信号与系统

第七章 离散信号、离散系统

第七章 离散信号、离散系统

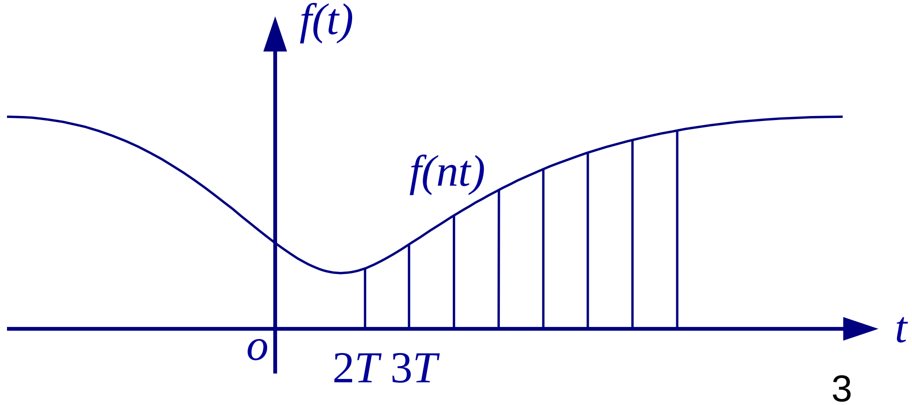
- §7.1 基本概念
- §7.2 线性定常系统差分方程的解
- §7.3 卷积

§7.1 基本概念

- 1. 离散时间信号—序列
  - 定义：自变量（宗量）为离散点的信号（函数），记为 $f(n), n \in Z$。

$$f(\cdot)\begin{cases}（离散）信号或采样或采后信号（取值无限精度）\\ 数字信号（取值有限精度）\end{cases}$$

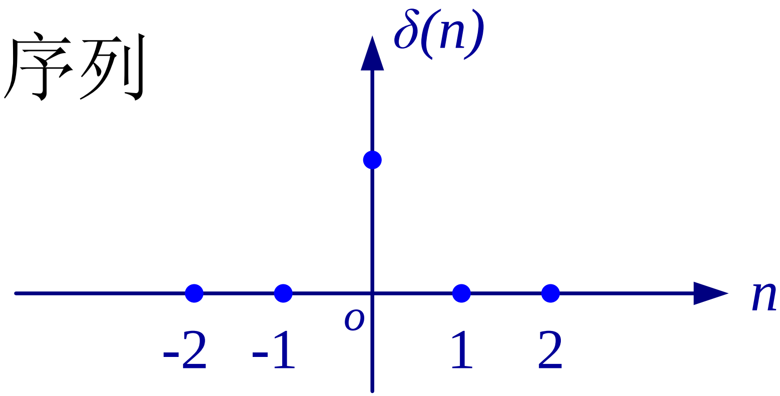
  - 连续时间信号离散化



§7.1 基本概念

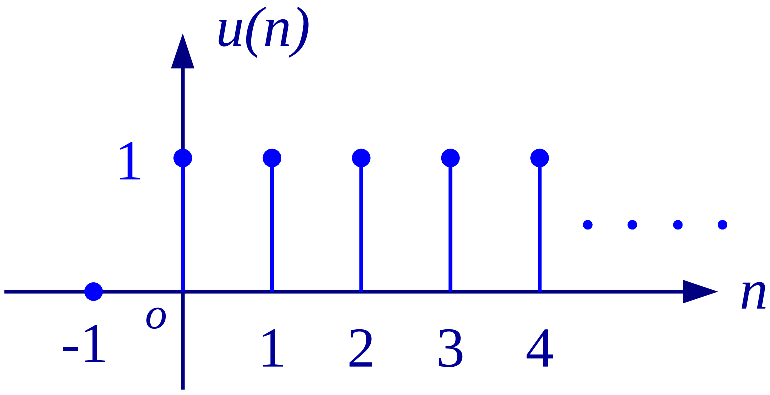
- 2.典型序列
  - (1)单位样值（冲激）序列

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$



  - (2)单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

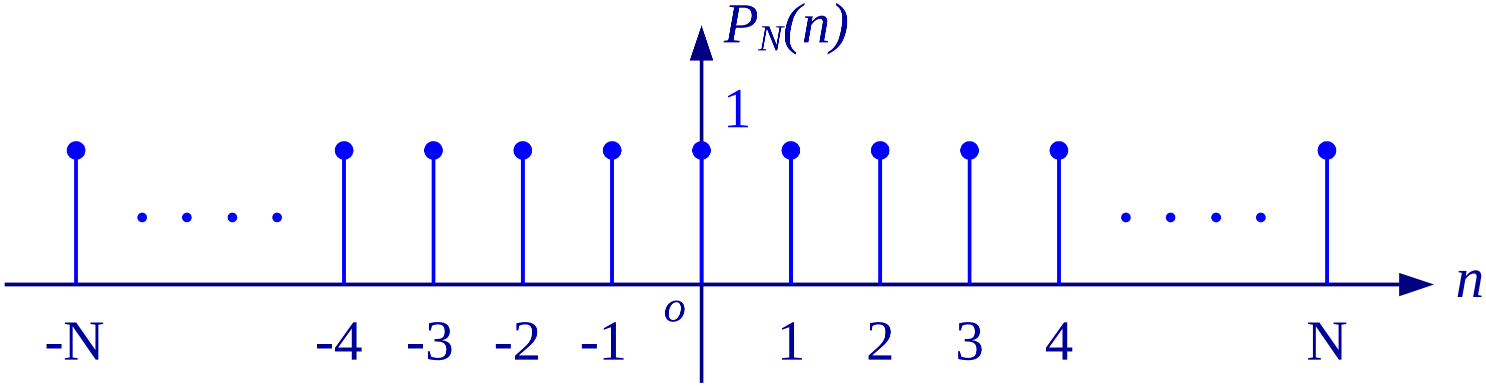


§ 7.1 基本概念

– (3)单位矩形序列

$$p_N(n)=\begin{cases}1\,, & |n|\le N\\ 0\,, & |n|>N\end{cases}$$

$$p_N(n)=u(n+N)-u\left[n-(N+1)\right]$$



§7.1 基本概念

– (4)正弦序列

$$x(n)=\sin n\omega_0=\sin nT\frac{2\pi}{T_0}$$

– (5)复指数序列

$$x(n)=e^{\mathrm{j}n\omega_0}=|x(n)|e^{\mathrm{j}\arg[x(n)]}$$

$$|x(n)|=1,\arg\left[x(n)\right]=n\omega_0$$

§ 7.1 基本概念

- 3.信号分解

$$x(m)\delta(n-m)=\begin{cases} x(n)\,, m=n \\ 0\,, m\neq n \end{cases}$$

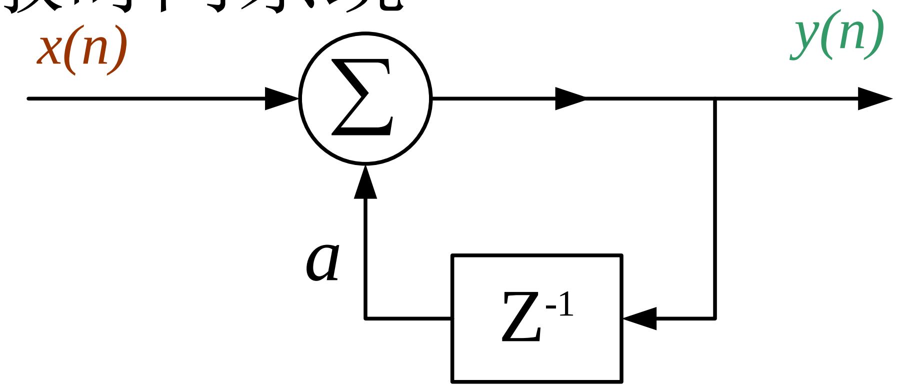
$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m)$$

$$\square\ x(n)*\delta(n)\cdots\cdots\cdots\cdots\text{卷积和}$$

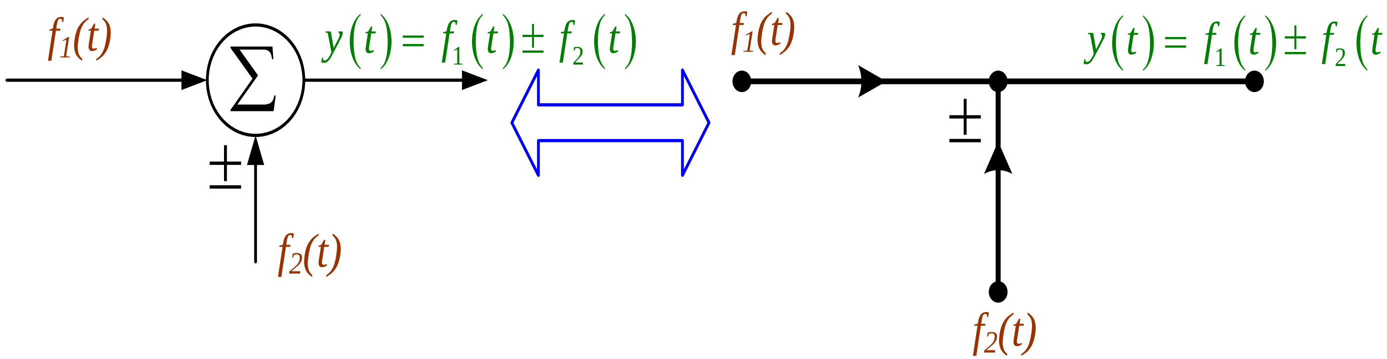
§ 7.1 基本概念

- 4.离散时间系统

例：



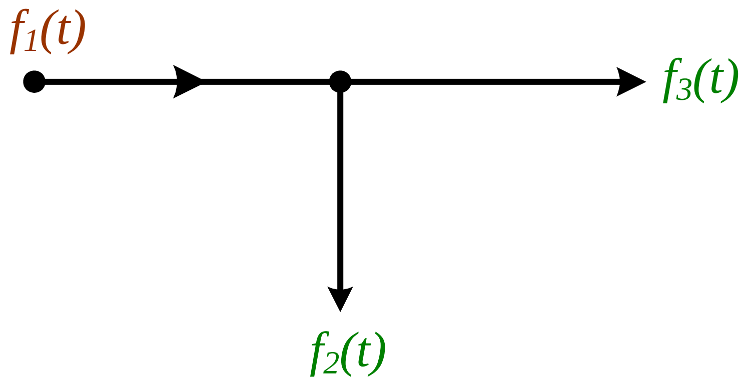
  - 求和



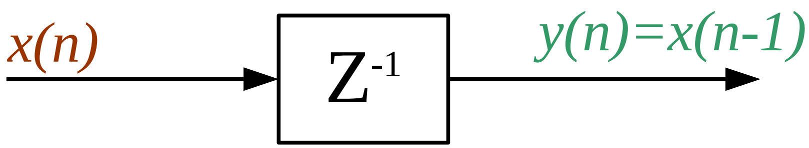
  - 相乘

§7.1 基本概念

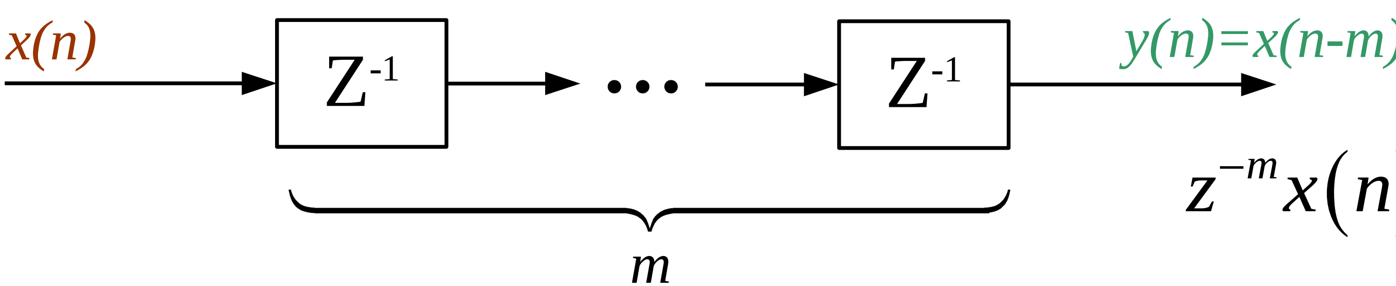
– 分支



– 一步延迟（一步右移）算子



$$z^{-1}x(n)=x(n-1)$$



$$z^{-m}x(n)=x(n-m)$$

§ 7.1 基本概念

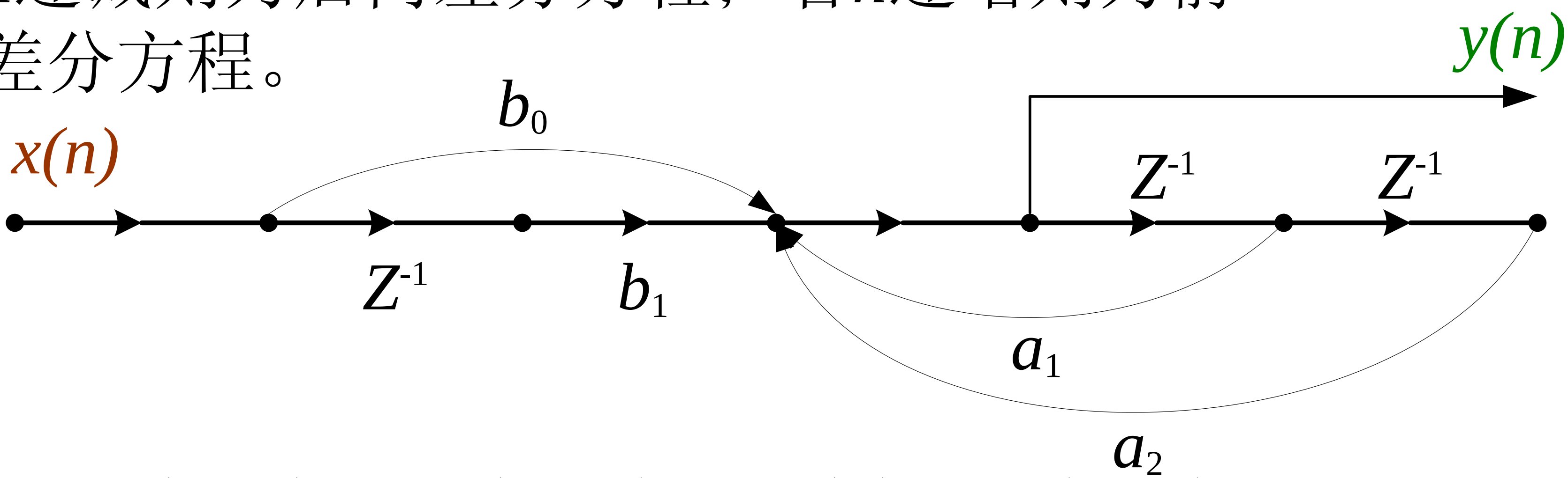
- 一步导前（一步左移）算子：$zx(n)=x(n+1)$
- 例：

$$y(n)=ay(n-1)+x(n)$$

$$y(n)-ay(n-1)=x(n)$$

若n递减则为后向差分方程；若n递增则为前向差分方程。

- 例：



$$y(n)=a_1y(n-1)+a_2y(n-2)+b_0x(n)+b_1x(n-1)$$

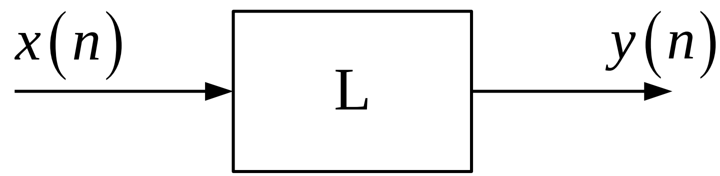
$$y(n)-a_1y(n-1)-a_2y(n-2)=b_0x(n)+b_1x(n-1)$$

§ 7.1 基本概念

– 零状态：$y(-1), y(-2), \cdots, y(-N) \equiv 0$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

– 零状态线性系统：



$y(n) = \mathrm{L}x(n)$

线性 $\mathrm{L}\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i(n) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathrm{L} x_i(n)$

由$y(n-k) = z^{-k} y(n), x(n-r) = z^{-r} x(n)$

$$\left[\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right] y(n) = \left[\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}\right] x(n)$$

§ 7.1 基本概念

$$y(n)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}x(n) \triangleq H\left(z^{-1}\right)x(n)$$

定义 $\mathrm{L}=H\left(z^{-1}\right)$为线性定常离散时间系统的系统算子，$N$为差分方程的阶。

§7.1 基本概念

- 5.零状态响应、零输入响应：
  - 零状态响应：$y(-1),y(-2),\cdots,y(-N)\equiv 0$
  - 零输入响应：$x(n)\equiv 0$, 由$y(-1),y(-2),\cdots,y(-N)\neq 0$ 造成
  - $y(n)=y_{zs}(n)+y_{zi}(n)$

§ 7.1 基本概念

- 6.单位样值响应 $h(n)$： $x(n) \longrightarrow \boxed{L=H(Z^{-1})} \longrightarrow y(n)$

$$h(n) \overset{\text{零状态}}{=} \mathrm{L}\delta(n) \overset{\text{线性定常}}{=} H\left(z^{-1}\right)\delta(n)$$

定常：$h(n)=\mathrm{L}\delta(n) \Leftrightarrow h(n-m)=\mathrm{L}\delta(n-m)$

$$x(n)=x(n)*\delta(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m)$$

$$y_{zs}(n)=\mathrm{L}x(n) \overset{\text{线性}}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\mathrm{L}\delta(n-m)$$

$$\overset{\text{定常}}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

§7.1 基本概念

- 7.因果系统：$h(n)=h(n)u(n)$
  - 因果信号：$f(n)=f(n)u(n)$
  - BIBO稳定：

    线性离散时间系统BIBO稳定$\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|h(n,m)\right|<\infty$

    线性定常系统BIBO稳定$\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|h(n)\right|<\infty$

    稳定信号$f(n)\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|f(n)\right|<\infty \Leftrightarrow f(n)\in l^1$

§7.2 线性定常系统差分方程的解

- 1.迭代方法：
  - 已知：$y(n)=ay(n-1)+x(n), x(n)=\delta(n), y(-1)=0$

    求：$y(n)=h(n)=?$

    解：$y(0)=ay(-1)+\delta(0)=1$

    $$y(1)=ay(0)+\delta(1)=a$$

    $$y(2)=ay(1)+\delta(2)=a^2$$

    $$\cdots\cdots$$

    $$y(n)=a^n u(n)$$

§ 7.2 线性定常系统差分方程的解

– 差分方程给出了递推形式

– 迭代法：已知 $A_{n*n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$，$A,\boldsymbol{Y}$ 已知, 求$\boldsymbol{X}=?$

构造 $A\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$

$$\boldsymbol{X}_{n+1}=\left(I-A\right)\boldsymbol{X}_n+\boldsymbol{Y}$$

若 $B=I-A$满足压缩映射条件，则对

$$\forall\boldsymbol{X}_0\Rightarrow\boldsymbol{X}_1\Rightarrow\boldsymbol{X}_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow\boldsymbol{X}_n=\boldsymbol{X},\quad n\to\infty$$

§7.2 线性定常系统差分方程的解

- 2.经典方法

$$\text{全解}=\left(\text{齐次解}+\text{特解}\right)\Big|_{\text{初始条件}}$$

  - 齐次解：

$$y(n)+a_1y_1(n-1)+\cdots+a_Ny_N(n-N)=0$$

令$y(n)=C\alpha^n$

$\alpha^N+a_1\alpha^{N-1}+\cdots+a_{N-1}\alpha+a_N=0$为特征方程,

$\alpha_1,\cdots,\alpha_N$为特征根

$$y_{\text{齐}}(n)=\left[C_1\alpha_1^n+\cdots+C_N\alpha_N^n\right]u(t)$$

§7.2 线性定常系统差分方程的解

– 特解：$x(n)=n^k, D(n)=D_k n^k+\cdots+D_1 n+D_0$

代入方程求$D_0,\cdots,D_k$

– 完全解：

$$y(n)=\left[\sum_{i=1}^{N} C_i \alpha_i^n + D(n)\right]u(n),$$

代入$y(0),y(1),\cdots,y(N-1)$确定$C_1,\cdots,C_N$，

其中$y(0),y(1),\cdots,y(N-1)$由$y(-1),\cdots,y(-N)$

迭代得到。

§7.2 线性定常系统差分方程的解

- 3.零输入响应/零状态响应：

$$y(n)=y_{zs}(n)+y_{zi}(n)$$

– 零输入响应：$x(n)=0 \Rightarrow D(n)=0$

$$y_{zi}(n)=\sum_{i=1}^{N} C_i \alpha_i^n \Big|_{\text{代入}y(-1),\cdots,y(-N)}$$

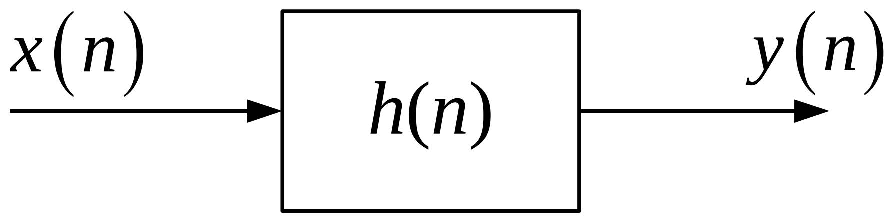
– 零状态响应：$\left[y(-1),\cdots,y(-N)\right]^T \equiv \mathbf{0}$

$$y_{zs}(n)=\left[\sum_{i=1}^{N} B_i \alpha_i^n + D(n)\right]u(n)$$

由$\left[y(-1),\cdots,y(-N)\right]^T=\mathbf{0}$迭代得到$\left[y(0),y(1),\cdots,y(N-1)\right]^T$，代入得到$B_i, i=1,\cdots,N$。

§ 7.3 卷积

- 1.卷积



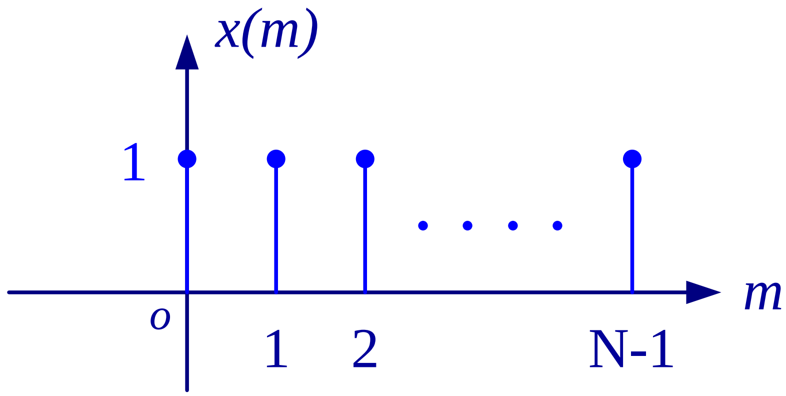
$$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)h(n-m)$$

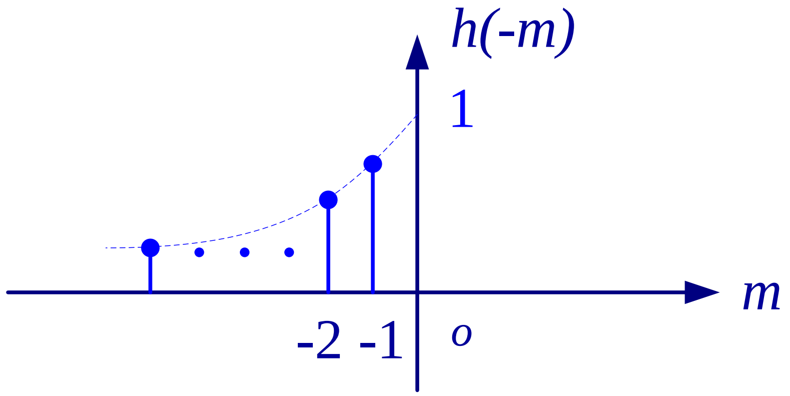
$$h(n)=h(n)*\delta(n)$$

§7.3 卷积

- 例：$h(n)=a^n u(n), x(n)=u(n)-u(n-N)$,求$y(n)=?$
- 解：$n \to m$

  反折 $\to$ 平移 $\to$ 相乘 $\to$ 求和 $\Rightarrow y(n)$



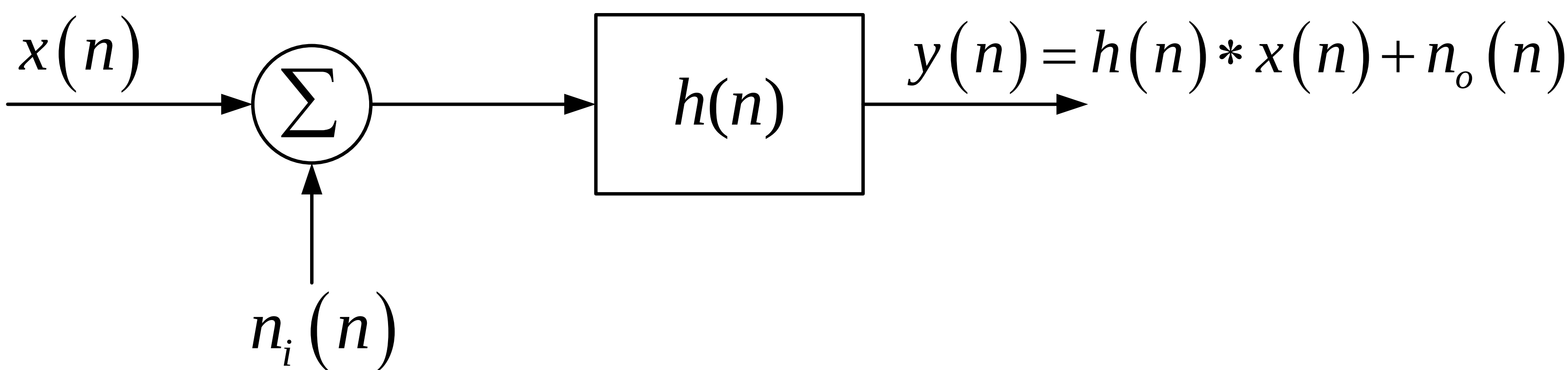


§7.3 卷积

- 2.反卷积
  - 问题：$y(n)=h(n)*x(n)$

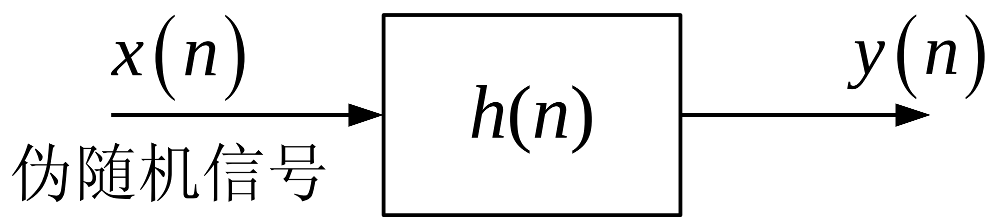
    卷积：已知：$h(n),x(n)$，求$y(n)$

    反卷积：已知：$y(n),h(n)$（或$x(n)$），求$x(n)$（或$h(n)$）
  - 病态反卷积：



§7.3 卷积

– $y(n)=h(n)*x(n),$



$$R_{xx}(m)=N\delta(m)$$

$$R_{xx}(m)=x(m)*x^{*}(-m)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)x^{*}(n-m)$$

当$R_{xx}(m)=N\delta(m)$时， $R_{yy}(m)=NR_{hh}(m)$。