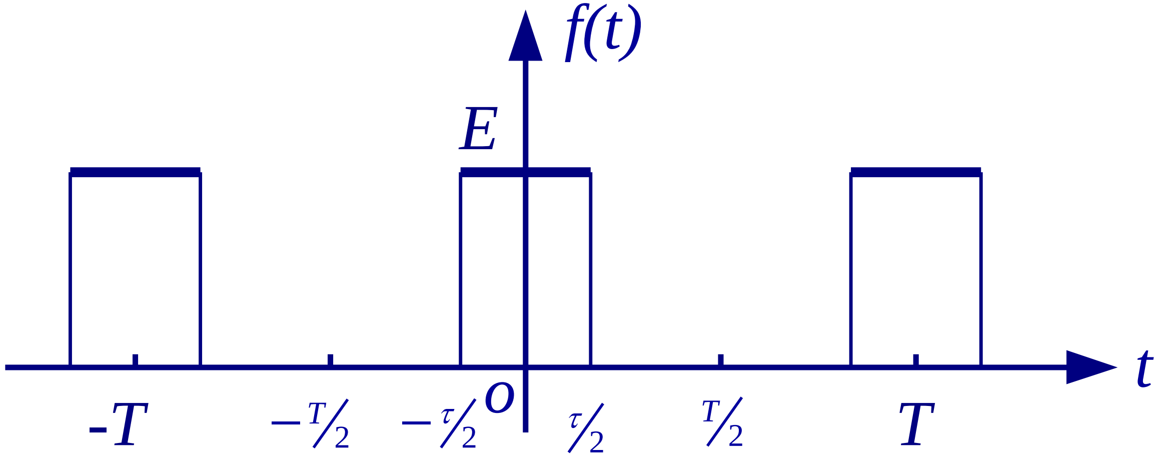
- 11. Gibbs现象
  - 若用F.S.逼近*f(t)*，在第1类间断点处不一致收敛，且在间断点的很小邻域内有奇异现象出现，9% 的最大峰起。



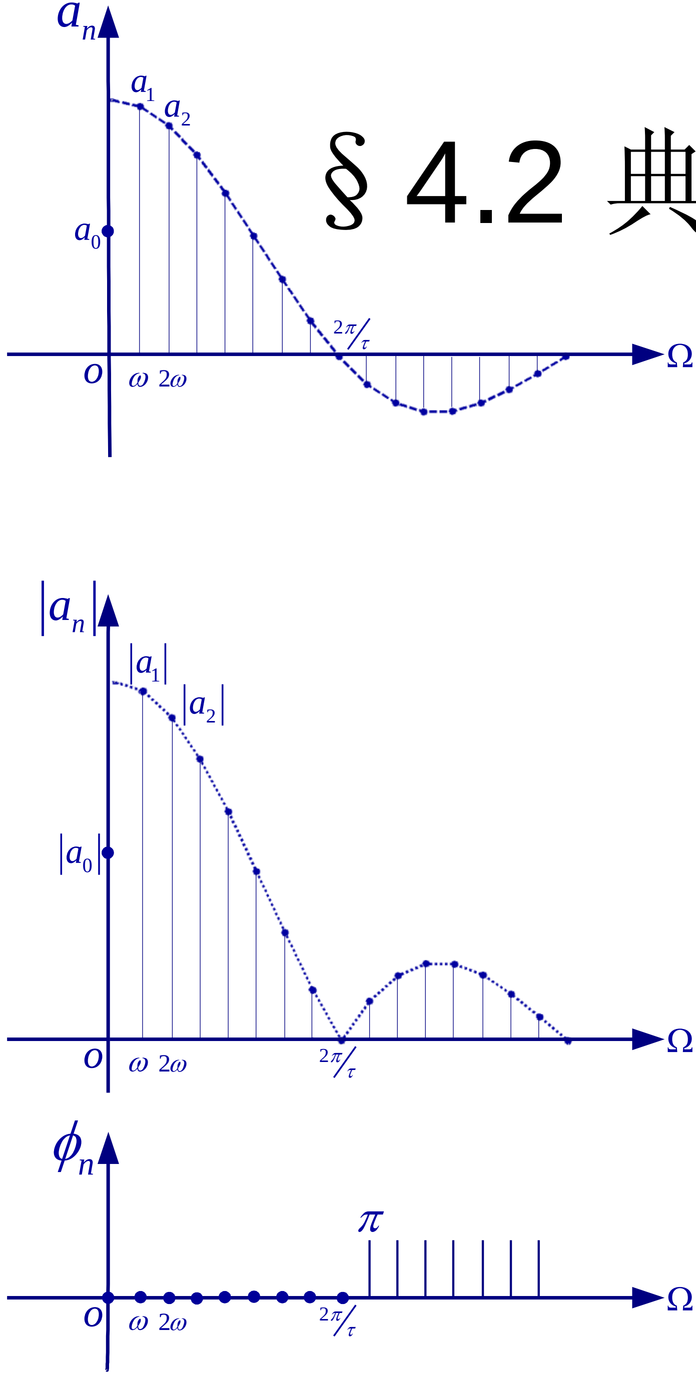
§4.2 典型周期信号的谱

- 周期矩形脉冲信号：

$$f(t) = E\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right],\quad -\frac{T}{2}\le t\le\frac{T}{2}$$



§ 4.2 典型周期信号的谱



$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t,$$

$$a_0 = \frac{E\tau}{T}, \quad \Omega = n\omega$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t \mathrm{d}t$$

$$= \frac{2E\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{1}{2}n\omega\tau\right) = \frac{2E\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{1}{2}\Omega\tau\right)$$

$$a_n = |a_n| e^{j\phi_n}$$

§ 4.2 典型周期信号的谱

- (1) *f(t)*的频谱为可列的无穷多条线谱
- (2)谱线间隔为$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$
- (3)线谱包络为$\mathrm{Sa}\left(\dfrac{1}{2}\Omega\tau\right)$
- (4) 0到第一零点之间的谱线的个数：

$$\left[\frac{2\pi/\tau}{\omega}\right]=\left[\frac{T}{\tau}\right]$$（$\left[\dfrac{T}{\tau}\right]$表示对$\dfrac{T}{\tau}$取整)

§ 4.3 $L^1(-\infty,\infty)$上函数的傅里叶变换

- 1.问题提出

考虑 $L^1[t_0, t_0+T] \Rightarrow L^1(-\infty,+\infty)$, 令$t_0 = -\frac{T}{2}, T \to \infty$,
则

$$\lim_{T\to\infty} F_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-\mathrm{j}n\omega t} \mathrm{d}t \to 0$$

谱线间隔：

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \to 0, T \to \infty$$

此时信号有周期信号变为非周期信号，其频谱由离散谱变为连续谱。

§4.3 $\mathrm{L}^1(-\infty,\infty)$上函数的傅里叶变换

$$\lim_{T\to\infty} F_n T = \lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega t}\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \lim_{\omega\to 0}\frac{2\pi F_n(n\omega)}{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega t}\mathrm{d}t$$

其中，$\dfrac{F_n(n\omega)}{\omega}$表示单位频率上的谱强度，

$F(\omega)=\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{2\pi F_n(n\omega)}{\omega}$为 $f(t)$ 的频谱密度函数（谱密度）。

令：$\Omega = n\omega \Rightarrow F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$

§ 4.3 $\mathrm{L}^1(-\infty,\infty)$上函数的傅里叶变换

- 2.傅里叶变换
  - 定义：对 $\forall f(t)\in \mathrm{L}^1(-\infty,\infty)$,则

    傅里叶(正)变换：

    $$F(\omega)=\mathbf{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

    傅里叶反变换：

$$f(t)=\mathbf{F}^{-1}\{F(\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \overset{\omega=2\pi f}{=} \int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}f$$

其中：$F(\omega)=|F(\omega)|e^{\mathrm{j}\phi(\omega)}$为$f(t)$的（频）谱（密度）

$|F(\omega)|$为$f(t)$的幅度谱（密度）, $\phi(\omega)$为$f(t)$的相位谱（密度）

§ 4.3 $\mathrm{L}^1(-\infty,\infty)$上函数的傅里叶变换

– 定义：**F** $\{f(t)\}$存在：$|F(\omega)|<\infty$

– 定理：

F $\{f(t)\}$存在的充分条件：

对$\forall f(t)\in \mathrm{L}^1(-\infty,\infty)$, **F** $\{f(t)\}$存在。

§ 4.3 $L^1(-\infty,\infty)$上函数的傅里叶变换

- $\mathbf{F}:L^1(-\infty,+\infty)\to L^\infty(-\infty,+\infty)$映射
- $f(t)=\mathbf{F}^{-1}\{F(\omega)\}=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}f$

$$\forall f(t)\in L^1[t_0,t_0+T],\ f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{\mathrm{j}n\omega t},$$

$$\left\langle f(t),e^{\mathrm{j}\Omega t}\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$\left\langle f(t),e^{\mathrm{j}\Omega t}\right\rangle=\left\langle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega,e^{\mathrm{j}\Omega t}\right\rangle$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\mathrm{j}(\omega-\Omega)t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega$$

$$\delta(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\mathrm{j}\xi t}\mathrm{d}t\Rightarrow=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\delta(\omega-\Omega)\mathrm{d}\omega=F(\Omega)$$

令$\Omega\leftrightarrow\omega$，有$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$。

§ 4.3 $\mathrm{L}^1(-\infty,\infty)$上函数的傅里叶变换

$$-\left\langle e^{\mathrm{j}\omega t}, e^{\mathrm{j}\Omega t}\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{j}\omega t} e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t = \delta(\omega-\Omega)$$

$$\left\langle e^{\mathrm{j}n\omega t}, e^{\mathrm{j}m\omega t}\right\rangle = T\delta_{mn},$$

$$\left\{e^{\mathrm{j}n\omega t}\right\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset \mathrm{L}^2\left[t_0, t_0+T\right], \omega = \frac{2\pi}{T},$$

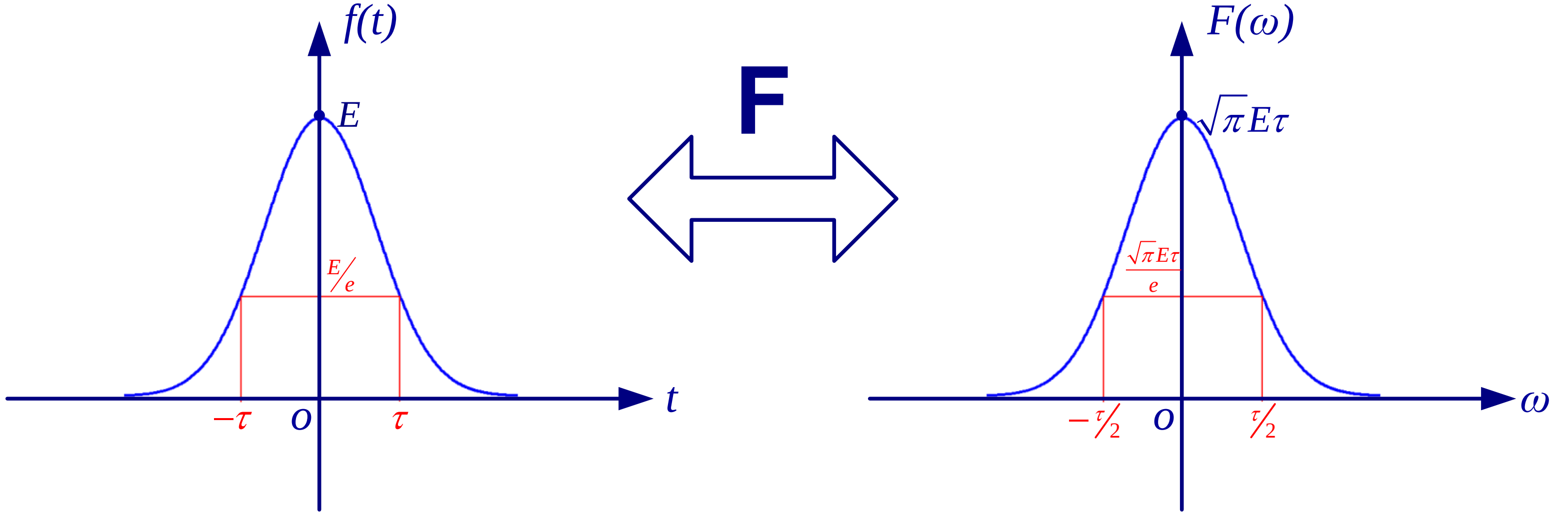
而$e^{\mathrm{j}\omega t} \notin \mathrm{L}^2(-\infty,+\infty), \omega \in (-\infty,+\infty)$。

§ 4.3 $L^1(-\infty,\infty)$上函数的傅里叶变换

- 3.典型函数的谱
  - (1)高斯函数

$$f(t)=Ee^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \overset{\mathbf{F}}{\Longleftrightarrow} F(\omega)=\sqrt{\pi}E\tau e^{-\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}$$

$$t\in(-\infty,+\infty)$$



§4.3 $L^1(-\infty,\infty)$上函数的傅里叶变换

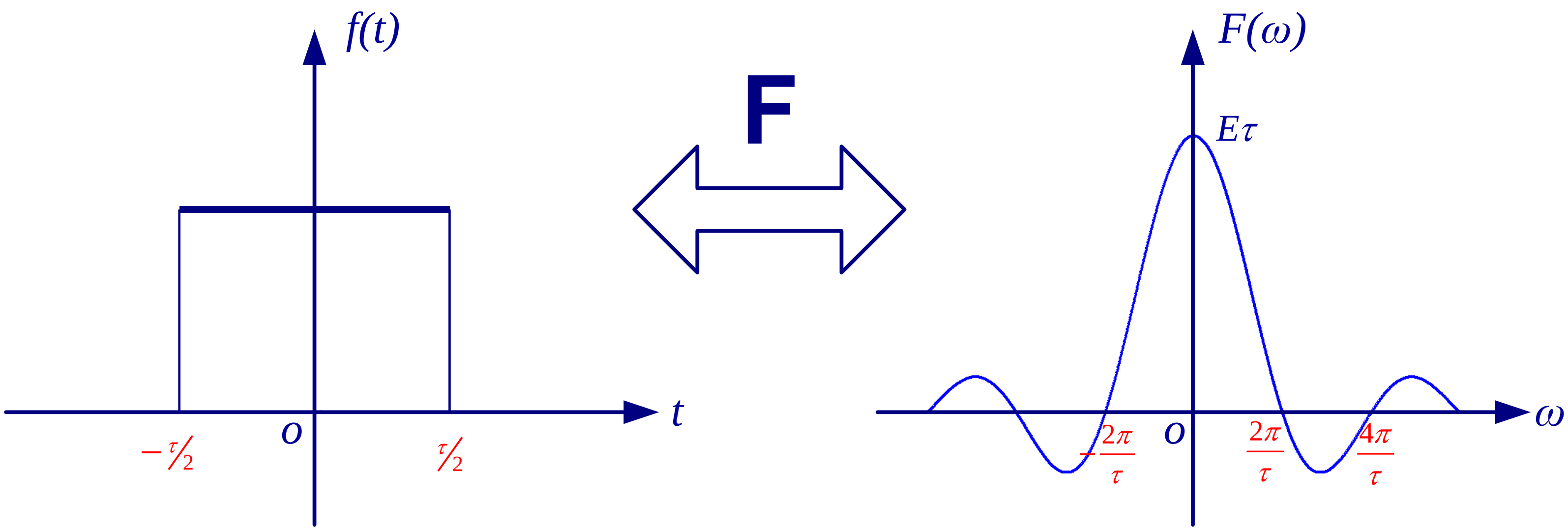
- 高斯函数：$\exp\left(-ax^2\right)$
- 高斯函数为正实函数
- 高斯函数的傅里叶变换仍是高斯的
- 高斯函数是速降函数
- 令$E=1, \tau=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}, \omega=2\pi f$

$$e^{-\pi t^2} \overset{F}{\leftrightarrow} e^{-\pi f^2}$$

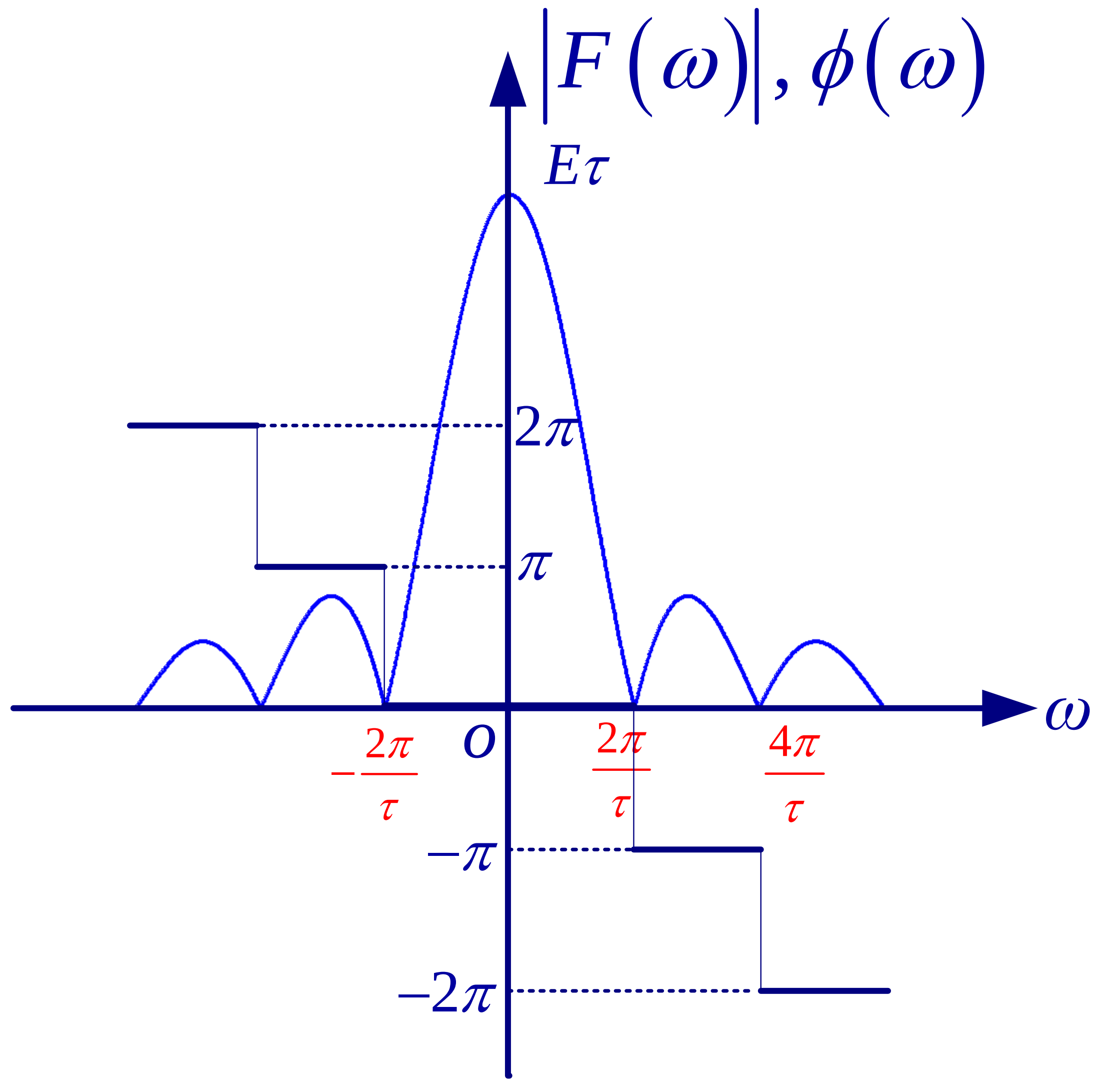
§ 4.3 $L^1(-\infty,\infty)$上函数的傅里叶变换

– (2)矩形函数

$$f(t)=E\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]\overset{F}{\Longleftrightarrow}F(\omega)=E\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



§ 4.3 $L^1(-\infty,\infty)$上函数的傅里叶变换

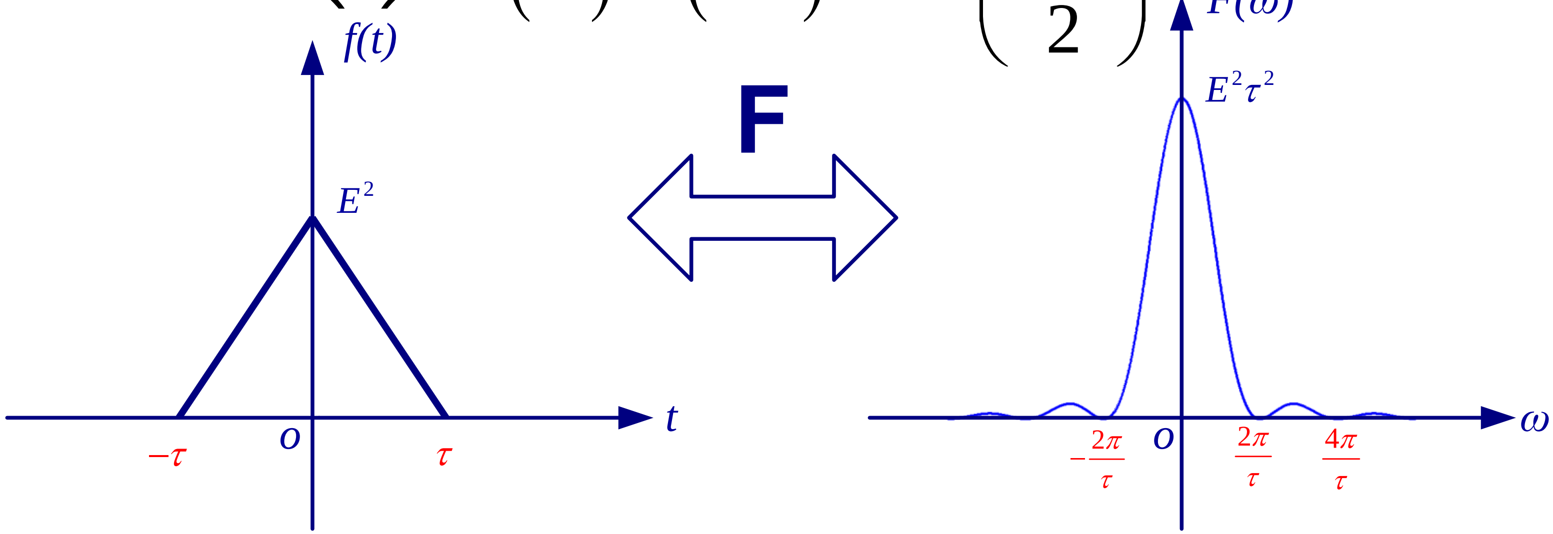


§ 4.3 $L^1(-\infty,\infty)$上函数的傅里叶变换

– (3)三角脉冲函数

$$f(t)=E\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]*E\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

$$\overset{\mathbf{F}}{\Longleftrightarrow} F(\omega)=(E\tau)^2\,\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



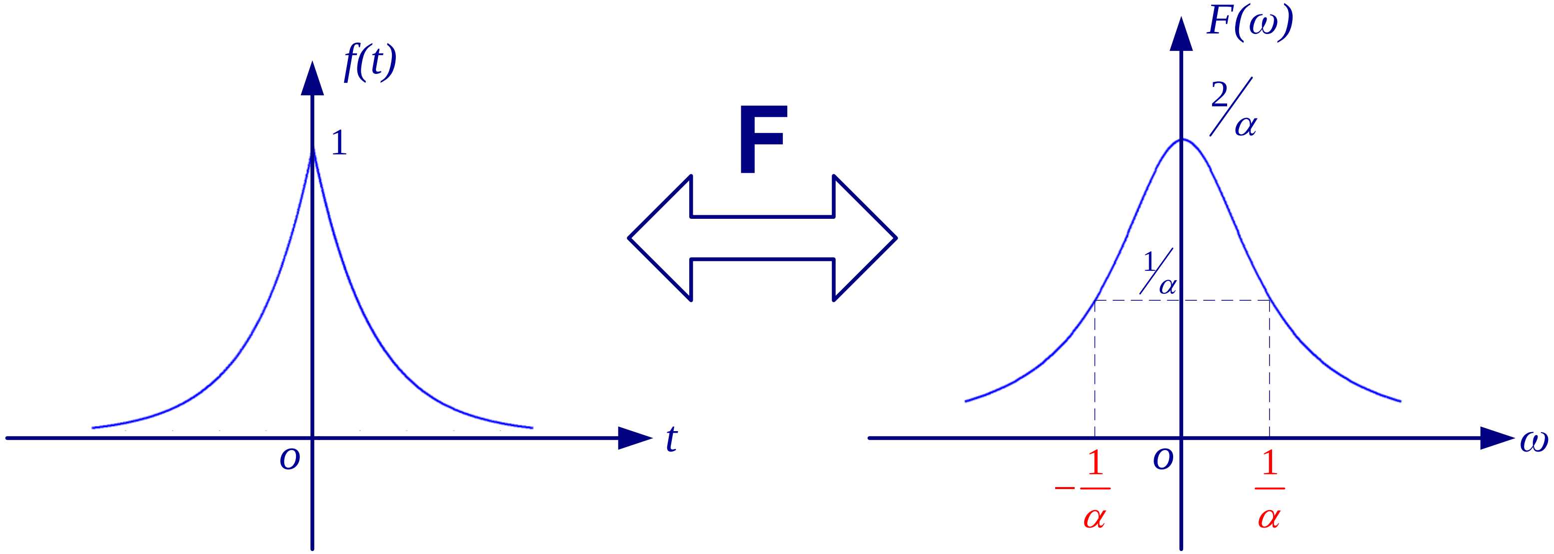
推广：矩形函数不断卷积，其傅里叶变换弱收敛于高斯函数

§ 4.3 $L^1(-\infty,\infty)$上函数的傅里叶变换

– (4)双边指数函数

$$f(t)=e^{-\alpha|t|},\alpha>0,t\in(-\infty,+\infty) \quad \overset{\mathbf{F}}{\Longleftrightarrow}$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha t}e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha t}e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$



§ 4.3 $L^1(-\infty,\infty)$上函数的傅里叶变换

– (5)单边指数函数

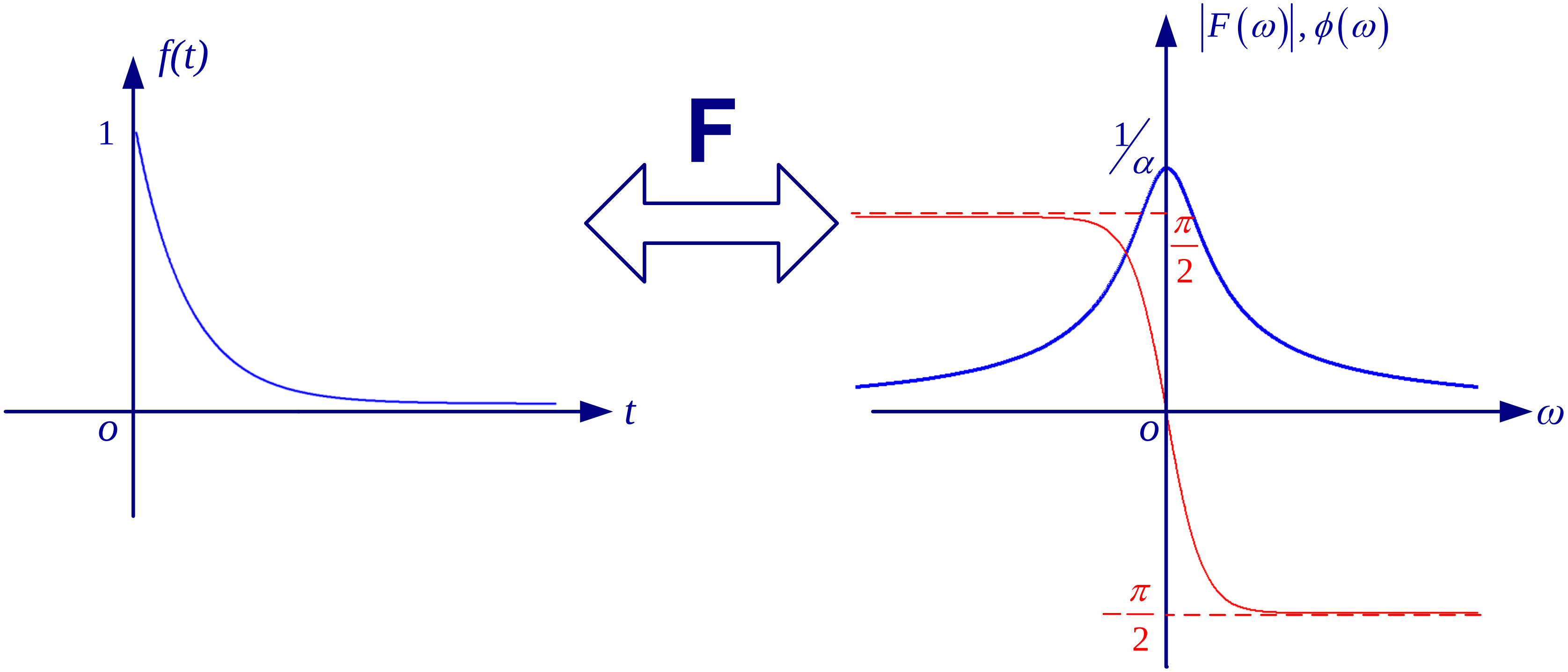
$$f(t)=e^{-\alpha t}u(t),\alpha>0 \quad \overset{F}{\Leftrightarrow}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\exp\left(-\mathrm{jtg}^{-1}\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

$$\left|F(\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}},\phi(\omega)=-\mathrm{tg}^{-1}\frac{\omega}{\alpha}$$

§ 4.3 $L^1(-\infty,\infty)$上函数的傅里叶变换

– (5)单边指数函数



§ 4.3 $\mathrm{L}^1(-\infty,\infty)$上函数的傅里叶变换

– (6)符号函数

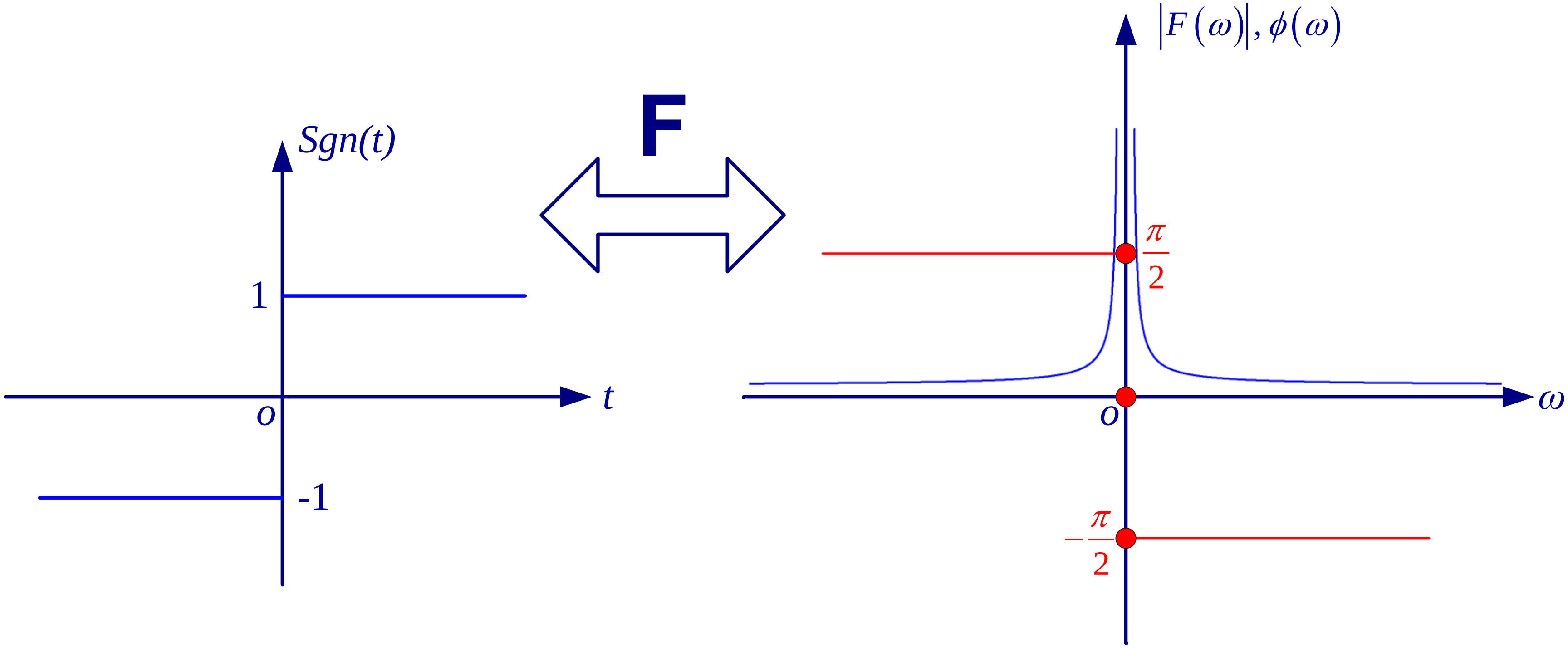
$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}, \left|\operatorname{sgn}(t)\right| \notin \mathrm{L}^1(-\infty,+\infty) \quad \overset{\mathbf{F}}{\Longleftrightarrow}$$

$$F(\omega)=\mathbf{F}\left\{\operatorname{sgn}(t)\right\}=\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sgn}(t)\,e^{-\alpha|t|}e^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{2\mathrm{j}}{\omega}=\frac{2}{|\omega|}e^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(\omega)}$$

§ 4.3 $L^1(-\infty,\infty)$上函数的傅里叶变换

– (6)符号函数（续）

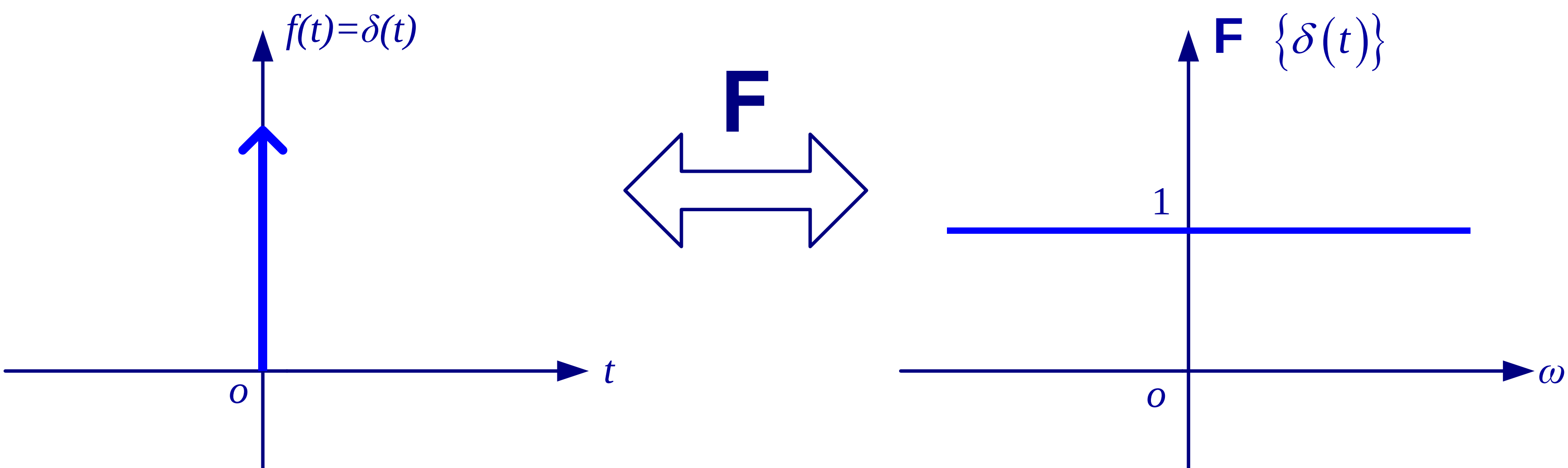


§ 4.3 $L^1(-\infty,\infty)$上函数的傅里叶变换

– (7)冲击函数

$$f(t)=\delta(t) \quad \overset{\mathbf{F}}{\Longleftrightarrow}$$

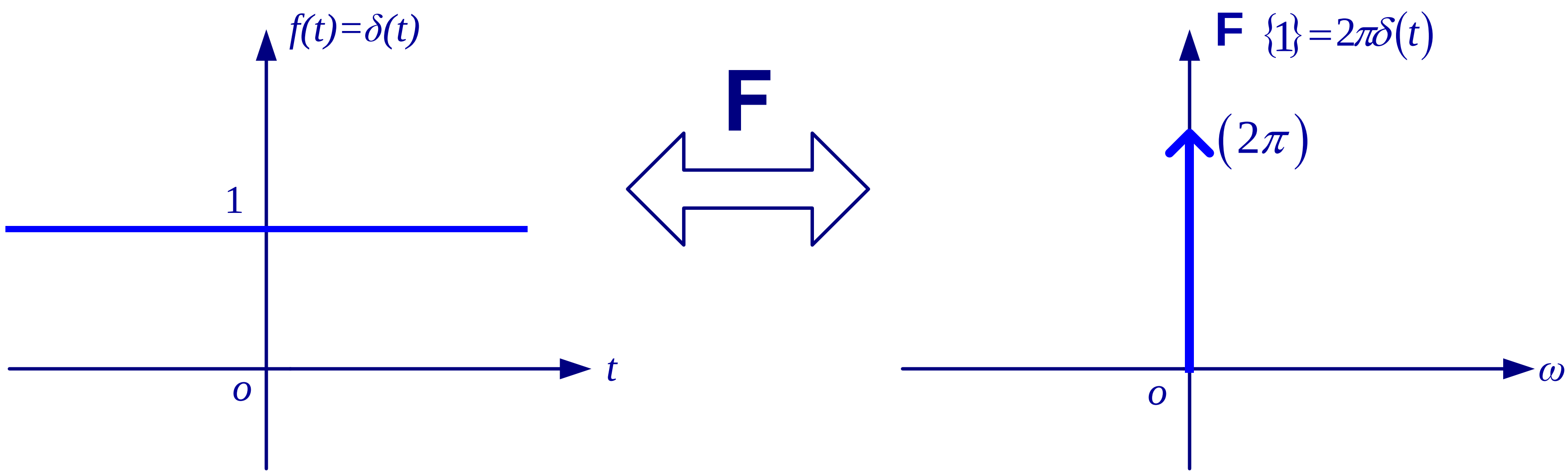
$$F(\omega)=\mathbf{F}\left\{\delta(t)\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=1$$



§ 4.3 $L^1(-\infty,\infty)$上函数的傅里叶变换

– (8)直流

$$f(t)=1, t\in(-\infty,+\infty) \overset{\mathbf{F}}{\Longleftrightarrow} F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega)$$

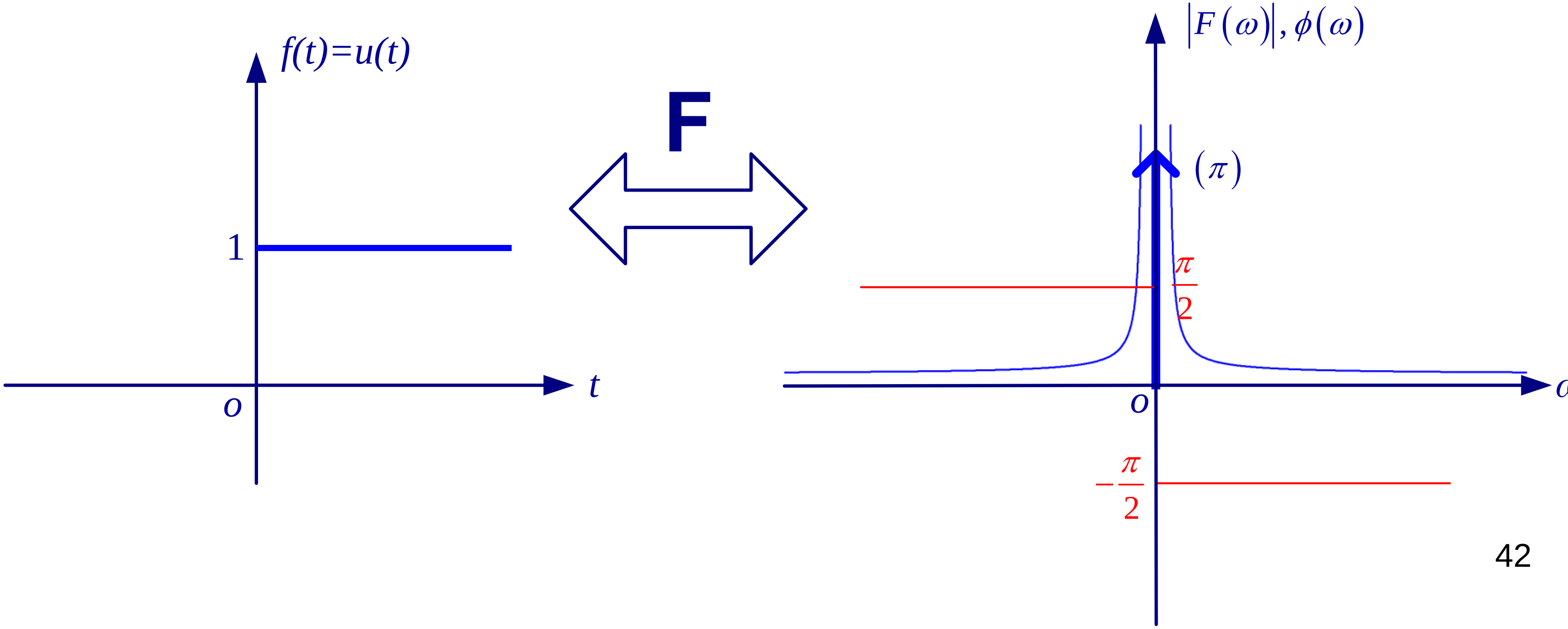


§ 4.3 $L^1(-\infty,\infty)$上函数的傅里叶变换

– (9)阶跃函数

$$f(t)=u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)\quad\overset{\mathbf{F}}{\Longleftrightarrow}$$

$$F(\omega)=\mathbf{F}\left\{\frac{1}{2}\right\}+\frac{1}{2}\mathbf{F}\left\{\operatorname{sgn}(t)\right\}=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$



§ 4.4 傅里叶变换的性质

- 1. .F 是线性变换：

$$\mathbf{F}\ : \mathrm{L}^1(-\infty,+\infty)\to \mathrm{L}^\infty(-\infty,+\infty)$$

$$\mathbf{F}\ \left\{\sum_{n=1}^{N}\alpha_n f_n(t)\right\}=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n \mathbf{F}\ \{f_n(t)\}$$

- 2.对称性：

$$\mathbf{F}\ \{F(t)\}=2\pi f(-\omega)$$

§ 4.4 傅里叶变换的性质

- 3. 共轭：

$$\mathbf{F}\left\{f^*(t)\right\} = F^*(-\omega)$$

注：

– (1)若$f(t)$为实函数：$f(t) = f^*(t)$

则 $F(\omega) = \mathbf{F}\left\{f(t)\right\} = F^*(-\omega)$

$$|F(\omega)|e^{\mathrm{j}\phi(\omega)} = |F(-\omega)|e^{-\mathrm{j}\phi(-\omega)} \Rightarrow \begin{array}{l} |F(\omega)| = |F(-\omega)| \text{模偶对称} \\ \phi(\omega) = -\phi(-\omega) \text{相位奇对称} \end{array}$$

– (2)若$f(t)$为纯虚函数，$|F(\omega)| = |F(-\omega)|$和$\phi(\omega) = -\phi(-\omega)$仍然成立。

§ 4.4 傅里叶变换的性质

- 4. 相似性定理（Similarity Theorem）（尺度变换性质）：

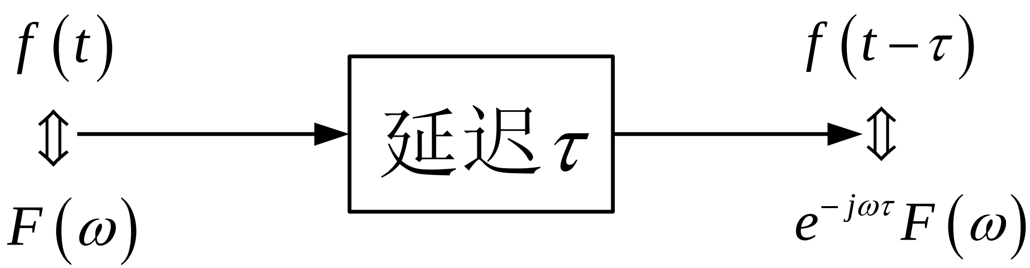
$$\mathbf{F}\left\{f\left(\alpha t\right)\right\}=\frac{1}{|\alpha|}F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

  – 特别地，当$\alpha=-1$时，$\mathbf{F}\left\{f\left(-t\right)\right\}=F\left(-\omega\right)$。

§ 4.4 傅里叶变换的性质

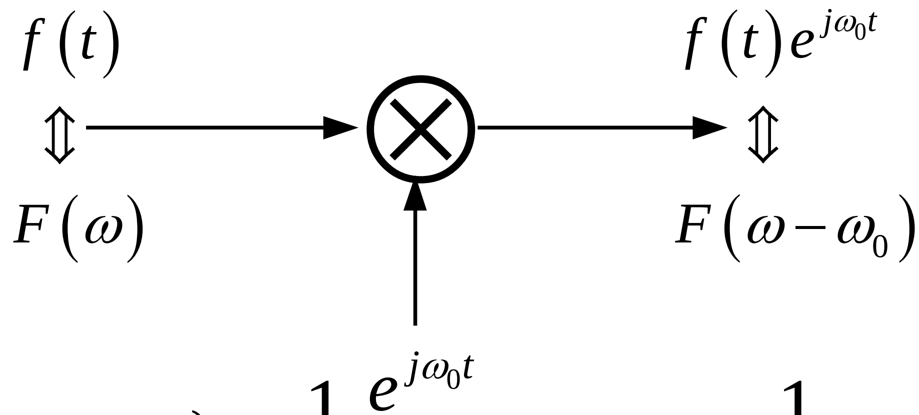
- 5.时移：

$$\mathbf{F}\left\{f\left(t-\tau\right)\right\}=e^{-j\omega\tau}F\left(\omega\right)$$



§ 4.4 傅里叶变换的性质

- 6.调制（频移）：**F** $\left\{ f(t)e^{\mathrm{j}\omega_0 t} \right\} = F(\omega-\omega_0)$



F $\left\{ f(t)\cos\omega_0 t \right\} = \dfrac{1}{2}F(\omega-\omega_0) + \dfrac{1}{2}F(\omega+\omega_0)$

F $\left\{ f(t)\sin\omega_0 t \right\} = \dfrac{1}{2\mathrm{j}}F(\omega-\omega_0) - \dfrac{1}{2\mathrm{j}}F(\omega+\omega_0)$

注：此时谱的形状没有发生变化，为线性调制。

§4.4 傅里叶变换的性质

- 7.时域微分：$\mathrm{p} \square \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

$$\mathbf{F}\ \left\{\mathrm{p}f\left(t\right)\right\} = \mathrm{j}\omega F\left(\omega\right)$$

推广：$\mathbf{F}\ \left\{\mathrm{p}^{\mathrm{n}} f\left(t\right)\right\} = \left(\mathrm{j}\omega\right)^{n} F\left(\omega\right)$

§ 4.4 傅里叶变换的性质

- 8.频域微分：$\mathrm{p} \square \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}$

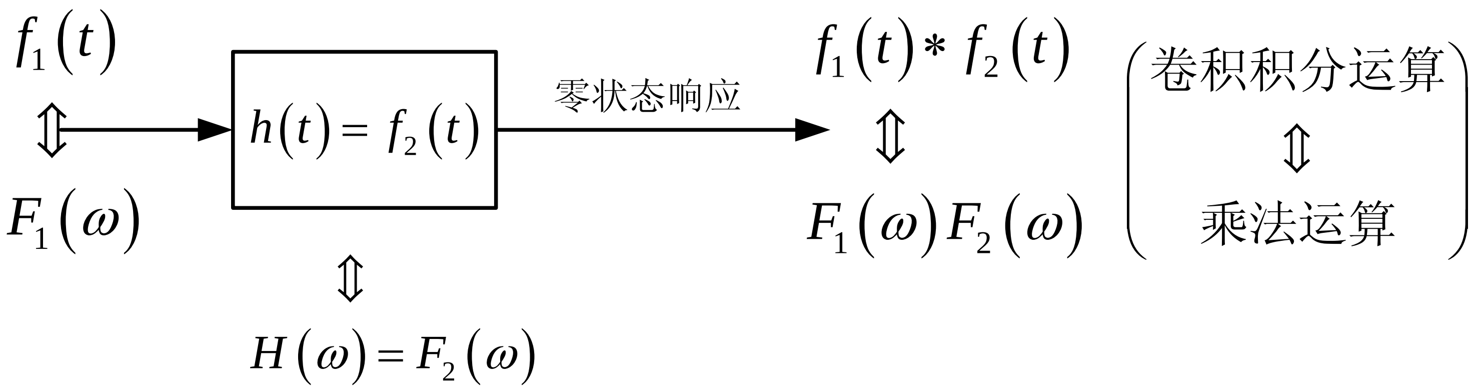
$$\mathbf{F}^{-1}\left\{\mathrm{p}F(\omega)\right\} = \mathbf{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)\right\} = (-\mathrm{j}t)\,f(t)$$

推广：$\mathbf{F}^{-1}\left\{\mathrm{p}^{\mathrm{n}}F(\omega)\right\} = (-\mathrm{j}t)^{n}\,f(t)$

§4.4 傅里叶变换的性质

- 9.时域卷积：

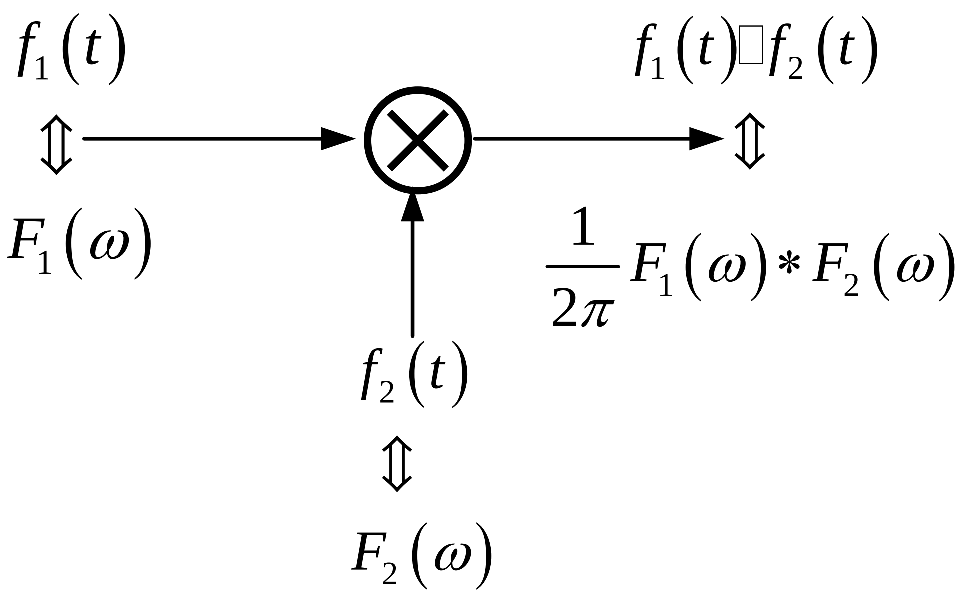
$$\mathbf{F}\left\{f_1(t)*f_2(t)\right\}=F_1(\omega)F_2(\omega)$$



§ 4.4 傅里叶变换的性质

- 10.频域卷积定理：

$$\mathbf{F}\left\{ f_1(t)\, f_2(t) \right\} = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$



§4.4 傅里叶变换的性质

- **11.**时域积分：$\dfrac{1}{\mathrm{p}} \square \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}\tau$

$$\mathbf{F}\left\{\frac{1}{\mathrm{p}} f(t)\right\} = \mathbf{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$$

特别的, 当$F(0)=0$时, 即信号没有直流分量,

即$F(0) = F(\omega)|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{dt} = 0 \Leftrightarrow F(\omega)/\omega$在$\omega = 0$处有界,

有 $$\mathbf{F}\left\{\frac{1}{\mathrm{p}} f(t)\right\} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega} F(\omega)$$

§4.4 傅里叶变换的性质

- 12.矩定理：

F $\left\{ f\left(t\right) \right\} = F\left(\omega\right), f\left(t\right)$的n阶矩：$m_n \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f\left(t\right) \mathrm{d}t,$

则$F^{(n)}\left(0\right) = \left(-\mathrm{j}\right)^n m_n$。

注：1) $F\left(0\right) = m_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right) \mathrm{d}t$----平均值/直流

2) $F^{(1)}\left(0\right) = -\mathrm{j}m_1 = -\mathrm{j}\int_{-\infty}^{+\infty} t f\left(t\right) \mathrm{d}t$----一阶矩/几何中心

3) $F^{(2)}\left(0\right) = -\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f\left(t\right) \mathrm{d}t$----二阶矩

4) $\sigma^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t - m_1\right)^2 f\left(t\right) \mathrm{d}t \right|$----二阶中心矩、方差

§ 4.4 傅里叶变换的性质

- 13.矩展开式：设 $f(t) \in \boldsymbol{C}^{\mathrm{n}}(-\infty, +\infty), m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n h(t) \boldsymbol{d}t,$ 则

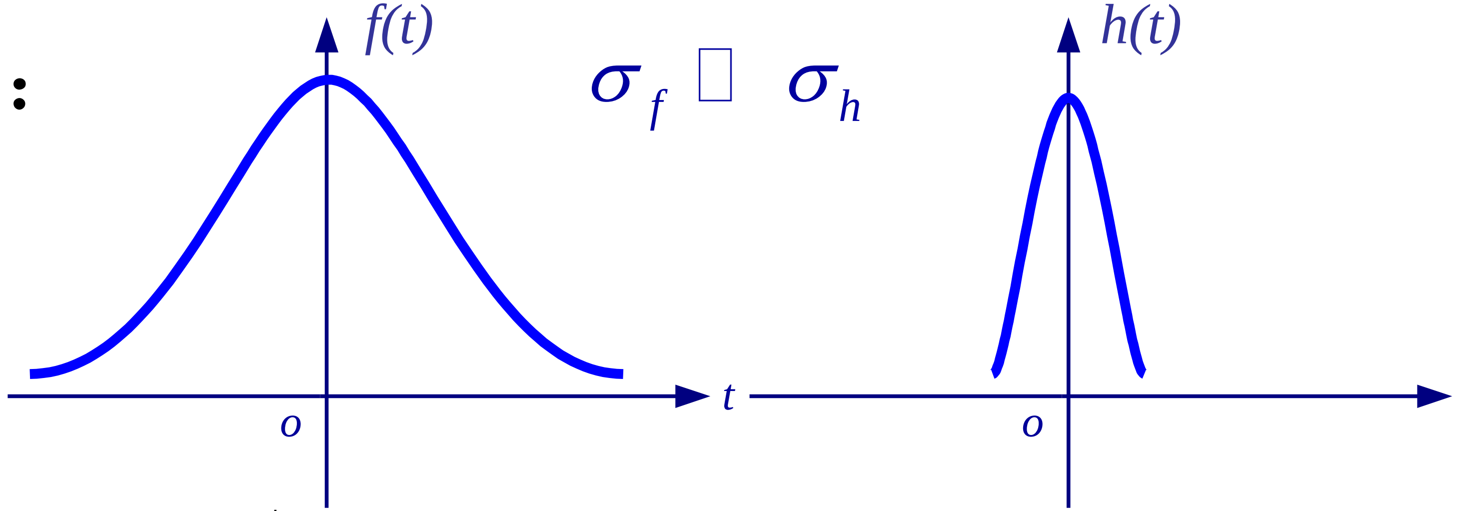
$$y(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) h(\tau) \mathrm{d}\tau$$

$$= m_0 f(t) - m_1 f^{(1)}(t) + \frac{m_2}{2!} f^{(2)}(t) + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} m_n f^{(n)}(t) + \cdots$$

$$f(t-\tau) = f(t) - \tau f^{(1)}(t) + \frac{\tau^2}{2!} f^{(2)}(t) + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \tau^n f^{(n)}(t) + \cdots$$

§4.4 傅里叶变换的性质

- 例：



$\sigma_f \gg \sigma_h$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau$$

零阶近似：$f(t-\tau)\approx f(t)$

$$y(t)\approx\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t)m_0$$

可见，两个方差相差很大的信号卷积，宽的信号起主导作用。

§ 4.4 傅里叶变换的性质

- 例：已知 $\mathcal{F}\left\{u(t)\right\}=\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}$

则 $\mathcal{F}\left\{tu(t)\right\}=\mathrm{j}\pi\delta'(\omega)-\dfrac{1}{\omega^2}$

$\mathcal{F}\left\{|t|\right\}=-\dfrac{2}{\omega^2}$, $\mathcal{F}\left\{t\right\}=2\mathrm{j}\pi\delta'(\omega)$

注：$\mathcal{F}\left\{-\mathrm{j}tu(t)\right\}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]$

$$\mathcal{F}\left\{|t|\right\}=\mathcal{F}\left\{tu(t)-tu(-t)\right\}$$

$\mathcal{F}\left\{t\right\}=\mathcal{F}\left\{tu(t)-\left[-tu(-t)\right]\right\}$即可证明。

§ 4.5 周期信号的傅里叶变换

- 周期信号 $f(t) = f(t - nT_0), -\infty < t < \infty,$
  $f(t) \notin \mathrm{L}^1(-\infty, +\infty)$不满足傅里叶变换的充分条件。

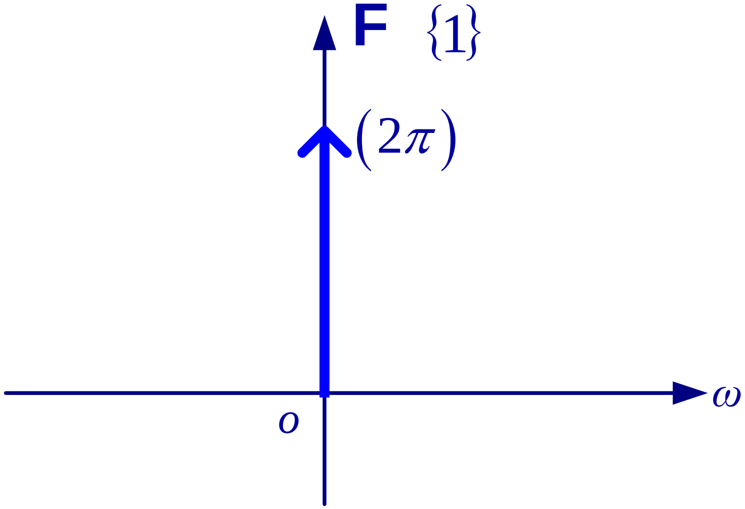
- $f(t)$ ～傅里叶级数～对傅里叶级数求变换

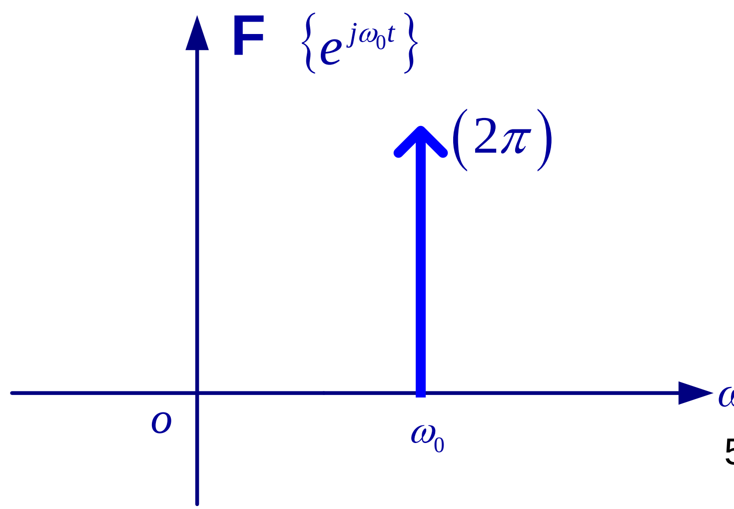
§4.5 周期信号的傅里叶变换

- 1.典型周期信号的傅里叶变换
  - (1) $f(t)=1, t\in(-\infty,+\infty)$是周期为零的周期信号,

    $$F(\omega)=2\pi\delta(\omega)$$

  - (2) $f(t)=e^{j\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} F(\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

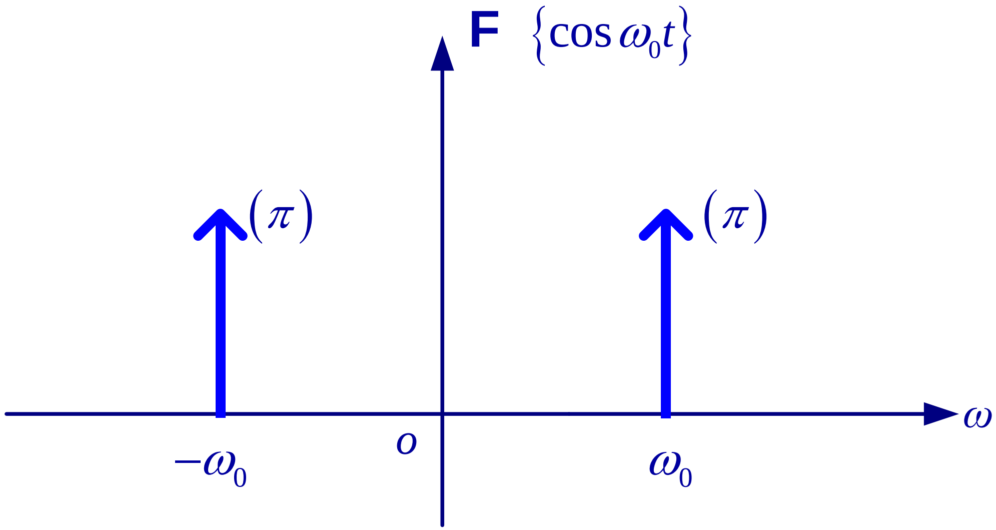




§4.5 周期信号的傅里叶变换

– (3) $f(t)=\cos\omega_0 t=\dfrac{1}{2}e^{\mathrm{j}\omega_0 t}+\dfrac{1}{2}e^{-\mathrm{j}\omega_0 t}$

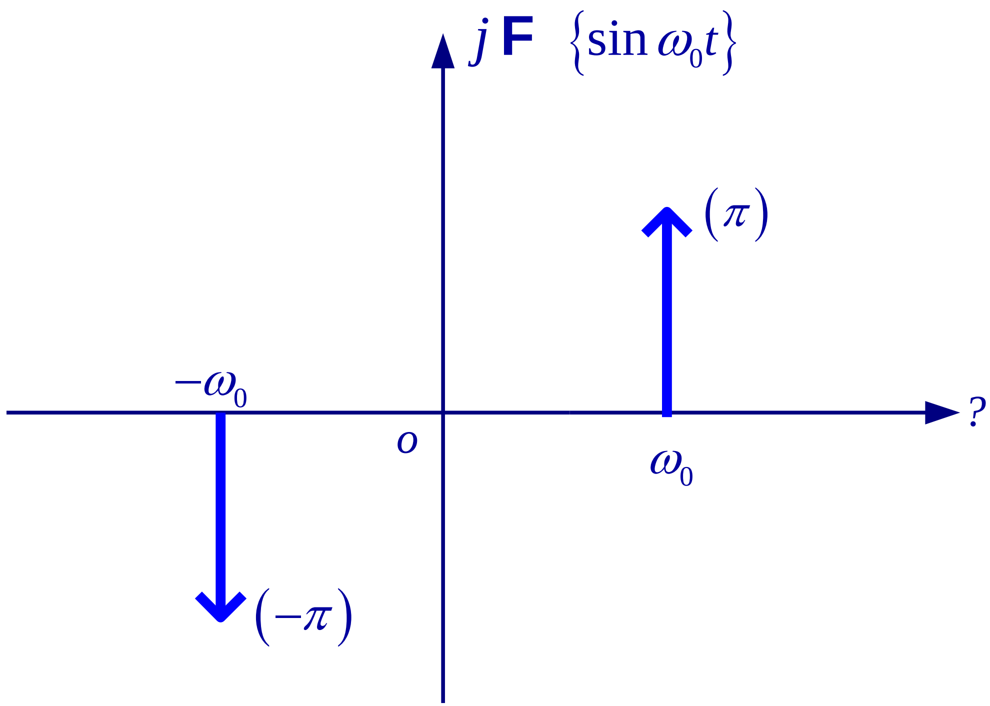
$$\overset{\mathbf{F}}{\Longleftrightarrow} F(\omega)=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$



§ 4.5 周期信号的傅里叶变换

– (4) $f(t)=\sin\omega_0 t=\dfrac{1}{2\mathrm{j}}e^{\mathrm{j}\omega_0 t}-\dfrac{1}{2\mathrm{j}}e^{-\mathrm{j}\omega_0 t}$

$$\overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow}\ \mathrm{j}F(\omega)=\pi\delta(\omega-\omega_0)-\pi\delta(\omega+\omega_0)$$



§4.5 周期信号的傅里叶变换

- 2. 一般周期信号的傅里叶变换
  - 定义（主周期）：对周期信号$f(t)=f(t-nT_0)$，

    定义主周期：

$$f_0(t) \triangleq f(t)\left[u\left(t+\frac{T_0}{2}\right)-u\left(t-\frac{T_0}{2}\right)\right]$$

当$f_0(t)\in \mathrm{L}^1\left[-\frac{T_0}{2},\frac{T_0}{2}\right]$, $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}, \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}, t\in(-\infty,+\infty)$

$$F_n=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$F(\omega)=\mathcal{F}\{f(t)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathcal{F}\left\{e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\right\}=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\delta(\omega-n\omega_0)$$

§ 4.5 周期信号的傅里叶变换

- 3. F_n与 **F** $\{f(t)\}$的关系：

$$\forall f(t)=f(t-nT_0),\ f_0(t)=f(t)\left[u\left(t+\frac{T_0}{2}\right)-u\left(t-\frac{T_0}{2}\right)\right]\in \mathrm{L}^1\left[-\frac{T_0}{2},\frac{T_0}{2}\right]$$

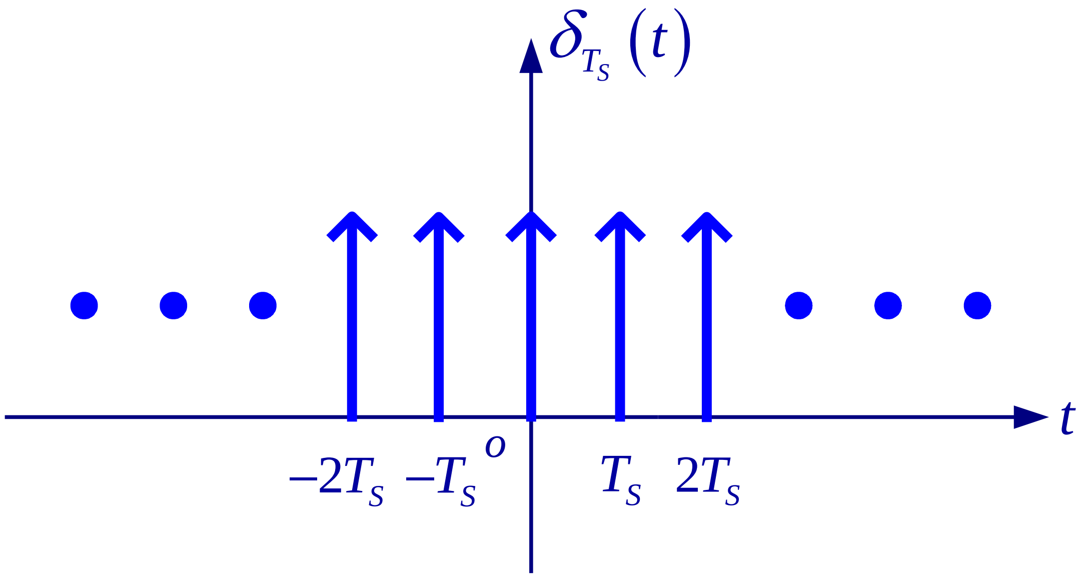
$$F_0(\omega)=\mathbf{F}\{f_0(t)\}=\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega t}\mathrm{d}t$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t},\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

$$F_n=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T_0}F_0(\omega)|_{\omega=n\omega_0}=f_0F_0(\omega)|_{\omega=n\omega_0},\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=2\pi f_0$$

§ 4.5 周期信号的傅里叶变换

- 4.理想采样序列的傅里叶变换
  - 定义：$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$为理想采样序列。



§4.5 周期信号的傅里叶变换

– $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{\mathrm{j}n\omega_s t},F_n=\frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}\delta(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_s t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T_s}$

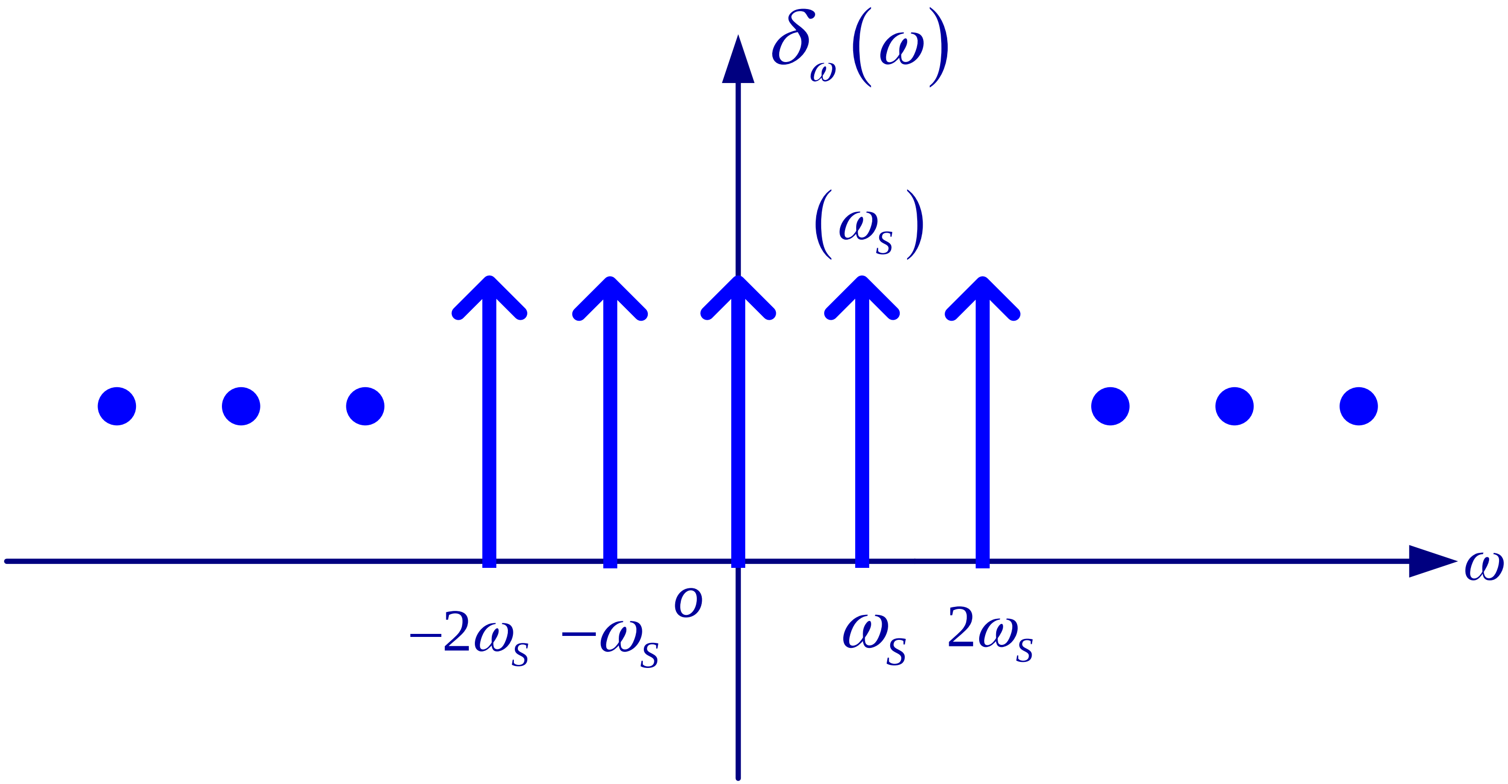
$$\delta_T(t)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{\mathrm{j}n\omega_s t}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)\cdots\cdots\cdots\text{Poisson求和公式}$$

– $\delta_\omega(\omega)=\mathcal{F}\{\delta_T(t)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\{\delta(t-nT_s)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\mathrm{j}n\omega T_s}$

$$\delta_\omega(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}\{e^{\mathrm{j}n\omega_s t}\}$$

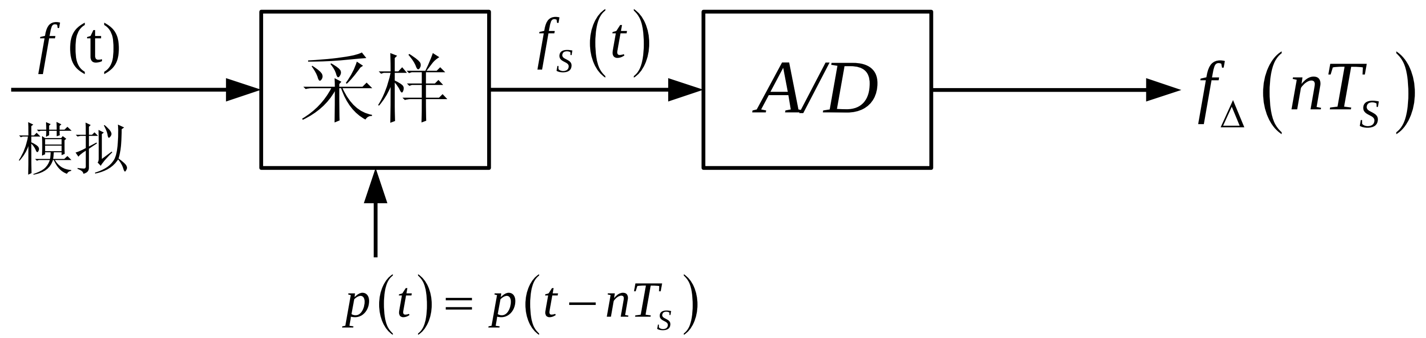
$$=\underbrace{\frac{2\pi}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)}_{\text{Poisson求和公式}},\omega_s=\frac{2\pi}{T_s}$$

§4.5 周期信号的傅里叶变换



§4.6 采样定理

- 1. 问题的提法



§4.6 采样定理

- 2. 采后信号的谱结构

$$p(t)=p(t-nT_s)$$

$$P(\omega)=\mathbf{F}\ \{p(t)\}=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\delta(\omega-n\omega_s)$$

$$F(\omega)=\mathbf{F}\ \{f(t)\}$$

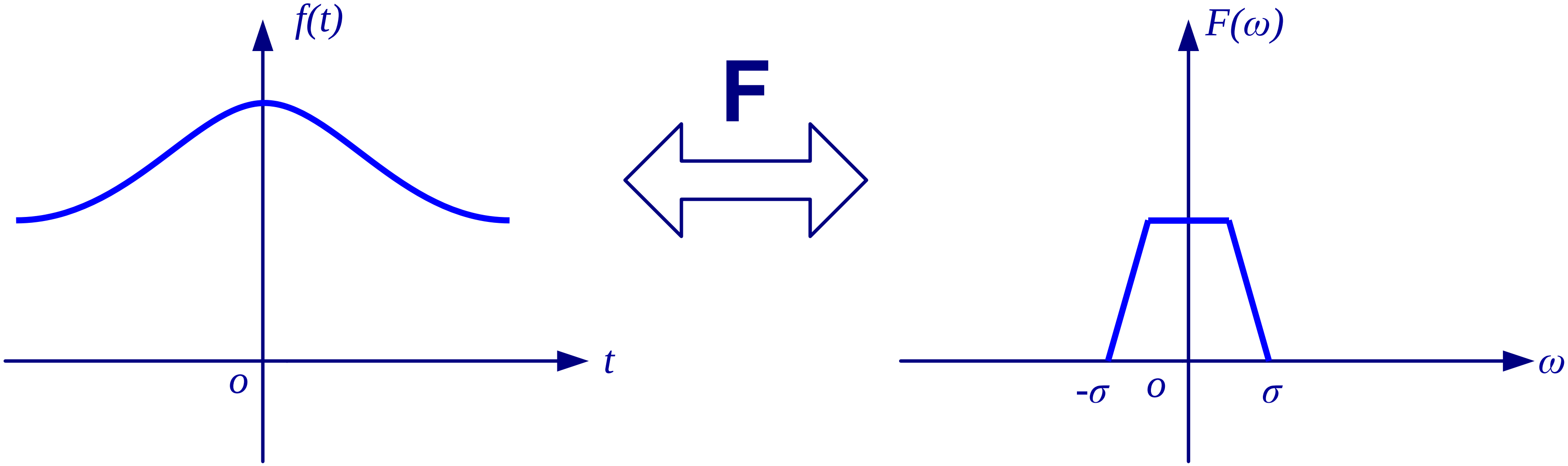
$$f_s(t)=f(t)p(t)$$

$$F_s(\omega)=\mathbf{F}\ \{f_s(t)\}=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*P(\omega)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_nF(\omega)*\delta(\omega-n\omega_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_nF(\omega-n\omega_s)$$

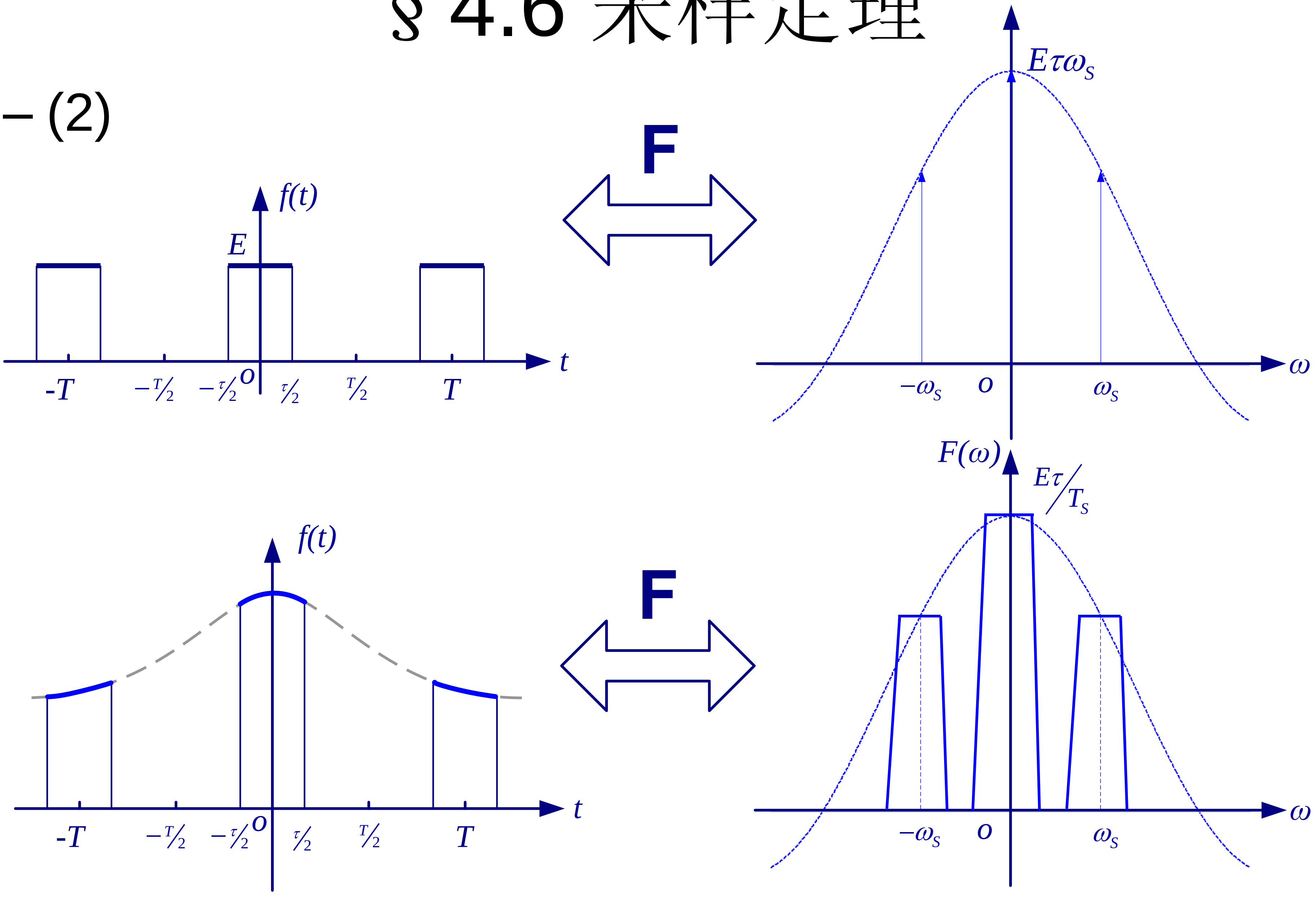
§4.6 采样定理

- 3.矩形脉冲采样
  - (1)



§ 4.6 采样定理

– (2)



f(t)
E
-T
$-T/2$
$-\tau/2$
O
$\tau/2$
$T/2$
T
t
F
$E\tau\omega_S$
$-\omega_S$
O
ω_S
ω
f(t)
-T
$-T/2$
$-\tau/2$
O
$\tau/2$
$T/2$
T
t
F
F(ω)
$E\tau/T_S$
$-\omega_S$
O
ω_S
ω

§4.6 采样定理

- 4.理想采样

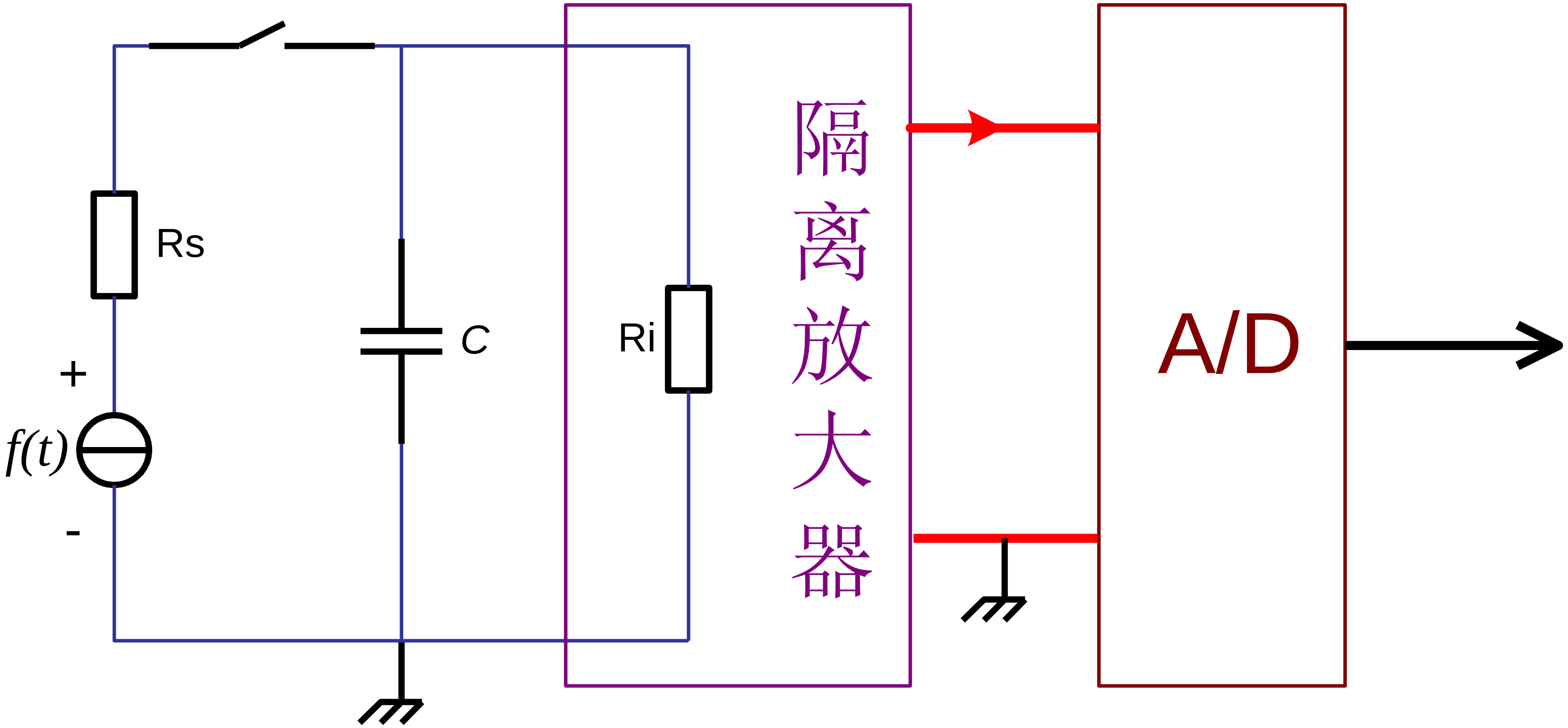
$$p(t)=\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

$$P_n=\frac{1}{T_s}$$

$$F_s(\omega)=\mathbf{F}\left\{f(t)\delta_T(t)\right\}=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$$

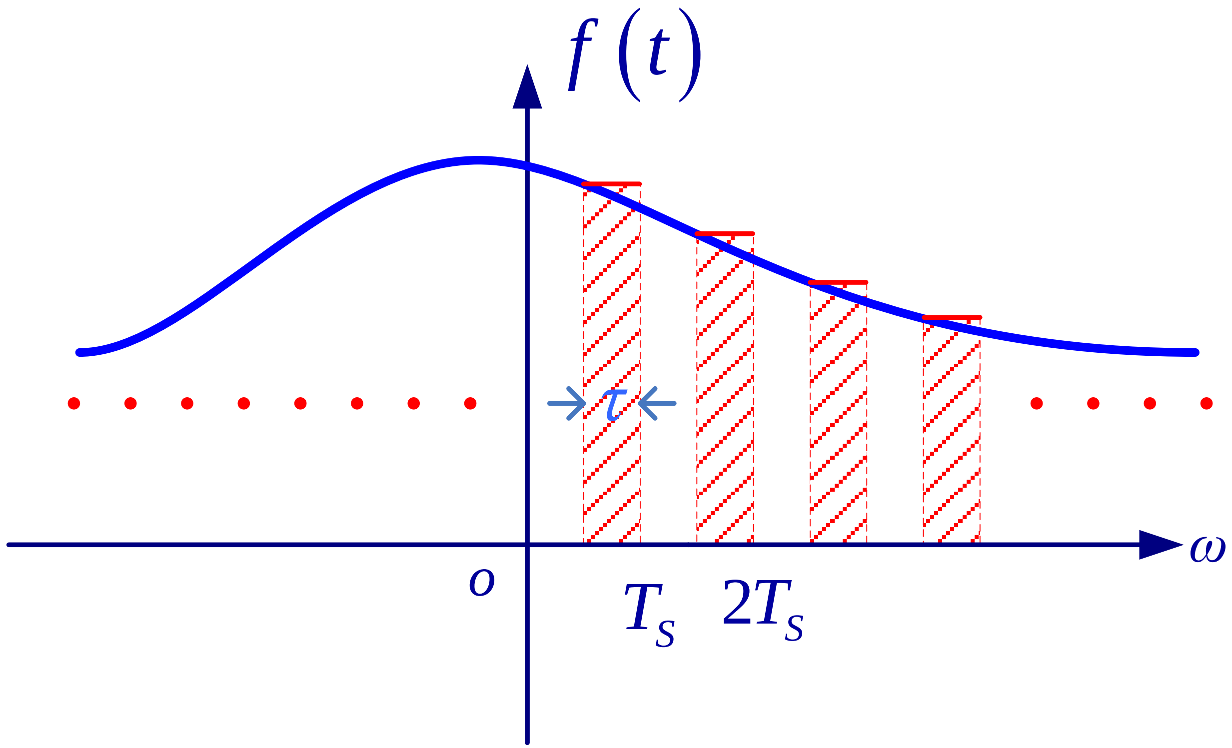
§4.6 采样定理

- 5.零阶采样保持器



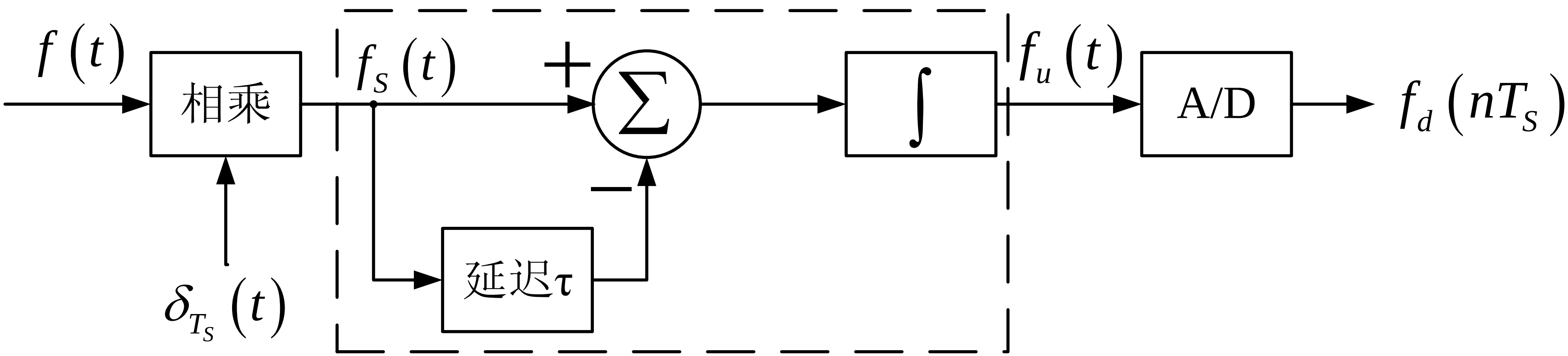
§ 4.6 采样定理

$-R_s=0, R_i=\infty$, 每T时间通一次, 断的时间为τ, 在断开的时间内做A/D转换。

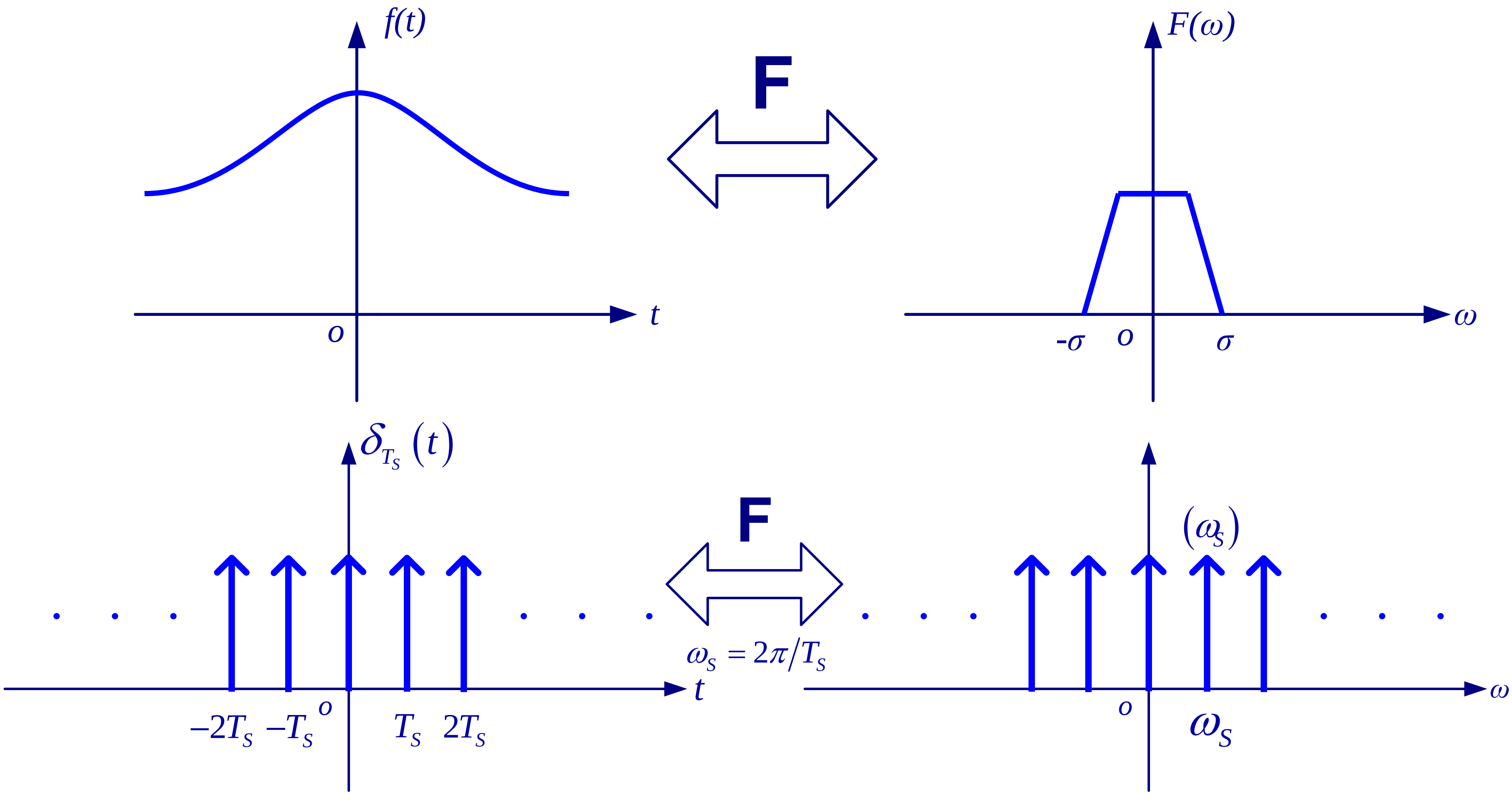


§ 4.6 采样定理

– 上面的电路可用下面的模型表示：

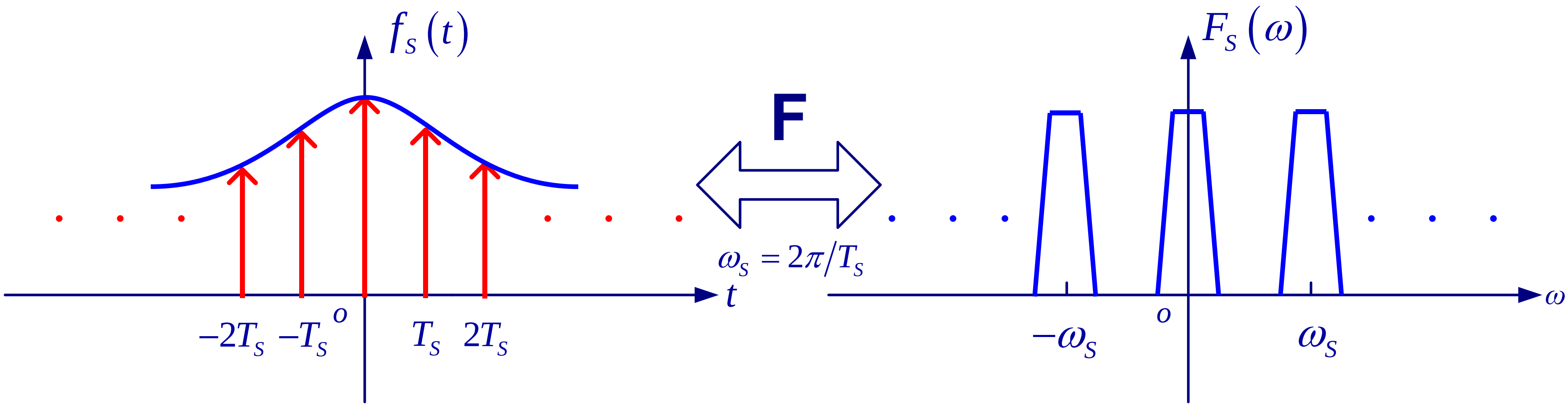


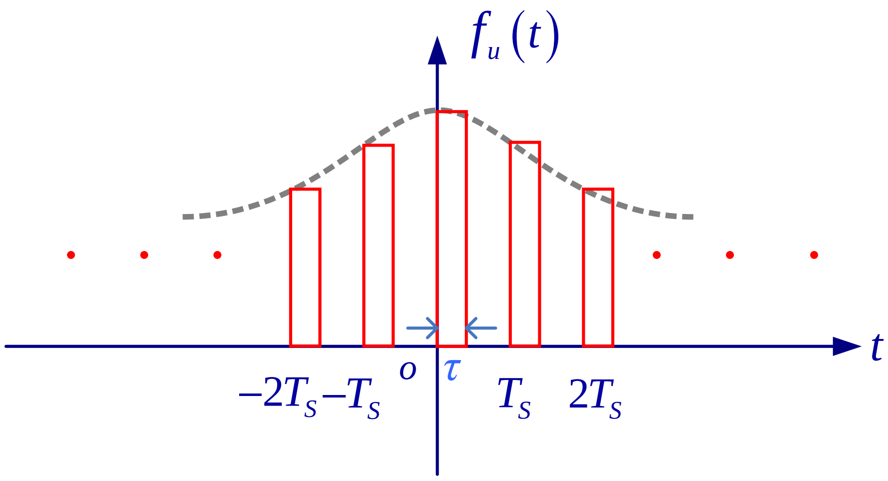
§4.6 采样定理



f(t)
F
F(ω)
t
o
ω
-σ
o
σ
$\delta_{T_S}(t)$
F
(ω_S)
. . .
. . .
$\omega_S = 2\pi/T_S$
. . .
. . .
t
ω
$-2T_S$
$-T_S$
o
T_S
$2T_S$
o
ω_S

§4.6 采样定理





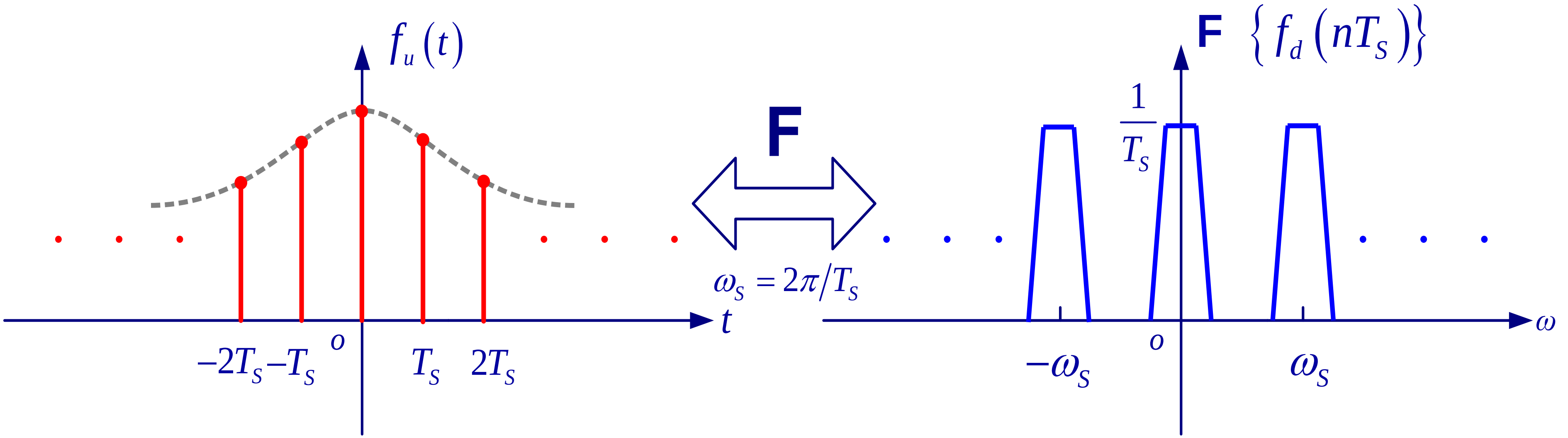
$f(t)$为模拟信号

$f_s(t)$为采样信号(离散时间信号)

$f_u(t)$为阶梯信号(连续时间信号)

$f_d(nT_s)$数字信号

§ 4.6 采样定理



$f_u(t)$
$-2T_S$ $-T_S$ o T_S $2T_S$
t
F
$\omega_S = 2\pi/T_S$
F $\{f_d(nT_S)\}$
$\frac{1}{T_S}$
$-\omega_S$ o ω_S
ω

§4.6 采样定理

- 6.时域采样定理
  - 定理（Nyquist时域采样定理）：

σ带限信号$f(t)$被$\delta_T(t)$理想采样,则当采样频率

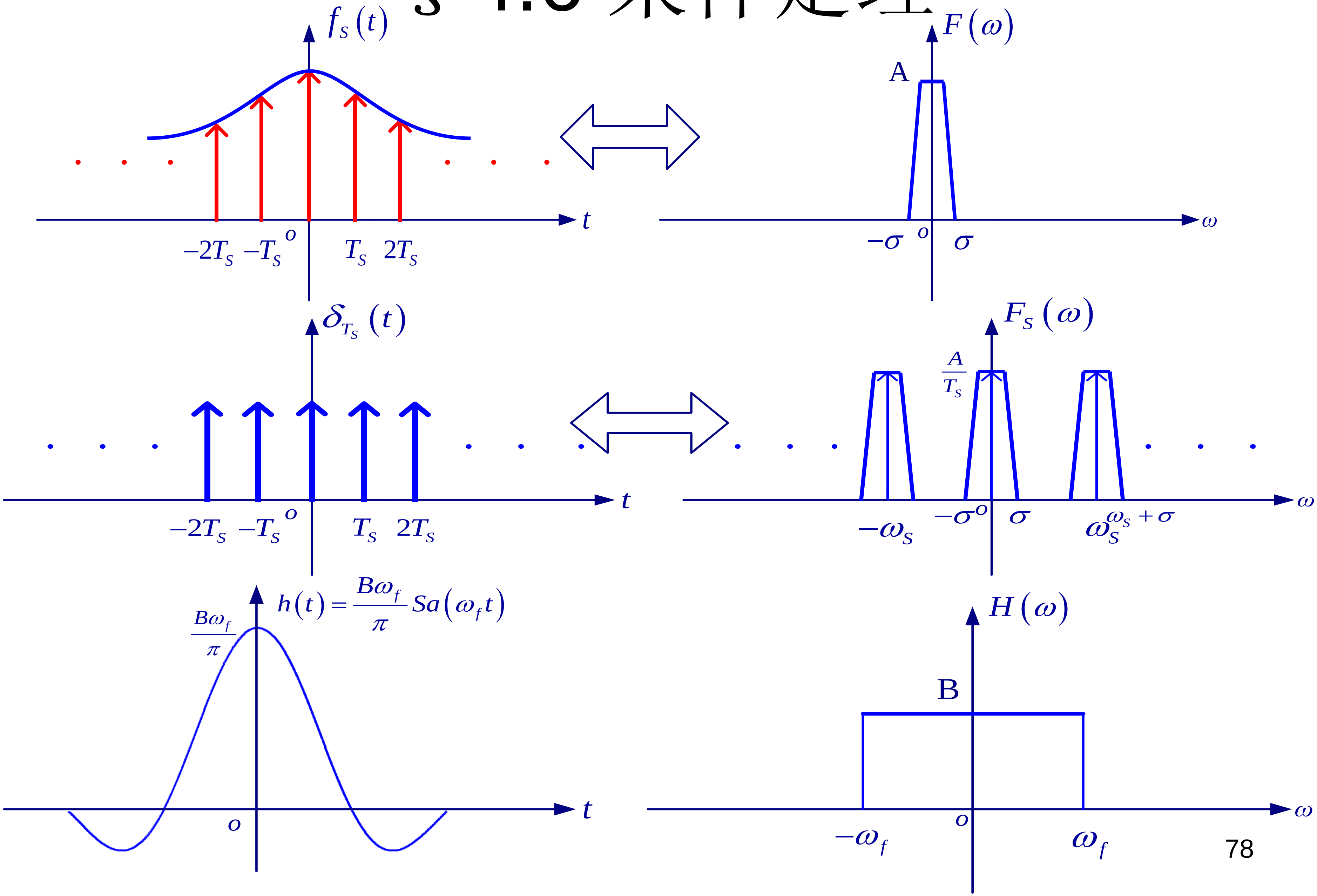
$f_s \geq 2f_\sigma(\sigma = 2\pi f_\sigma)$时,$f(t)$可用等间隔采样值

$f(nT_s)$唯一表示：

$$f(t) = K\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\mathrm{Sa}\left[\omega_f(t-nT_s)\right],$$

式中：$K \neq 0, \sigma \leq \omega_f \leq \omega_s - \sigma, \omega_s = 2\pi f_s$。

§4.6 采样定理



$f_S(t)$
$-2T_S$ $-T_S$ o T_S $2T_S$ t
$F(\omega)$
A
$-\sigma$ o σ ω
$\delta_{T_S}(t)$
$-2T_S$ $-T_S$ o T_S $2T_S$ t
$F_S(\omega)$
$\frac{A}{T_S}$
$-\omega_S$ $-\sigma$ o σ ω_S $\omega_S+\sigma$ ω
$h(t)=\frac{B\omega_f}{\pi}Sa(\omega_f t)$
$\frac{B\omega_f}{\pi}$
o t
$H(\omega)$
B
$-\omega_f$ o ω_f ω

§4.6 采样定理

$$f(t)=\left[f(t)\delta_T(t)\right]*h(t)=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s)\right]*\frac{B\omega_f}{\pi}\mathrm{Sa}\left(\omega_f t\right)$$

$$=\frac{B\omega_f}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\mathrm{Sa}\left[\omega_f\left(t-nT_s\right)\right]$$

注：要求$\sigma\le\omega_f\le\omega_s-\sigma$,此时不会重叠,可以恢复,即要求

$\omega_s\ge 2\sigma\quad rad/s,\ f_s\ge 2f_\sigma\quad Hz$。称$f_s=2f_\sigma$为Nyquist采样频率,

称$T_s=\dfrac{1}{f_s}=\dfrac{1}{2f_\sigma}$为Nyquist采样间隔。

§4.7 傅里叶变换的渐近性质

- 1. 定理（Riemann-Lebesgue Lemma）：

$$对\forall f(t)\in \mathrm{L}^1(-\infty,\infty),有\lim_{|\omega|\to\infty}\left|F(\omega)\right|=0。$$

注： 1)渐近 $F(\omega)=\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{|\omega|^{\alpha}}\right),|\omega|\to\infty,\alpha>0$

$$2)\lim_{|\omega|\to\infty}\left|F(\omega)\right|=\lim_{|\omega|\to\infty}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\right|=0,\forall f(t)\in \mathrm{L}^1(-\infty,\infty)$$

$$\lim_{|\omega|\to\infty}\left\langle f(t),e^{\mathrm{j}\omega t}\right\rangle=0,\forall f(t)\in \mathrm{L}^1(-\infty,\infty)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\lim_{|\omega|\to\infty}e^{-\mathrm{j}\omega t}\overset{广义}{\underset{依(1)}{=}}0\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{|\omega|\to\infty}\cos\omega t\overset{广义}{\underset{依(1)}{=}}0\\ \lim\limits_{|\omega|\to\infty}\sin\omega t\overset{广义}{\underset{依(1)}{=}}0\end{cases}$$

对常义的极限不等于零。

§4.7 傅里叶变换的渐近性质

- 2.有界变差函数（Bound Variation Function）
  - 定义：设$f(x)$是$[a,b]$上实函数,对于$[a,b]$上的任一分割T,$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,若

$$\bigvee_a^b (f,T) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1}\left|f(x_{i+1})-f(x_i)\right|<\infty,$$

则称$f(x)$是有界变差函数,记为BV(有界变差函数的全体)。

  - $f(x)\in BV \Rightarrow \begin{cases} f(x)\text{有界} \\ f(x)\text{可写成两个单调增有界函数之差} \end{cases}$

§ 4.7 傅里叶变换的渐近性质

– $f(x) \notin BV$,则 $f(x)$ 或者无界或者急剧振荡。

例：在含原点的 $\forall (a,b), \dfrac{1}{x}, \sin\dfrac{1}{x}$

– 有界变差函数未必绝对可积。

例：$\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$,在$x$□ 1时□ $\dfrac{1}{x}$不可积

§ 4.7 傅里叶变换的渐近性质

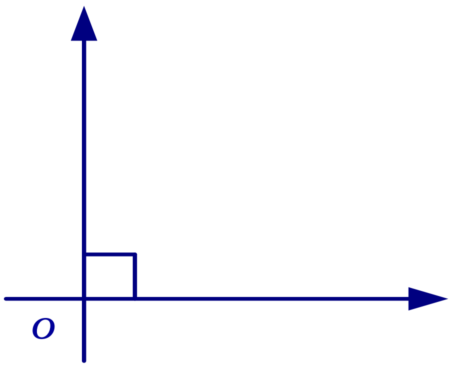
- 3. Riemann定理：若$f(t)\in \mathrm{L}^1(a,b)$，且$f(x)$为$(a,b)$上$BV((a,b)$可有限，可无限$)$，则$\left|F(\omega)\right| = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{|\omega|}\right)$，$|\omega|\to\infty$。

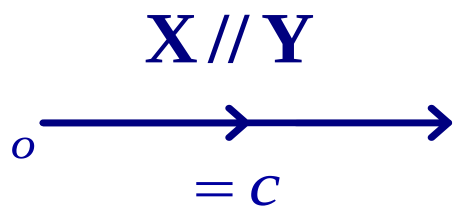
§4.7 傅里叶变换的渐近性质

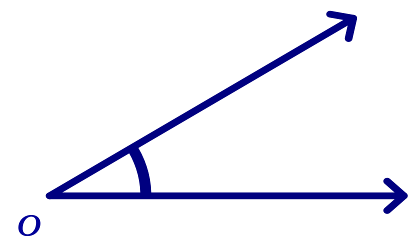
- 4. 定理：若$f(t),\cdots,f^{(n)}(t)$存在, 且有界变差, 绝对可积, 则$\left|F(\omega)\right| = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{|\omega|^{n+1}}\right)$。
  - 若$\left|F(\omega)\right| = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{|\omega|^{n+1}}\right), |\omega| \to \infty$, 则$f(t),\cdots,f^{(n-1)}(t)$连续, $f^{(n)}(t)$有界。

§ 4.8 相关函数与谱分析

- 1.相关（似）系数
  - R^n, $\quad \mathbf{X} \perp \mathbf{Y} \Leftrightarrow \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = 0$







$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = 0$$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle &= \langle \mathbf{X}, c\mathbf{X} \rangle \\ &= c\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \\ &= c\|\mathbf{X}\|_2^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle \\ &= \mathbf{X}^T\mathbf{Y} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\end{aligned}$$

§ 4.8 相关函数与谱分析

– 定义（相关（似）系数）：对 $\forall x, y \in \mathrm{L}^2[a,b]$,

定义 x 与 y 的相关系数：$\rho_{xy} = \dfrac{\langle x , y\rangle}{\|x\|_2 \|y\|_2}$

注： 1) $\because \left|\langle x , y\rangle\right| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \therefore -1 \leq \rho_{xy} \leq 1$

2) $\langle x , y\rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y \Leftrightarrow \rho_{xy} = 0$

3) $y = cx \Leftrightarrow x \square y \Leftrightarrow$

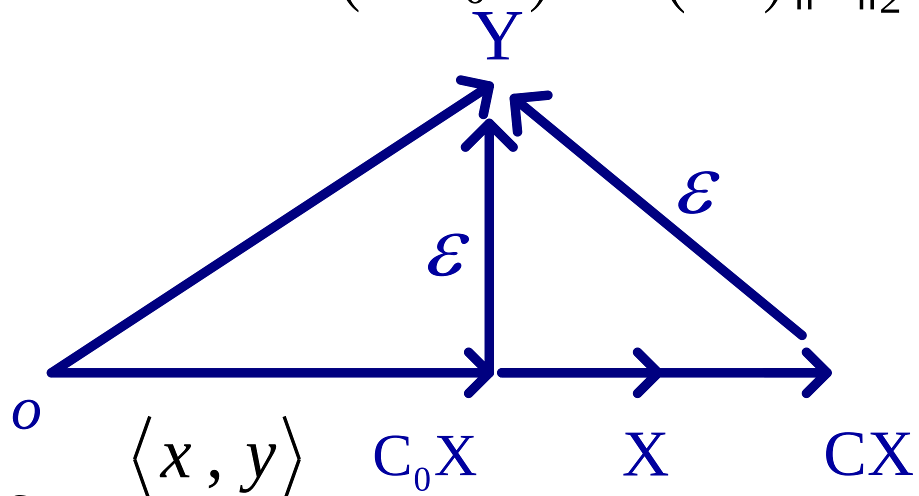
$$\rho_{xy} = \frac{\langle x , cx\rangle}{\langle x , x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle y , y\rangle^{\frac{1}{2}}} = \frac{c^{*} \langle x , x\rangle}{\langle x , x\rangle^{\frac{1}{2}} |c| \langle x , x\rangle^{\frac{1}{2}}} = \frac{c^{*}}{|c|} \left|\rho_{xy}\right| = 1$$

c 为正实数, $\rho_{xy} = 1$, 正相关; c 为负实数, $\rho_{xy} = -1$, 负相关。

§ 4.8 相关函数与谱分析

– 正交投影误差与相关系数

正交投影误差$\varepsilon \perp x$(或$c_0 x$)$\Leftrightarrow$(使)$\|\varepsilon\|_2$最小



$$\varepsilon = y - c_0 x$$

$$\langle x , y - c_0 x \rangle = 0 \Rightarrow c_0 = \frac{\langle x , y \rangle}{\langle x , x \rangle}$$

$$\|\varepsilon\|_2^{\,2} = \langle y - c_0 x , y - c_0 x \rangle = \langle y , y \rangle - c_0 \langle x , y \rangle - c_0^{\,*} \langle x , y \rangle^* + |c_0|^2 \langle x , x \rangle$$

§ 4.8 相关函数与谱分析

$$\min\|\varepsilon\|_2^{\ 2}=\langle y\,,\,y\rangle-\frac{\left|\langle x\,,\,y\rangle\right|^2}{\langle x\,,\,x\rangle}=\|y\|_2^{\ 2}-\frac{\left|\langle x\,,\,y\rangle\right|^2}{\|x\|_2^{\ 2}}$$

$$\frac{\min\|\varepsilon\|_2^{\ 2}}{\|y\|_2^{\ 2}}=1-\frac{\left|\langle x\,,\,y\rangle\right|^2}{\|x\|_2^{\ 2}\|y\|_2^{\ 2}}=1-\rho_{xy}^{\ \ 2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

其中,$\dfrac{\|\varepsilon\|_2}{\|y\|_2}$为投影的相对误差。

若$\rho_{xy}=\pm1\Leftrightarrow y\,\square\,x,(2)$式=0。

若$\rho_{xy}=0\Leftrightarrow y\perp x,(2)$式=1。

§4.8 相关函数与谱分析

- 2. $L^2(-\infty,+\infty)$中信号的相关函数与能谱

相关系数 $\rho_{xy}=\dfrac{\langle x\,,\,y\rangle}{\|x\|_2\,\|y\|_2}$

只能描述两个没有时差（时间原点相同）的函数之间的相关（似）性。

§ 4.8 相关函数与谱分析

- (1) 相关函数
  - 定义（互相关函数）： 对$\forall x(t), y(t) \in \mathrm{L}^2(-\infty, +\infty)$

    定义

$$R_{xy}(\tau) \triangleq \langle x(t), y(t-\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t-\tau) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) y^*(t) \mathrm{d}t$$

注： 1)$R_{xy}(t) = x(t) * y^*(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y^*(\tau - t) \mathrm{d}\tau$

2)共轭对称：$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) x^*(t-\tau) \mathrm{d}t$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t) x(t-\tau) \mathrm{d}t \right]^* = R_{xy}{}^*(-\tau)$$

§4.8 相关函数与谱分析

– 定义（自相关函数）：

$$R_{xx}(\tau)=\langle x(t), x(t-\tau)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^{*}(t-\tau)\,\mathrm{d}t$$

注： 1) $R_{xx}(t)=x(t)*x^{*}(-t)$

2) 共轭偶对称：$R_{xx}(\tau)=R_{xx}^{*}(-\tau)$

3) $R_{xx}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^{*}(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)\right|^{2}\mathrm{d}t=$能量

§4.8 相关函数与谱分析

– 定义（能谱（密度））：

$$S_{xx}(\omega)=\mathbf{F}\left\{R_{xx}(\tau)\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{xx}(\tau)e^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=X(\omega)X^{*}(\omega)$$

注： 1) $R_{xx}(\tau)=\mathbf{F}^{-1}\left\{S_{xx}(\omega)\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{xx}(\omega)e^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}f$

$$\Rightarrow R_{xx}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{xx}(\omega)\mathrm{d}f=\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)X^{*}(\omega)\mathrm{d}f$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)x^{*}(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)X^{*}(\omega)\mathrm{d}f$$ 能量不变性

(欧氏范数不变性/Parseval定理)

2) 相关函数反映的是动态的相关性,两个函数的时间原点不同。相关函数也可以规一化:

$$R_{xy}(\tau)=\frac{\langle x(t),y(t-\tau)\rangle}{\|x(t)\|_2\|y(t-\tau)\|_2}$$

§ 4.8 相关函数与谱分析

– 定义（互谱密度）：

$$S_{xy}(\omega) \triangleq \mathbf{F}\left\{R_{xy}(\tau)\right\} = \mathbf{F}\left\{x(t) * y^{*}(-t)\right\} = X(\omega)Y^{*}(\omega)$$

注：互谱密度没有可指称的物理意义。

§ 4.8 相关函数与谱分析

- (2) 相关定理：对$\forall x(t), y(t) \in \mathrm{L}^2(-\infty, +\infty)$，有 **F** $\left\{R_{xy}(\tau)\right\} = X(\omega)Y^*(\omega)$。

注： $R_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t)\mathrm{d}t = \left\langle x(t),\, y(t)\right\rangle$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)Y^*(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}f$$

$$\Rightarrow R_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)Y^*(\omega)\mathrm{d}f = \left\langle X(\omega), Y(\omega)\right\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle x(t),\, y(t)\right\rangle = \left\langle X(\omega), Y(\omega)\right\rangle$$

即$\mathrm{L}^2(-\infty, +\infty)$中傅里叶变换具有内积不变性。在$x(t) = y(t)$时, 即为能量不变性。

§4.8 相关函数与谱分析

- 3. 功率有限信号的相关函数与功率谱
  - 周期信号等不是能量有限信号。设$x(t)=x(t-nT_0)$,

$$x_T(t)=x(t)\left[u\left(t+\frac{T}{2}\right)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]\in \mathrm{L}^2\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right](T\text{不一定为}T_0)$$

$$R_T(\tau)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t$$

§4.8 相关函数与谱分析

- 定义：对功率有限信号：

$$R_{xx}(\tau) \triangleq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}R_T(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)x^*(t-\tau)\mathrm{d}t$$

- 定义（功率谱（密度））：

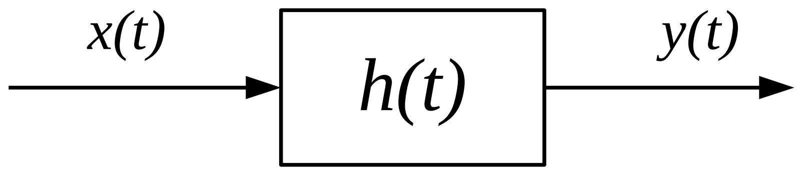
$$S_{xx}(\omega)=\mathbf{F}\left\{R_{xx}(\tau)\right\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathbf{F}\left\{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)x^*(t-\tau)\mathrm{d}t\right\}$$

- 功率：

$$R_{xx}(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)x^*(t)\mathrm{d}t$$

§4.8 相关函数与谱分析

- 4.线性定常系统的输入输出相关分析



$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$R_{yy}(t) = y(t) * y^*(-t) = \left[h(t) * x(t)\right] * \left[h^*(-t) * x^*(-t)\right]$$

$$= \left[h(t) * h^*(-t)\right] * \left[x(t) * x^*(-t)\right]$$

$$= R_{hh}(t) * R_{xx}(t)$$

$$S_{yy}(\omega) = S_{hh}(\omega) S_{xx}(\omega)$$

§4.9 匹配滤波器

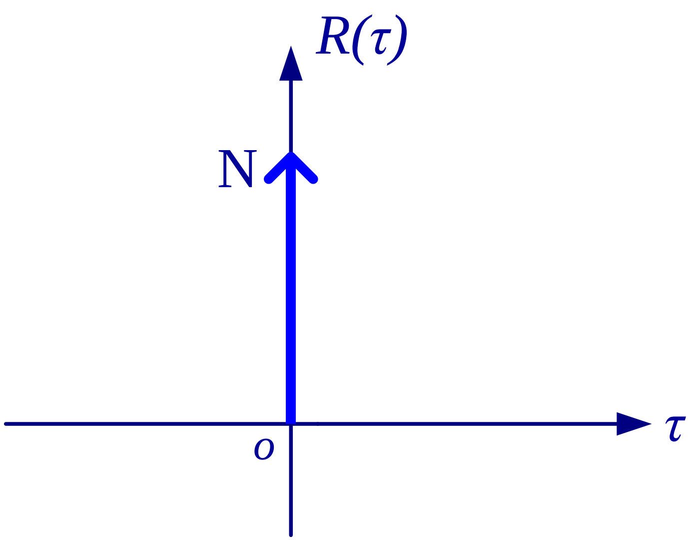
- 1. 问题的提法
  - 滤波：在信号＋白噪声（噪声＋干扰）中分离信号。
  - 匹配滤波：以发现信号为目的。
  - 维纳滤波：以克隆信号为目的。
  - 需要解决的问题：在加性白噪声的背景下把信号很好的分离

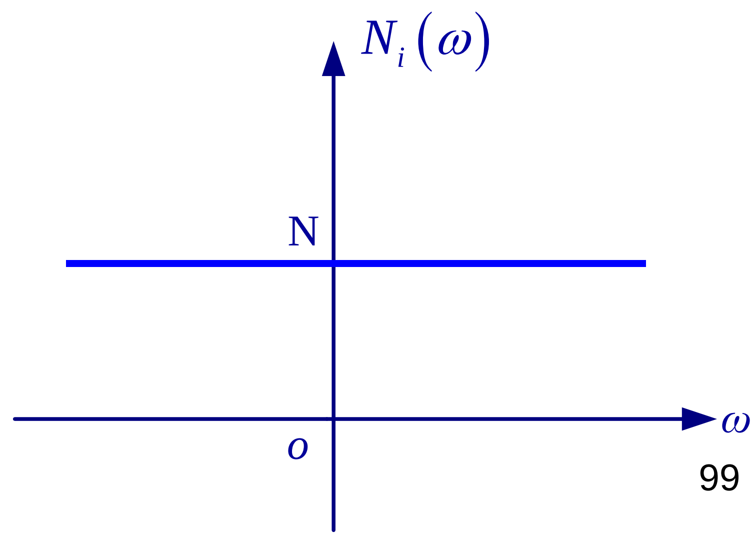
§ 4.9 匹配滤波器

- 2. 白噪声：$n_i(t)$

$$R(\tau) \triangleq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} n_i(t)\, n_i^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t = N\delta(\tau)$$

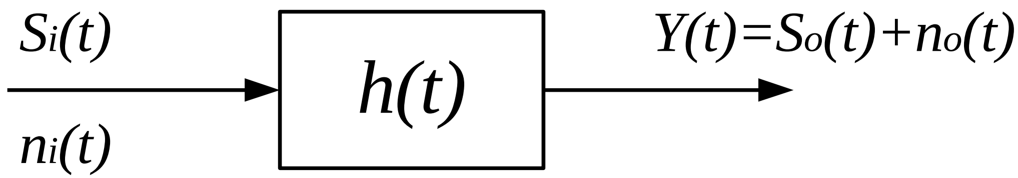
$$N_i(\omega) = \mathbf{F}\left\{R(\tau)\right\} = N \text{为常数}$$





§ 4.9 匹配滤波器

- 3. 匹配滤波器



– 定义：$\rho \triangleq \dfrac{s_0^2(t_0)}{\sigma^2} = \dfrac{\text{信号的瞬时功率}\big|_{t=t_0}}{\text{噪声的平均功率}}$ ……（$t=t_0$时）峰值信噪比

$$\sigma^2 = R_{n_0}(t) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} n_0(t)\, n_0^{*}(t)\,\mathrm{d}t,\ \text{输出噪声的平均功率}$$

$$s_0(t_0) = s_0(t)\big|_{t=t_0},\ s_0^2(t_0)\text{为}s_0(t)\text{在}t=t_0\text{时刻的瞬时功率}$$

§4.9 匹配滤波器

– 定义（匹配滤波器）：在加性白噪声背景下，使瞬时信噪比最大的线性滤波器谓之匹配滤波器。

– 定理（匹配滤波器）：在加性白噪声背景下，对匹配滤波的系统冲激响应：

$$h(t) = ks_i^*(t_0 - t)$$

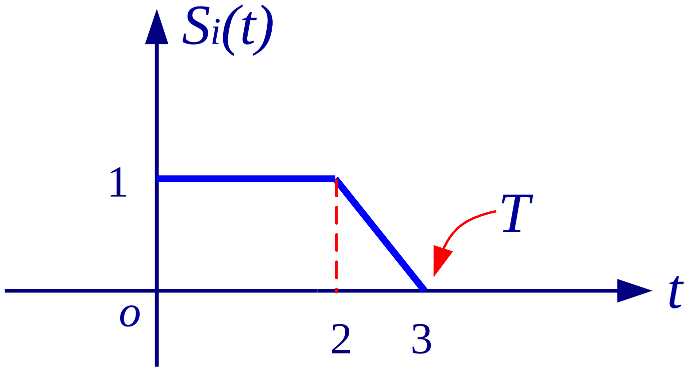
$$H(\omega) = \mathbf{F}\{h(t)\} = kS_i^*(\omega)e^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

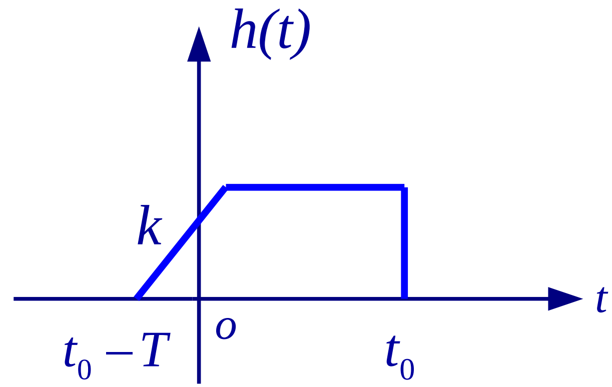
$$k \neq 0, t_0\text{为观测时刻}, S_i(\omega) = \mathbf{F}\{s_i(t)\}$$

§ 4.9 匹配滤波器

注：

– (1)





当$t_0 - T < 0 \Leftrightarrow t_0 < T$时，系统为非因果的；

当$t_0 - T \geq 0 \Leftrightarrow t_0 \geq T$时，系统为因果的。

– (2)

$$\rho_{\max} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left|S_i(\omega)\right|}_{\text{输入信号功率谱}}{}^{2}\, \mathrm{d}f}_{\text{输入信号功率}} \Big/ N$$

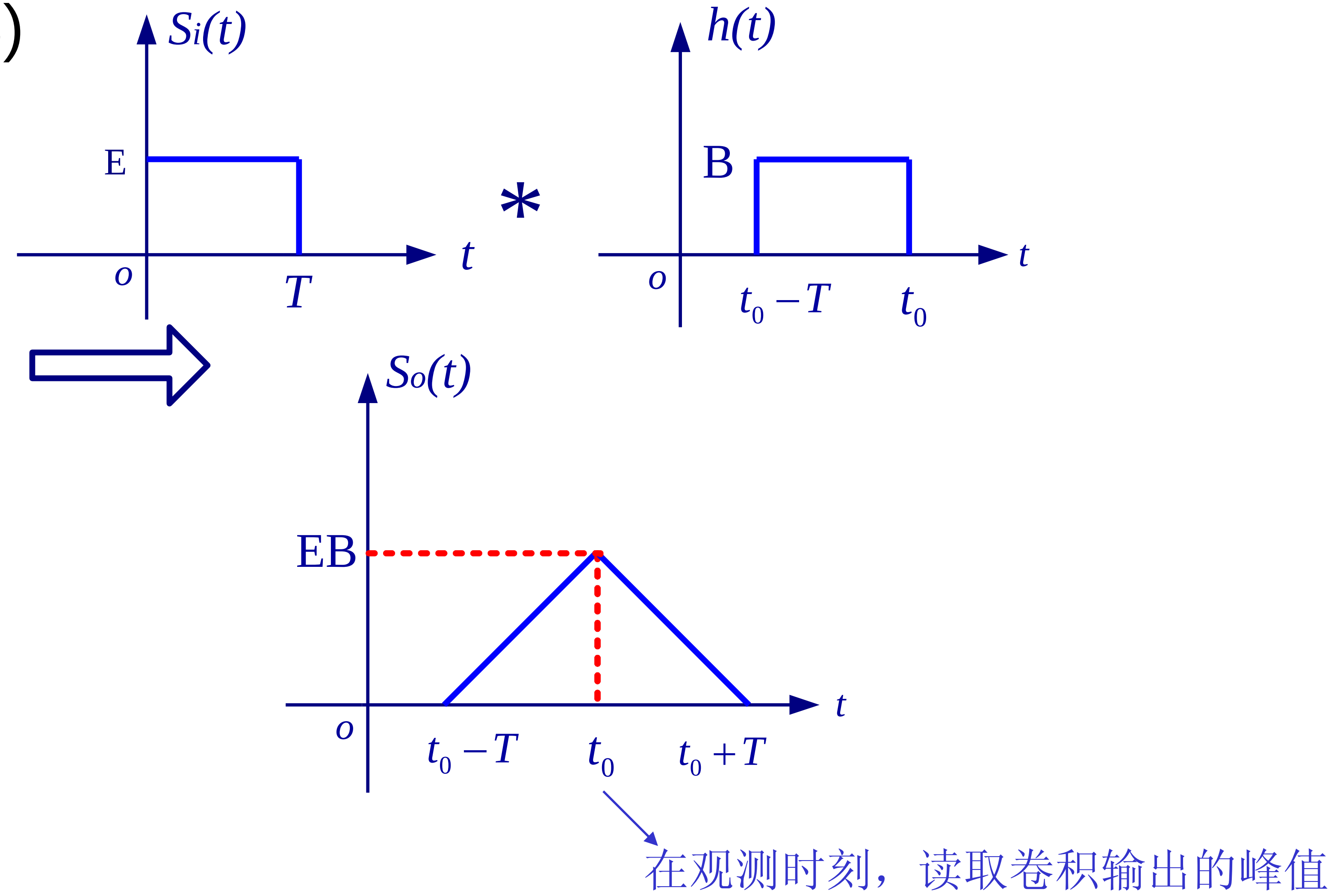
$$\updownarrow$$

$$\frac{E_b}{n_0}$$

输入白噪声的功率谱密度

§ 4.9 匹配滤波器

– (3)

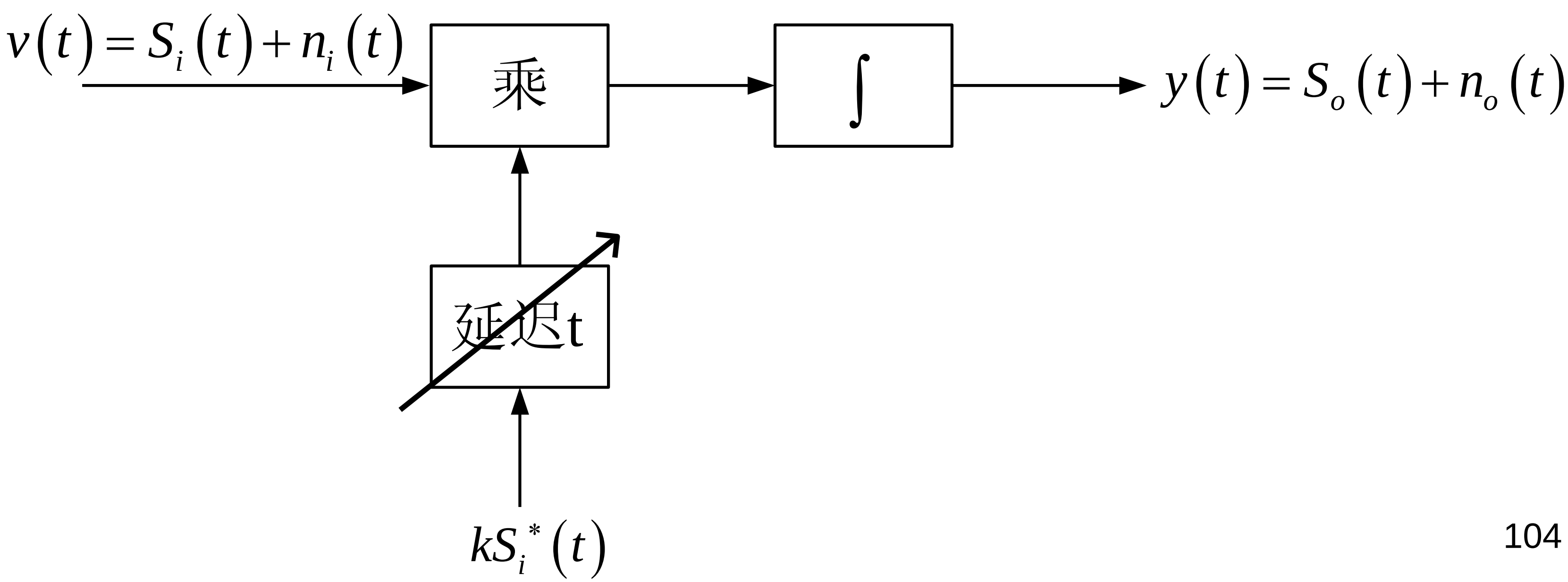


§4.9 匹配滤波器

- 4. 匹配滤波与相关接收等价

$$s_0\left(t\right)=s_i\left(t\right)*h\left(t\right)=s_i\left(t\right)*ks_i^*\left(t_0-t\right)$$

$$=k\int_{-\infty}^{+\infty}s_i\left(t\right)s_i^*\left(t_0-\tau+t\right)\mathrm{d}t=kR_{s_i}\left(\tau-t_0\right)$$



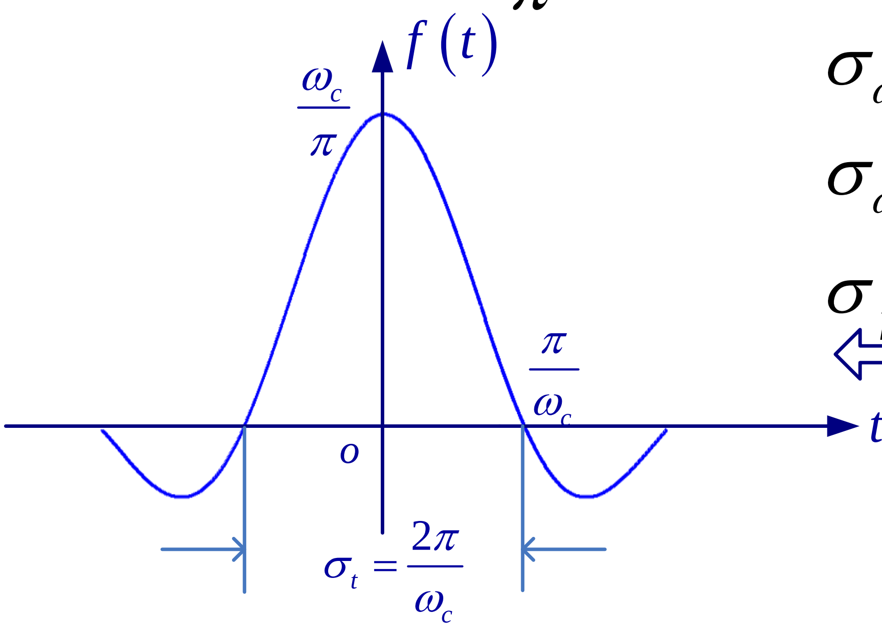
§4.10 等效带宽、等效时宽、Heisenberg测不准原理

- 带宽σ_f、时宽σ_t的定义不唯一，与$f(t)$、$\mathbf{F}\left\{f(t)\right\}$的特点和应用场景有关

- $\sigma_f \sigma_t \ge C$

§4.10 等效带宽、等效时宽、Heisenberg测不准原理

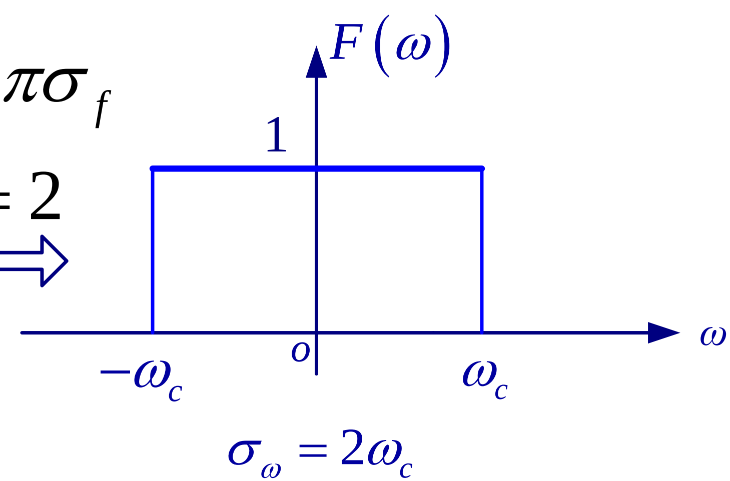
- 1. 按波形与谱结构定义
  - (1) $f(t)=\dfrac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_c t)\Leftrightarrow F(\omega)=u(\omega+\omega_c)-u(\omega-\omega_c)$



$\sigma_\omega\sigma_t=4\pi$

$\sigma_\omega=2\pi\sigma_f$

$\sigma_f\sigma_t=2$



  - (2) $\mathrm{Sa}^2(\omega_c t)\Leftrightarrow$ 三角窗 $\sigma_\omega\sigma_t=8\pi$

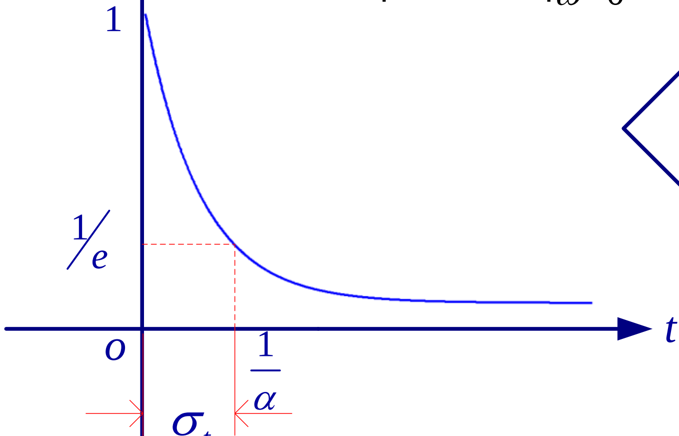
§ 4.10 等效带宽、等效时宽、Heisenberg测不准原理

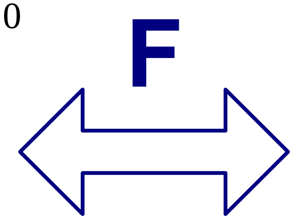
- 2. 按信号特征参数定义

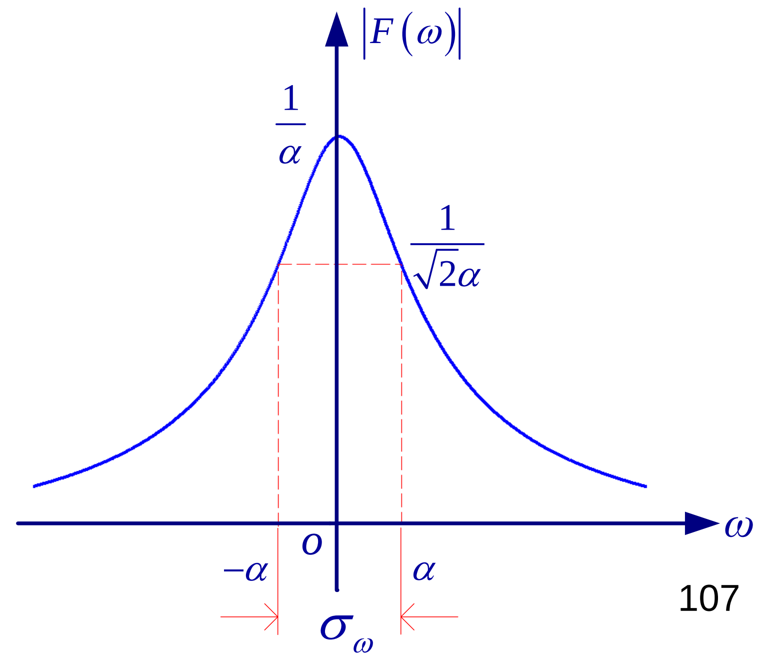
$$f(t)=e^{-\alpha t}u(t)\Leftrightarrow\left|F(\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$$

$$\sigma_t=\frac{1}{\alpha},\sigma_\omega=2\alpha,\sigma_\omega\sigma_t=2$$

$$20\lg\frac{\left|F(\omega)\right|_{\omega=\alpha}}{\left|F(\omega)\right|_{\omega=0}}=-3\text{dB}$$





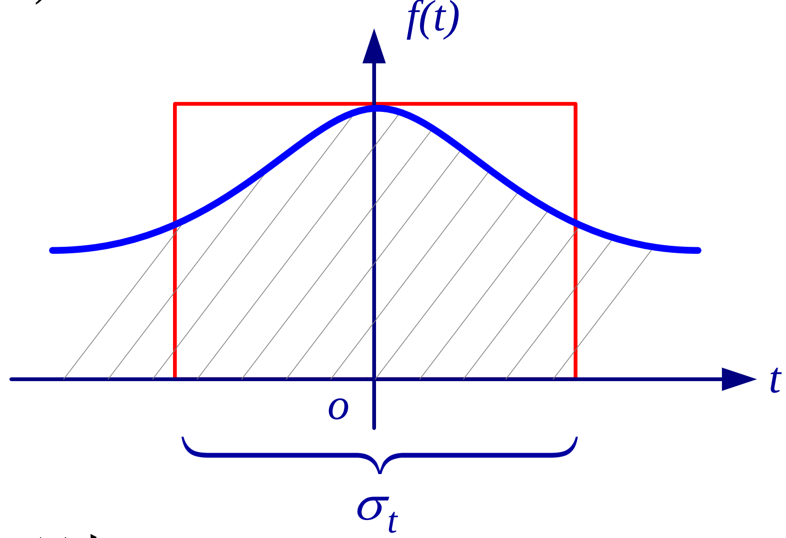


§4.10 等效带宽、等效时宽、Heisenberg测不准原理

- 3.等效矩形时宽与等效矩形带宽
  - 若 $f(t) \geq 0,\ f(0) = \max\limits_{\forall t} f(t),$

    $F(\omega) \geq 0, F(0) = \max\limits_{\forall t} F(\omega)$, 则定义等效矩形时宽

$$\sigma_t = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t}{f(0)}$$



定义等效矩形带宽

$$\sigma_f = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{d}f}{F(0)}, \text{则} \sigma_f \sigma_t = 1$$

§ 4.10 等效带宽、等效时宽、Heisenberg测不准原理

- 设 $f(t)$是变号函数,$F(\omega)$是复变函数,

  $$f(t_0)=\max_{\forall t}\left|f(t)\right|,\left|F(\omega_0)\right|=\max_{\forall \omega}\left|F(\omega)\right|,$$

  定义$\sigma_t \triangleq \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(t)\right|\mathrm{d}t}{\left|f(t_0)\right|},\sigma_f \triangleq \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F(\omega)\right|\mathrm{d}f}{\left|F(\omega_0)\right|},$

  则$\sigma_f\sigma_t \geq 1$。

§4.10 等效带宽、等效时宽、Heisenberg测不准原理

- 4. Heisenberg测不准原理
  - 对$\forall f(t) \in \mathrm{L}^2(-\infty, +\infty)$

$$\frac{|f(t)|^2}{\|f(t)\|_2^2} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{规一化瞬时功率}$$

$$\frac{|F(\omega)|^2}{\|F(\omega)\|_2^2} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{规一化能谱密度}$$

$$\|f(t)\|_2^2 = \|F(\omega)\|_2^2$$

§4.10 等效带宽、等效时宽、Heisenberg测不准原理

$$\zeta \triangleq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t\left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t}{\left\|f(t)\right\|_2^2} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{几何中心}$$

$$\xi \triangleq \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega\left|F(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega}{\left\|F(\omega)\right\|_2^2} \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{\left|F(\omega)\right|^2}{\left\|F(\omega)\right\|_2^2}\text{的几何中心}$$

$$\sigma_t^{\ 2} = \frac{1}{\left\|f(t)\right\|_2^2}\int_{-\infty}^{+\infty} (t-\zeta)^2 \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t \cdots\cdots\cdots\cdots \text{时间集散}$$

$$\sigma_f^{\ 2} = \frac{1}{2\pi\left\|F(\omega)\right\|_2^2}\int_{-\infty}^{+\infty} (\omega-\xi)^2 \left|F(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega \cdots\cdots\cdots\cdots \text{频率集散}$$

§4.10 等效带宽、等效时宽、Heisenberg测不准原理

- 定理：对$\forall f(t)\in \mathrm{L}^2(-\infty,+\infty), \lim\limits_{|t|\to\infty} f^2(t)t=0,$

  则$\sigma_f\sigma_t\geq\dfrac{1}{2}$，且等号成立时，$f(t)$为高斯信号。

§4.10 等效带宽、等效时宽、Heisenberg测不准原理

- 5. 一个信号不可能既带限又时限
  - 一个信号不可能在时域和频域同时具有紧支集
  - 若$f(t)$为τ时限：$f(t)=f(t)\left[u(t+\tau)-u(t-\tau)\right],$

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*2\tau\mathrm{Sa}(\omega\tau)\to\text{非带限}$$

  - 若$f(t)$是σ带限：$F(\omega)=F(\omega)\left[u(\omega+\sigma)-u(\omega-\sigma)\right],$

$$f(t)=f(t)*\frac{\sigma}{\pi}\mathrm{Sa}(\sigma t)\to\text{非时限}$$

§4.10 等效带宽、等效时宽、Heisenberg测不准原理

- 定理（时宽带宽积的尺度不变性）：

$$f(t)\text{的时宽带宽积}=f(\alpha t)\text{的时宽带宽积}\quad \alpha\neq 0。$$

  - 注：如果 $f(t)\in \mathrm{L}^1(-\infty,+\infty)$，在几乎处处相等的意义上，正演变换$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$ 的反演变换唯一。