

第八章 一阶电路分析

由一阶微分方程描述的电路称为一阶电路。本章主要讨论由直流电源驱动的含一个动态元件的线性一阶电路。含一个电感或一个电容加上一些电阻元件和独立电源组成的线性一阶电路，可以将连接到电容或电感的线性电阻单口网络用戴维宁 - 诺顿等效电路来代替（如图8-1和8-2所示）。

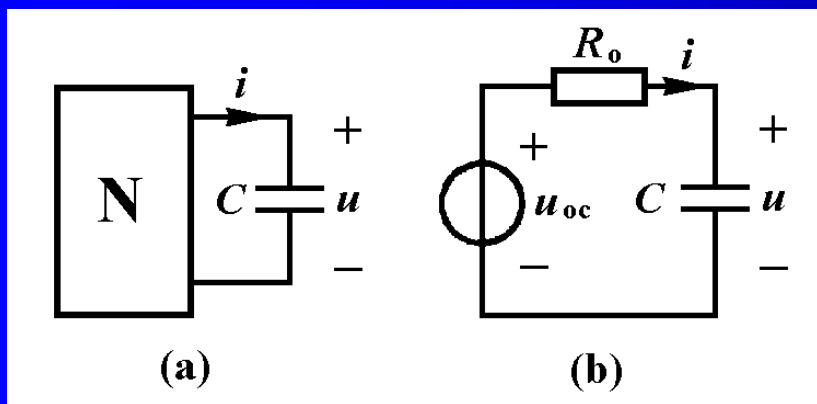


图8-1

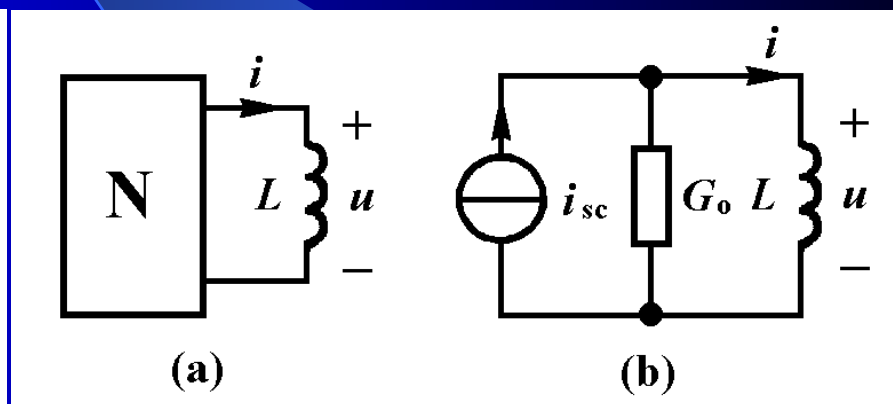
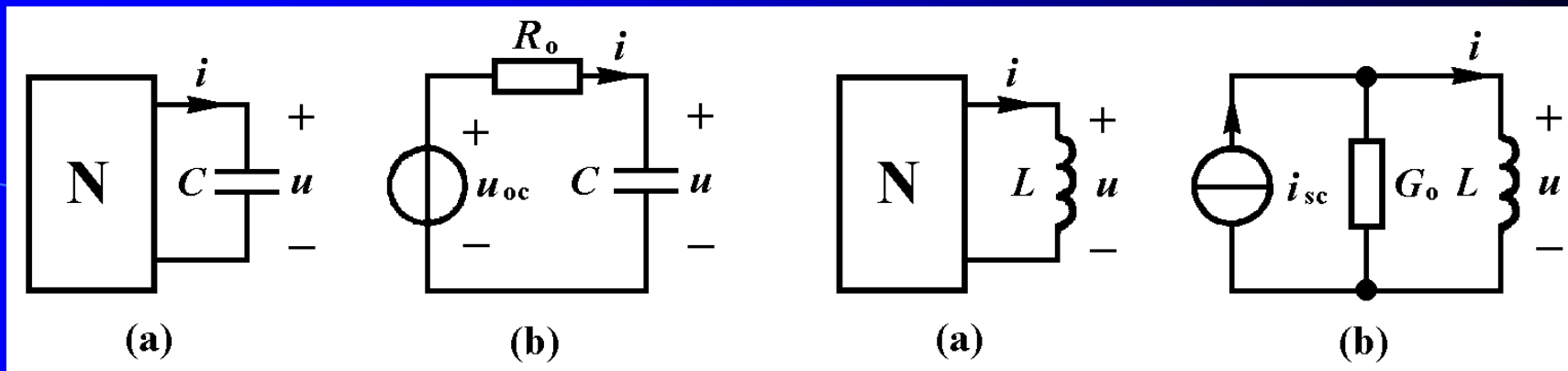


图8-2



我们的重点是讨论一个电压源与电阻及电容串联，或一个电流源与电阻及电感并联的一阶电路。

与电阻电路的电压电流仅仅由独立电源所产生不同，动态电路的完全响应则由独立电源和动态元件的储能共同产生。

仅由动态元件初始条件引起的响应称为零输入响应。

仅由独立电源引起的响应称为零状态响应。

动态电路分析的基本方法是建立微分方程，然后用数学方法求解微分方程，得到电压电流响应的表达式。

§ 8-1 零输入响应

一、RC电路的零输入响应

图8-3(a)所示电路中的开关原来连接在1端，电压源 U_0 通过电阻 R_0 对电容充电，假设在开关转换以前，电容电压已经达到 U_0 。在 $t=0$ 时开关迅速由1端转换到2端。已经充电的电容脱离电压源而与电阻 R 并联，如图(b)所示。

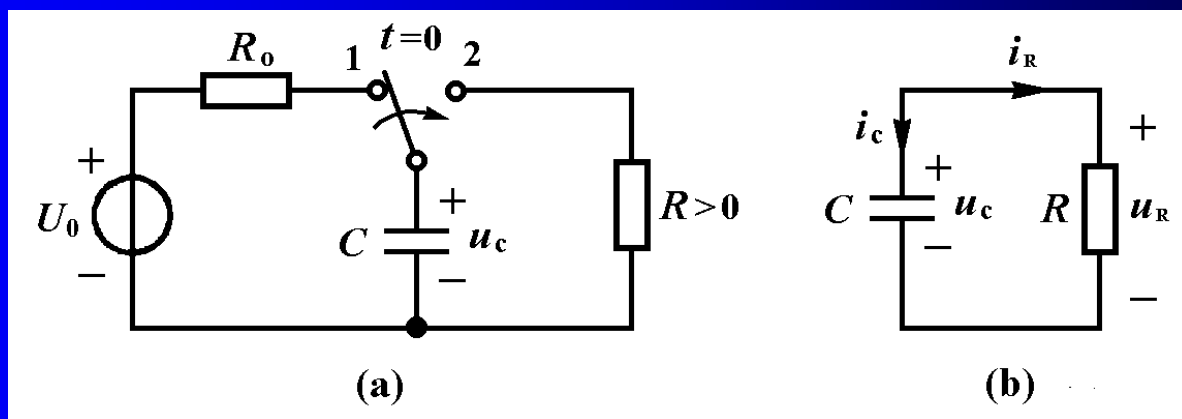
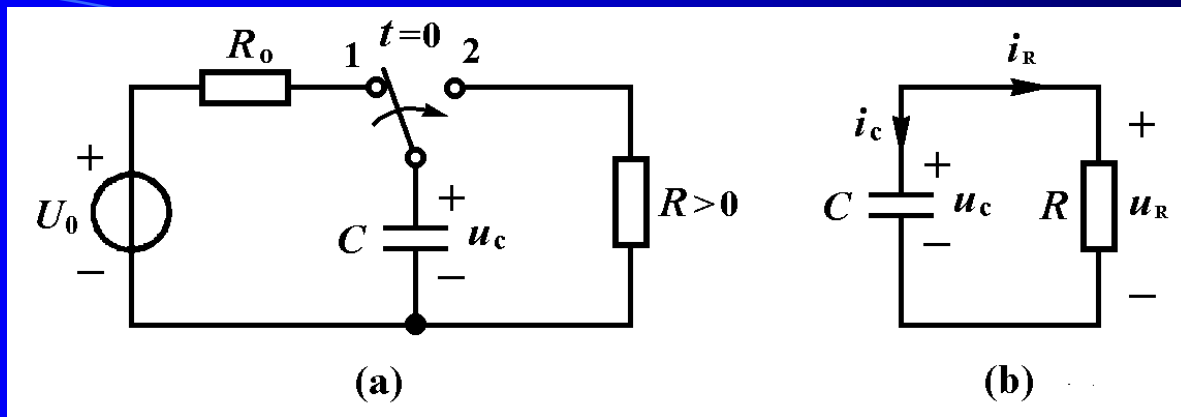


图8-3



我们先定性分析 $t>0$ 后电容电压的变化过程。当开关倒向2端的瞬间，电容电压不能跃变，即

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$$

由于电容与电阻并联，这使得电阻电压与电容电压相同，即

$$u_R(0_+) = u_C(0_+) = U_0$$

电阻的电流为

$$i_R(0_+) = \frac{U_0}{R}$$

该电流在电阻中引起的功率和能量为

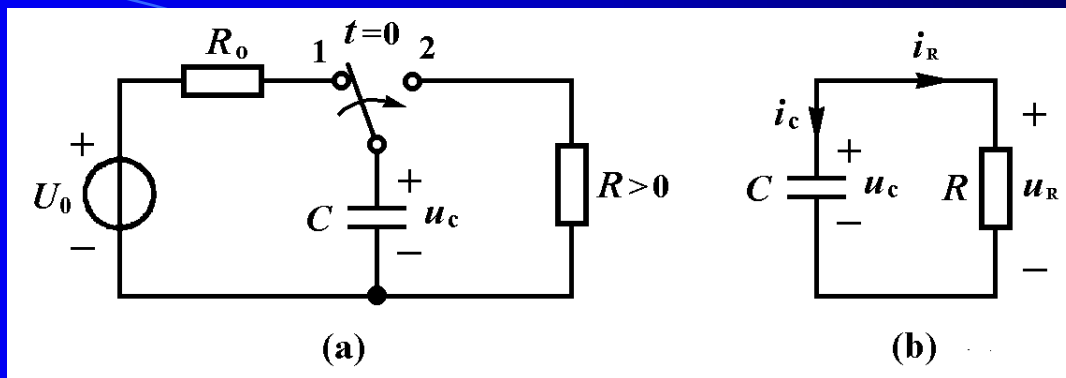
$$p(t) = Ri_R^2(t)$$

$$W_R(t) = R \int_0^t i_R^2(\xi) d\xi$$

电容中的能量为

$$W_C(t) = \frac{1}{2} Cu^2(t)$$

随着时间的增长，电阻消耗的能量需要电容来提供，这造成电容电压的下降。一直到电容上电压变为零和电容放出全部存储的能量为止。也就是电容电压从初始值 $u_C(0_+) = U_0$ 逐渐减小到零的变化过程。这一过程变化的快慢取决于电阻消耗能量的速率。



为建立图(b)所示电路的一阶微分方程，由KVL得到

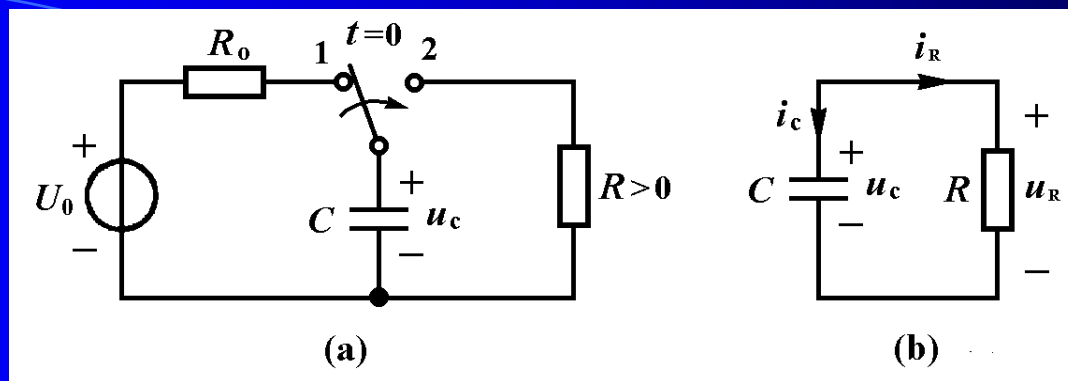
$$-u_R + u_C = 0$$

由KCL和电阻、电容的VCR方程得到

$$u_R = Ri_R = -Ri_C = -RC \frac{du_C}{dt}$$

代入上式得到以下方程

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad (t \geq 0) \quad (8-1)$$



这是一个常系数线性一阶齐次微分方程。其通解为

$$u_C(t) = Ke^{st}$$

代入式(8-1)中，得到特征方程

$$RCs + 1 = 0 \quad (8-2)$$

其解为

$$s = -\frac{1}{RC} \quad (8-3)$$

称为电路的固有频率。

于是电容电压变为

$$u_C(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$

式中 K 是一个常量，由初始条件确定。当 $t=0_+$ 时上式变为

$$u_C(0_+) = Ke^{-\frac{t}{RC}} = K$$

根据初始条件

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$$

求得

$$K = U_0$$

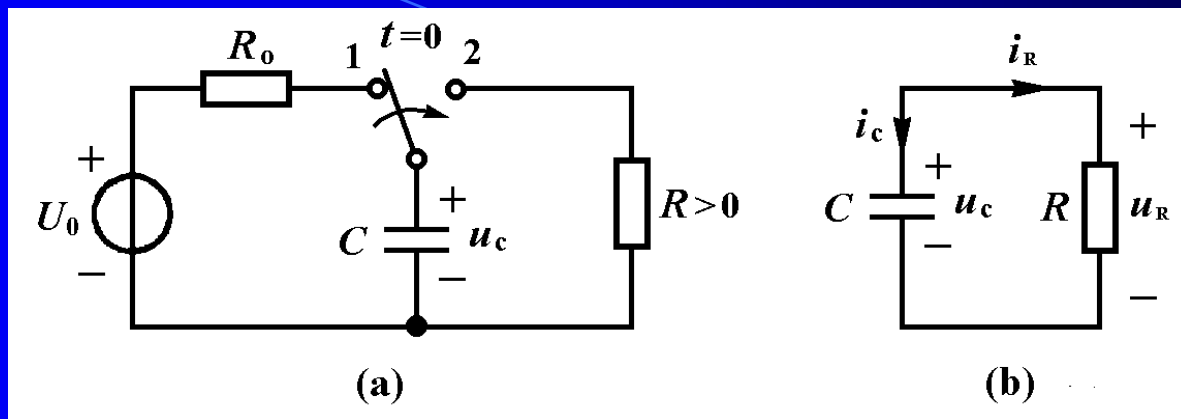


图8-3

最后得到图8-3(b)电路的零输入响应为

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0) \quad (8-4a)$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t > 0) \quad (8-4b)$$

$$i_R(t) = -i_C(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t > 0) \quad (8-4c)$$

从式8-4可见，各电压电流的变化快慢取决于 R 和 C 的乘积。令 $\tau=RC$ ，由于 τ 具有时间的量纲，故称它为 RC 电路的时间常数。引入 τ 后，式8-4表示为

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0) \quad (8-5a)$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t > 0) \quad (8-5b)$$

$$i_R(t) = -i_C(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t > 0) \quad (8-5c)$$

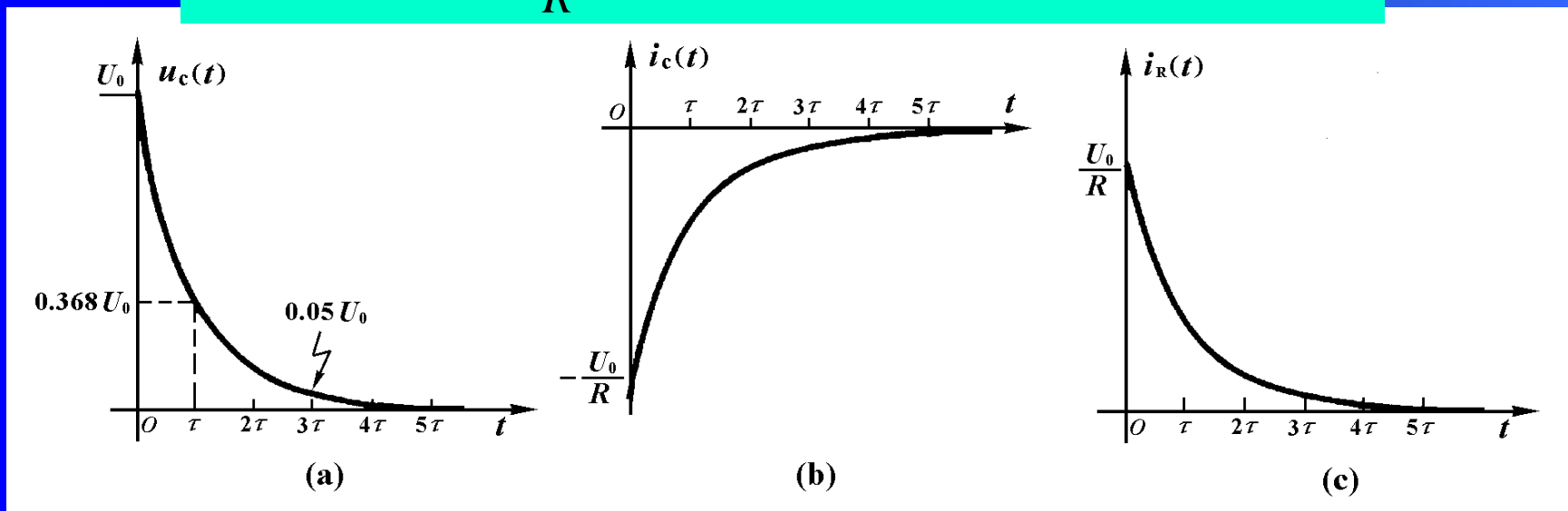


图8-4 RC 电路零输入响应的波形曲线

下面以电容电压 $u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ 为例，说明电压的变化与时间常数的关系。

当 $t=0$ 时， $u_C(0)=U_0$ ，当 $t=\tau$ 时， $u_C(\tau)=0.368U_0$ 。表8-1 列出 t 等于 $0, \tau, 2\tau, 3\tau, 4\tau, 5\tau$ 时的电容电压值，由于波形衰减很快，实际上只要经过 $4 \sim 5\tau$ 的时间就可以认为放电过程基本结束。

| t | 0 | τ | 2τ | 3τ | 4τ | 5τ | ∞ |
|----------|-------|------------|------------|------------|------------|------------|----------|
| $u_C(t)$ | U_0 | $0.368U_0$ | $0.135U_0$ | $0.050U_0$ | $0.018U_0$ | $0.007U_0$ | 0 |

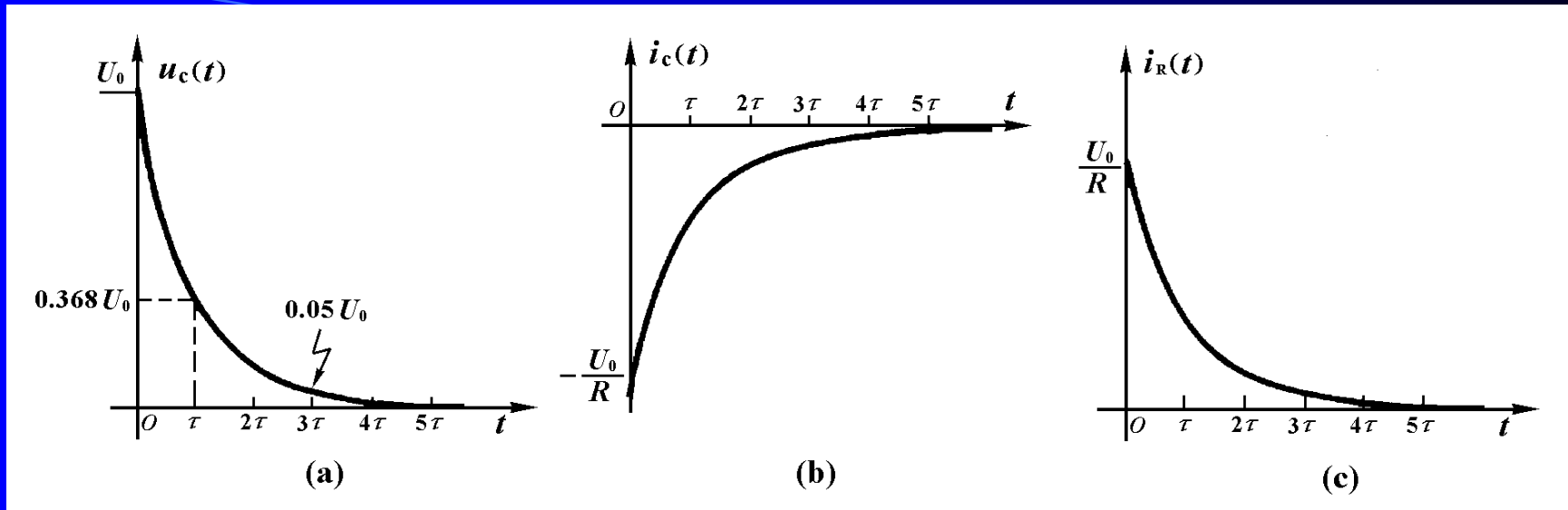


图8-4 RC电路零输入响应的波形曲线

电阻在电容放电过程中消耗的全部能量为

$$W_R = \int_0^{\infty} i_R^2(t) R dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right)^2 R dt = \frac{1}{2} C U_0^2$$

计算结果证明了电容在放电过程中释放的能量的确全部转换为电阻消耗的能量。

由于电容在放电过程中释放的能量全部转换为电阻消耗的能量。电阻消耗能量的速率直接影响电容电压衰减的快慢，我们可以从能量消耗的角度来说明放电过程的快慢。

例如在电容电压初始值 U_0 不变的条件下，增加电容 C ，就增加电容的初始储能，使放电过程的时间加长；若增加电阻 R ，电阻电流减小，电阻消耗能量减少，使放电过程的时间加长。

这就可以解释当时间常数 $\tau=RC$ 变大，电容放电过程会加长的原因。

例8-1 电路如图8-5(a)所示, 已知电容电压 $u_C(0_-)=6\text{V}$ 。
 $t=0$ 闭合开关, 求 $t>0$ 的电容电压和电容电流。

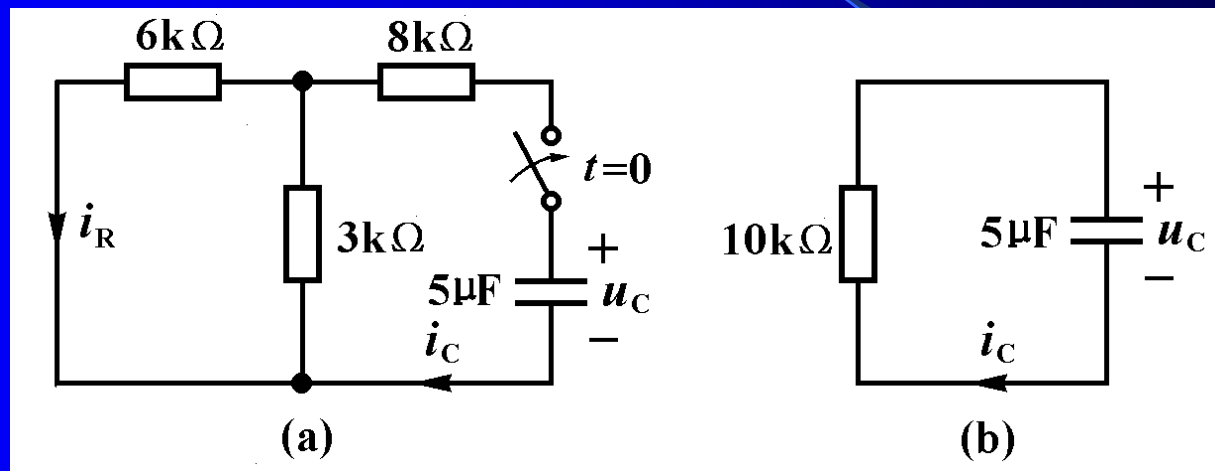
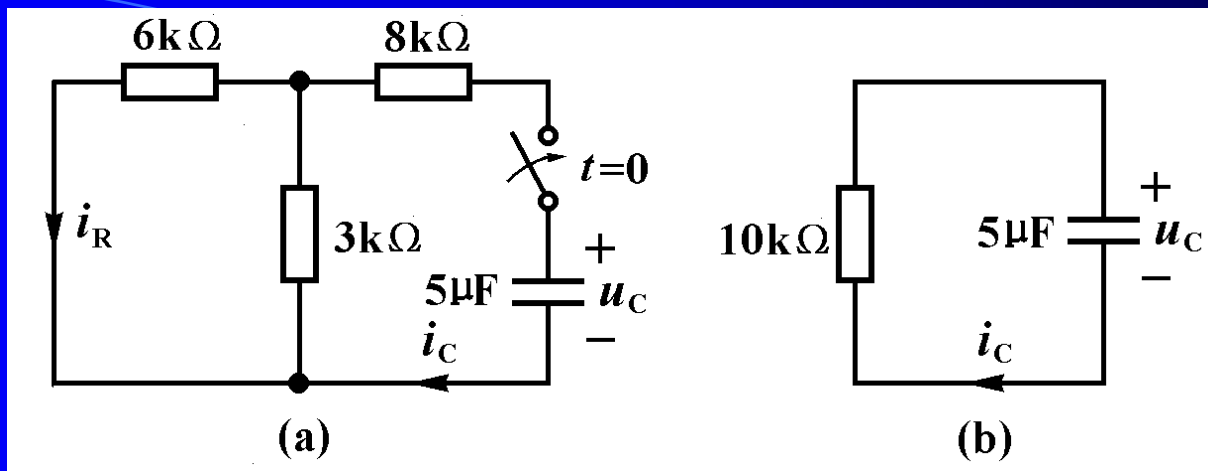


图8-5 例8-1

解: 在开关闭合瞬间, 电容电压不能跃变, 由此得到

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 6\text{V}$$

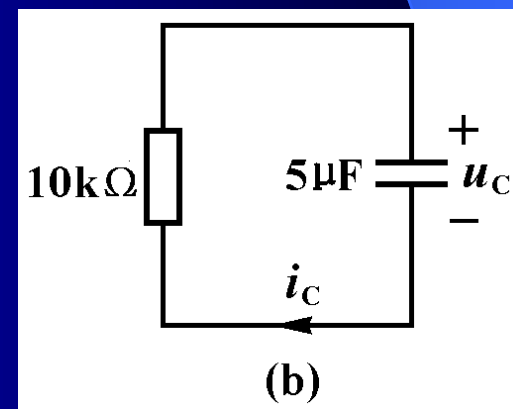


将连接于电容两端的电阻单口网络等效于一个电阻，其电阻值为

$$R_o = \left(8 + \frac{6 \times 3}{6 + 3}\right) \text{k}\Omega = 10 \text{k}\Omega$$

得到图(b)所示电路，其时间常数为

$$\begin{aligned} \tau &= 2 \times 10^{-5} \text{s} = 0.02 \text{s} \\ \tau &= RC = 10 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-6} \text{s} \end{aligned}$$



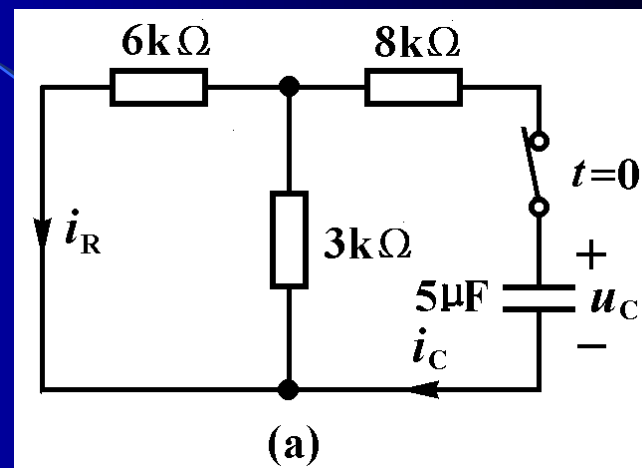
根据式8-5得到

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 6e^{-20t} \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= -\frac{6}{10 \times 10^3} e^{-20t} \text{ mA}$$

$$= -0.6e^{-20t} \text{ mA} \quad (t > 0)$$



电阻中的电流 $i_R(t)$ 可以用与 $i_C(t)$ 同样数值的电流源代替电容，用电阻并联的分流公式求得 $i_R(t)$

$$i_R(t) = -\frac{3}{3+6} i_C(t) = \frac{1}{3} \times 0.6e^{-20t} \text{ mA} = 0.2e^{-20t} \text{ mA}$$

二、 RL 电路的零输入响应

我们以图8-6(a)电路为例来说明 RL 电路零输入响应的计算过程。

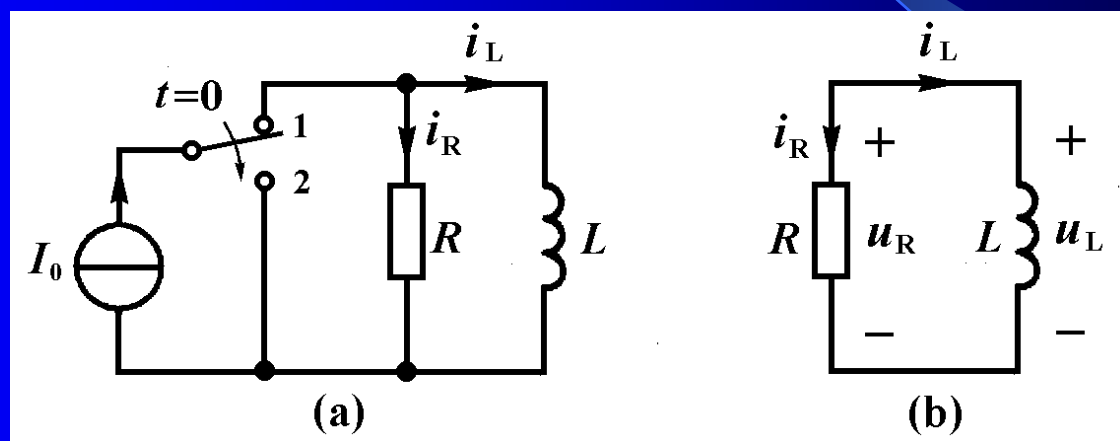
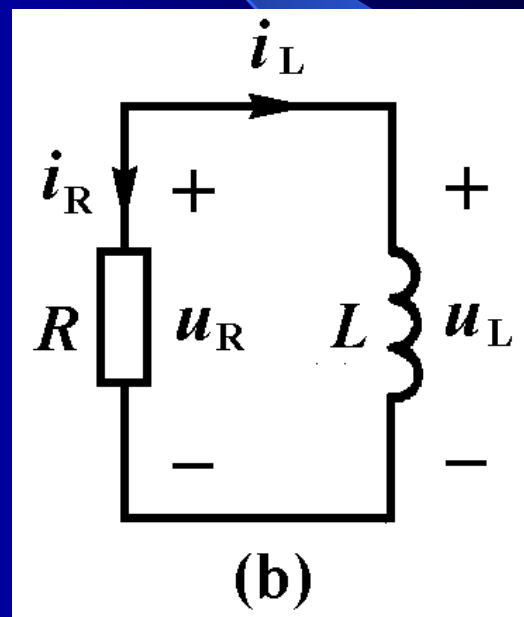


图8-6

电感电流原来等于电流 I_0 ，电感中储存一定的磁场能量，在 $t=0$ 时开关由1端倒向2端，换路后的电路如图(b)所示。

在开关转换瞬间，由于电感电流不能跃变，即 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0$ ，这个电感电流通过电阻 R 时引起能量的消耗，这就造成电感电流的不断减少，直到电流变为零为止。

综上所述，图(b)所示 RL 电路是电感中的初始储能逐渐释放出来消耗在电阻中的过程。与能量变化过程相应的是各电压电流从初始值，逐渐减小到零的过程。



列出KCL方程

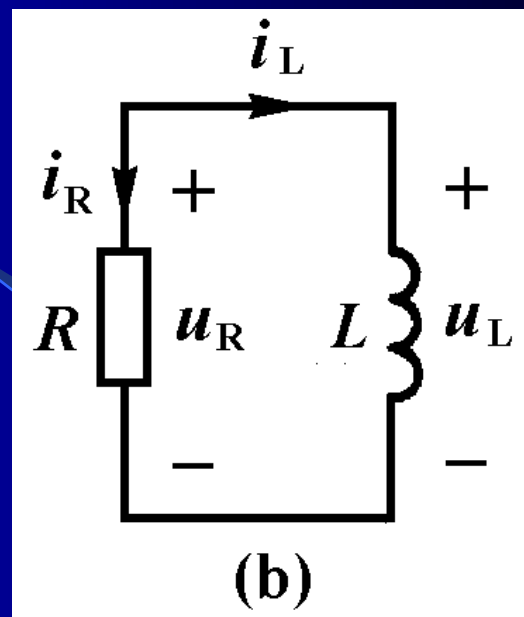
$$i_R + i_L = \frac{u_R}{R} + i_L = 0$$

代入电感VCR方程

$$u_R = u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

得到以下微分方程

$$\frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = 0 \quad (8-6)$$



这个微分方程与式(8-1)相似, 其通解为

$$i_L(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} \quad (t \geq 0)$$

代入初始条件 $i_L(0_+) = I_0$ 求得

$$K = I_0$$

最后得到电感电流和电感电压的表达式为

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0) \quad (8-7a)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t} = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t > 0) \quad (8-7b)$$

其波形如图所示。 RL 电路零输入响应也是按指数规律衰减，衰减的快慢取决于常数 τ 。由于 $\tau=L/R$ 具有时间的量纲，称为 RL 电路的时间常数。

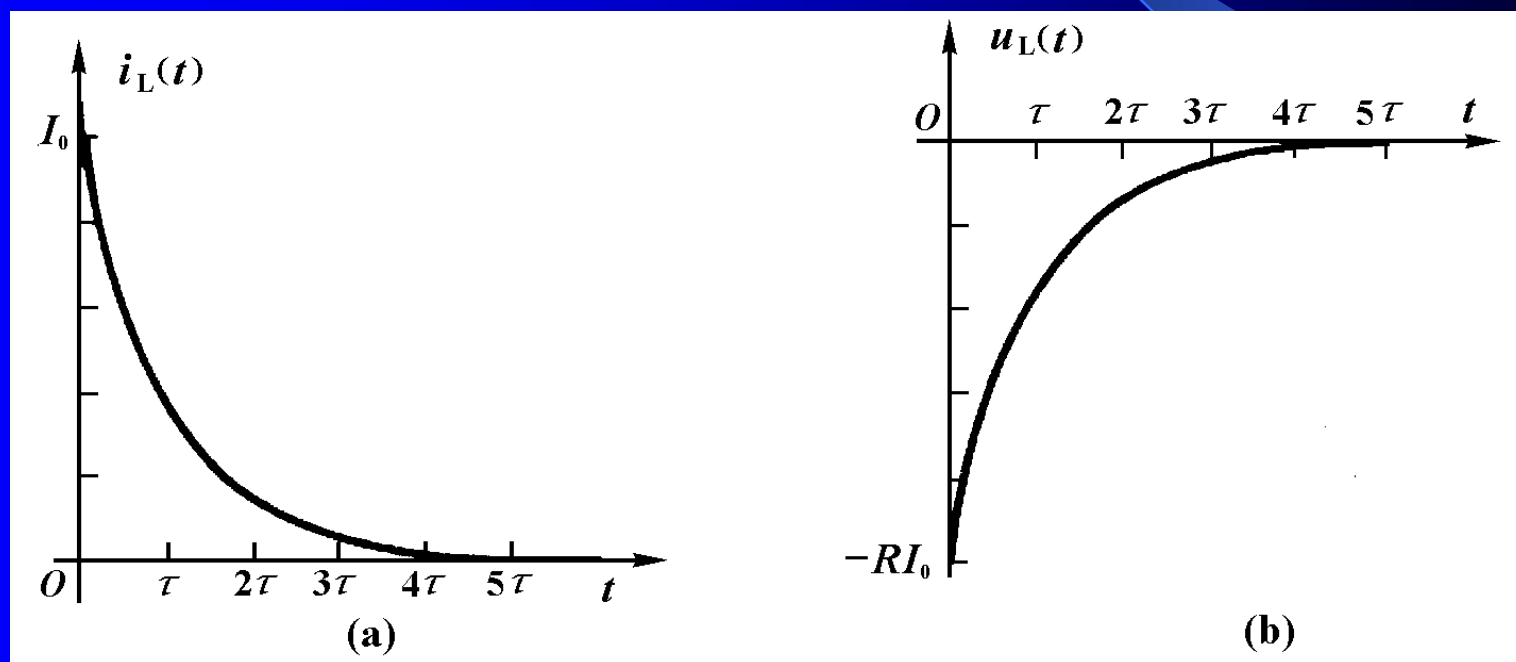


图8-7

例8-2 电路如图8-8(a)所示，开关 S_1 连接至1端已经很久， $t=0$ 时开关 S 由1端倒向2端。求 $t \geq 0$ 时的电感电流 $i_L(t)$ 和电感电压 $u_L(t)$ 。

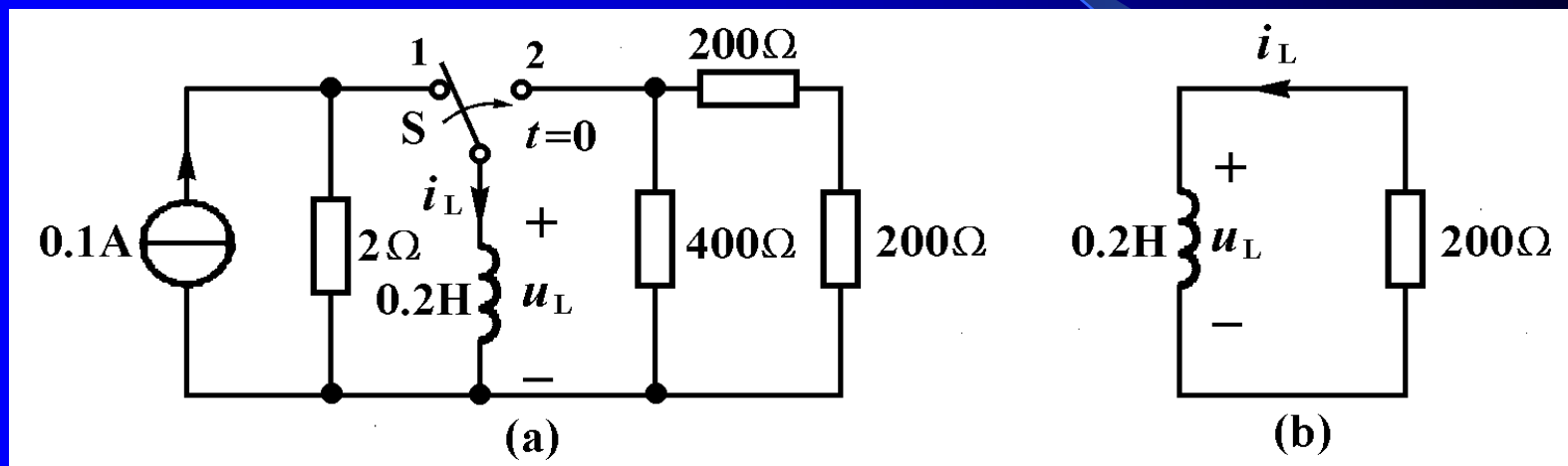
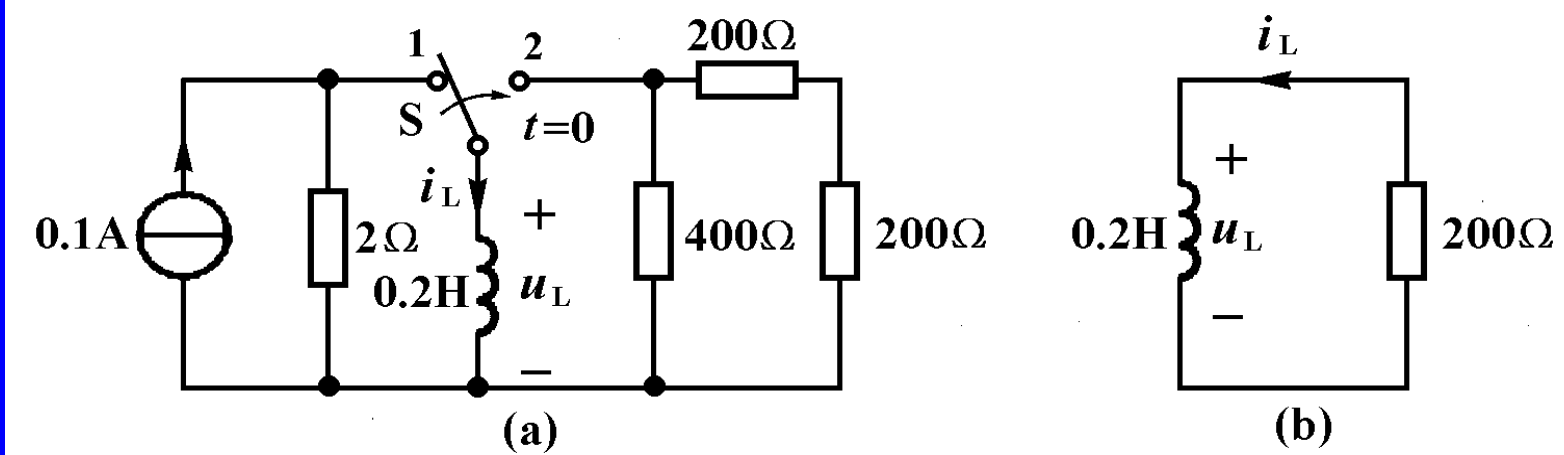


图8-8

解：开关转换瞬间，电感电流不能跃变，故

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0.1\text{A}$$



将连接到电感的电阻单口网络等效为一个的电阻，得到的电路如图(b)所示。该电路的时间常数为

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.2\text{H}}{200\Omega} = 10^{-3}\text{s} = 1\text{ms}$$

根据式8-7得到电感电流和电感电压为

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.1 e^{-10^3 t} \text{ A} \quad (t \geq 0)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = -0.2 \times 0.1 \times 10^3 e^{-10^3 t} \text{ V} = -20 e^{-10^3 t} \text{ V} \quad (t > 0)$$

通过对 RC 和 RL 一阶电路零输入响应的分析和计算表明，电路中各电压电流均从其初始值开始，按照指数规律衰减到零，一般表达式为

$$f(t) = f(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

因为电容或电感在非零初始状态时具有初始储能，各元件有初始电压电流存在，由于电阻要消耗能量，一直要将储能元件的储能消耗完，各电压电流均变为零为止。

§ 8-2 零状态响应

初始状态为零，仅仅由独立电源(称为激励或输入)引起的响应，称为零状态响应。本节只讨论由直流电源引起的零状态响应。

一、RC电路的零状态响应

图8-9(a)所示电路中的电容原来未充电， $u_C(0_-)=0$ 。 $t=0$ 时开关闭合，RC串联电路与直流电压源连接，电压源通过电阻对电容充电。

其电压电流的变化规律，可以通过以下计算求得。

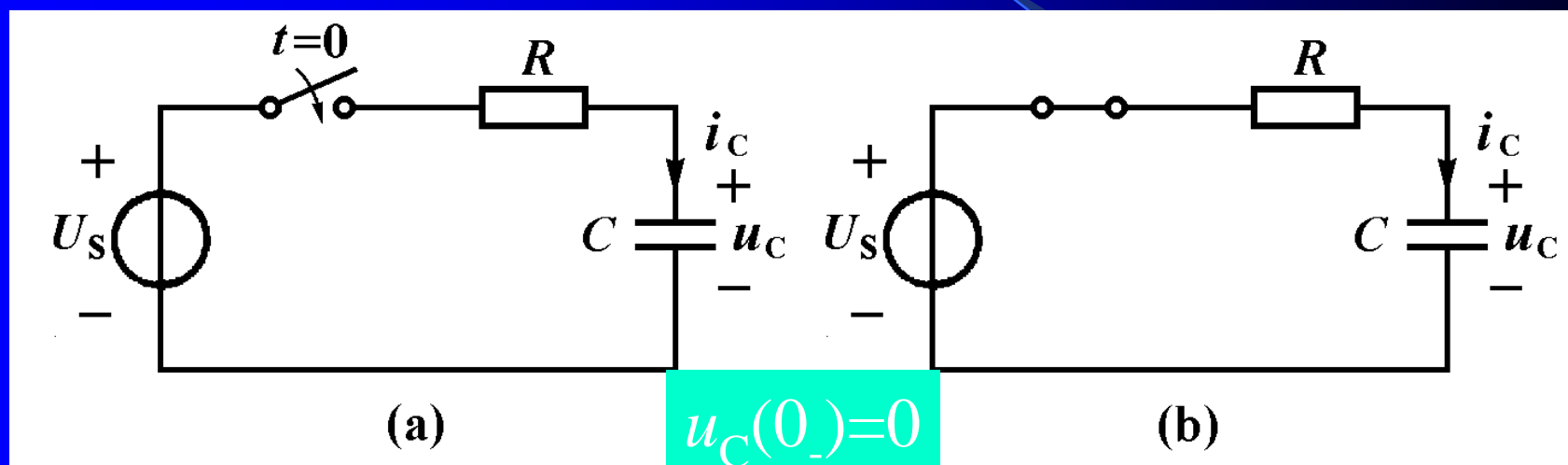


图8-9

其电压电流的变化规律，可以通过以下计算求得。

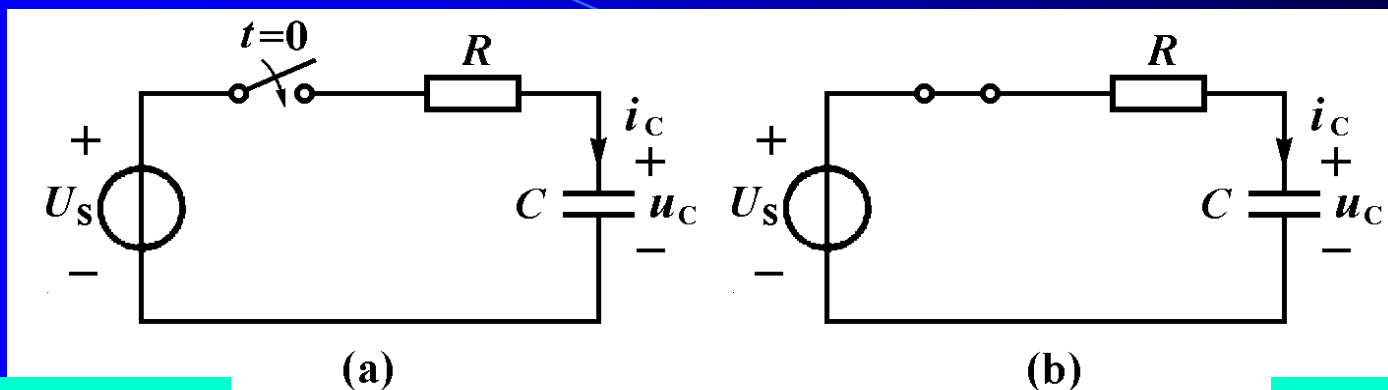


图 8-9

$$u_C(0_-) = 0$$

$$u_C(0_+) = 0$$

(a) $t < 0$ 的电路 (b) $t > 0$ 的电路

以电容电压为变量，列出图(b)所示电路的微分方程

$$u_R + u_C = U_s$$

$$Ri_C + u_C = U_s$$

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s \quad (8-8)$$

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S \quad (8-8)$$

这是一个常系数线性非齐次一阶微分方程。其解答由两部分组成，即

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t) \quad (8-9)$$

式中的 $u_{Ch}(t)$ 是与式(8-8)相应的齐次微分方程的通解，其形式与零输入响应相同，即

$$u_{Ch}(t) = Ke^{st} = Ke^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$

式(8-9)中的 $u_{Cp}(t)$ 是式(8-8)所示非齐次微分方程的一个特解。一般来说, 它的模式与输入函数相同。对于直流电源激励的电路, 它是一个常数, 令

$$u_{Cp}(t) = Q \longrightarrow RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S \quad (8-8)$$

将它代入式(8-8)中求得

$$u_{Cp}(t) = Q = U_S$$

因而

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} + U_S \quad (8-10)$$

式中的常数 K 由初始条件确定。在 $t=0_+$ 时

$$u_C(0_+) = K + U_S = 0$$

由此求得

$$K = -U_S$$



$$u_C(t) = U_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

代入式(8-10)中得到零状态响应为

$$u_C(t) = U_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (t \geq 0) \quad (8-11a)$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t > 0) \quad (8-11b)$$

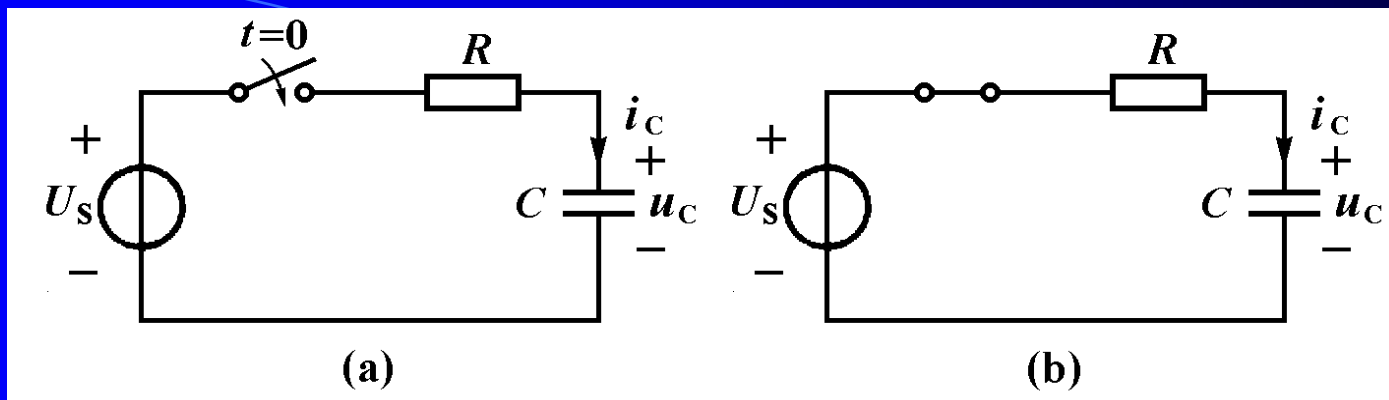


图8-9

其波形如图(8-10)所示。

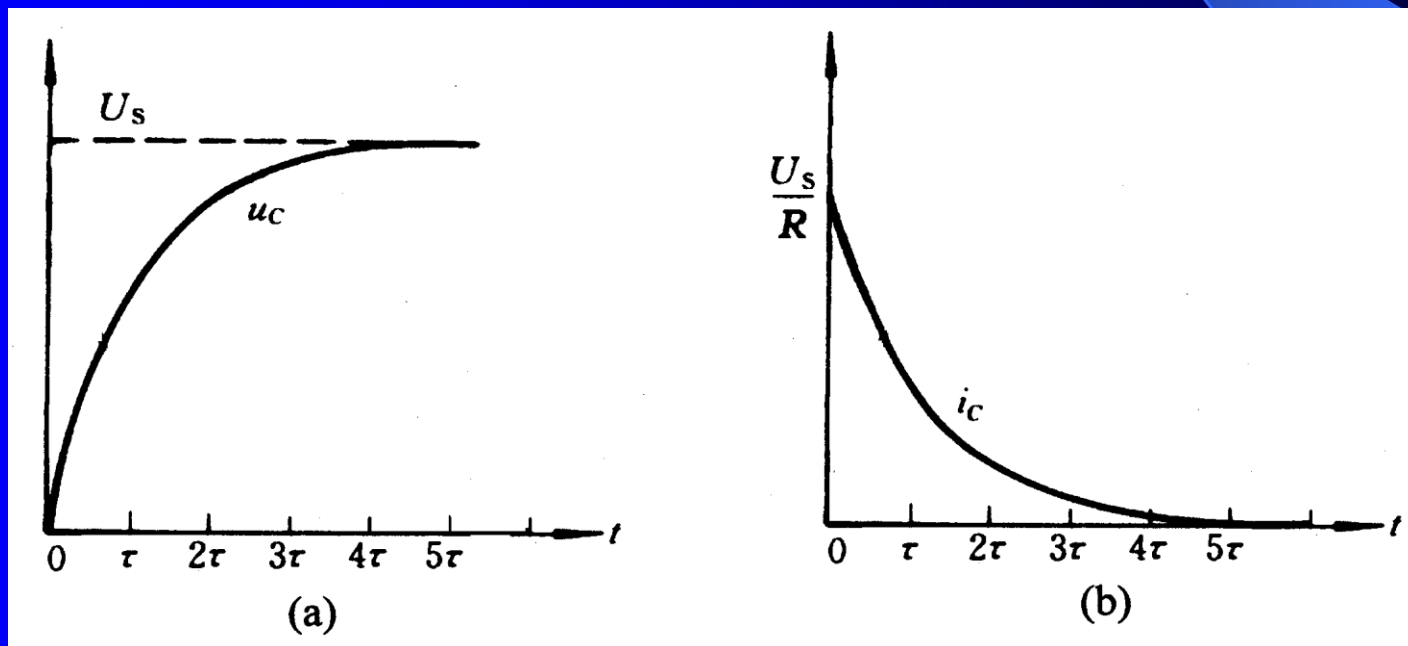
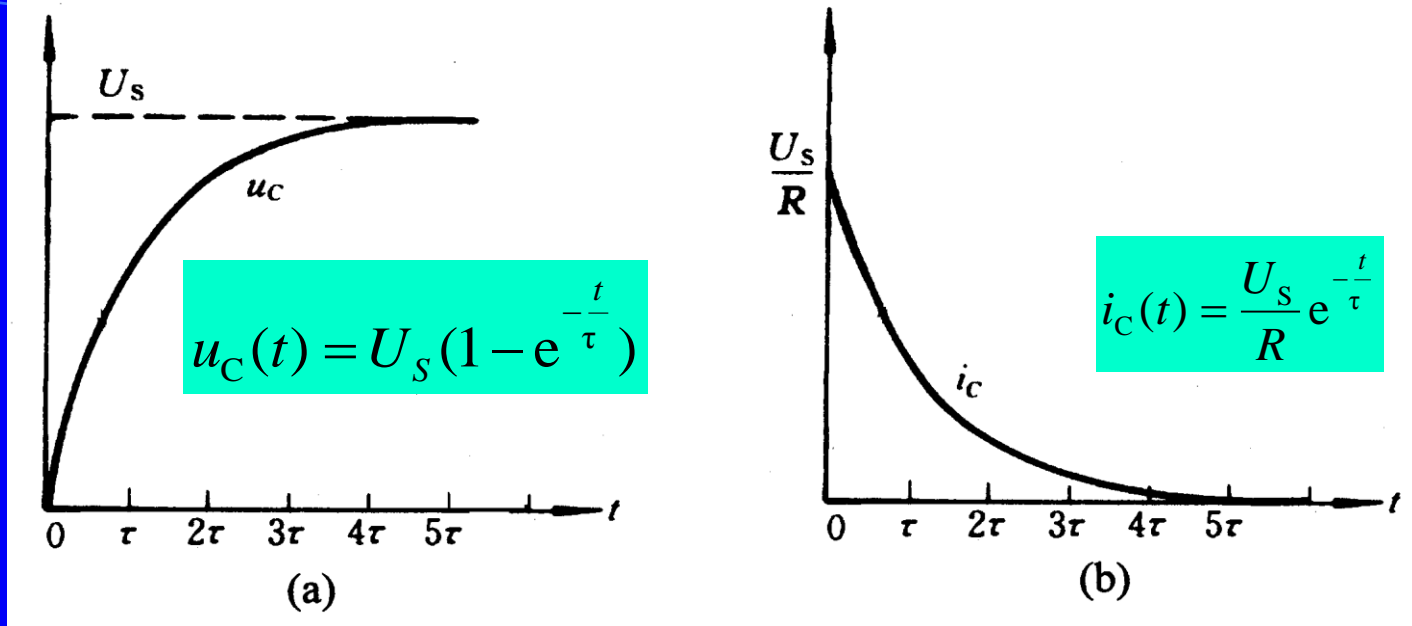


图8-10 RC电路的零状态响应曲线



从上可见，电容电压由零开始以指数规律上升到 U_s ，经过一个时间常数变化到 $(1-0.368)U_s=0.632U_s$ ，经过 $(4\sim 5)\tau$ 时间后电容电压实际上达到 U_s 。

电容电流则从初始值 U_s/R 以指数规律衰减到零。零状态响应变化的快慢也取决于时间常数 $\tau=RC$ 。当时间常数 τ 越大，充电过程就越长。

例8-3 电路如图8-11(a)所示，已知电容电压 $u_C(0_-)=0$ 。 $t=0$ 打开开关，求 $t \geq 0$ 的电容电压 $u_C(t)$ ，电容电流 $i_C(t)$ 以及电阻电流 $i_1(t)$ 。

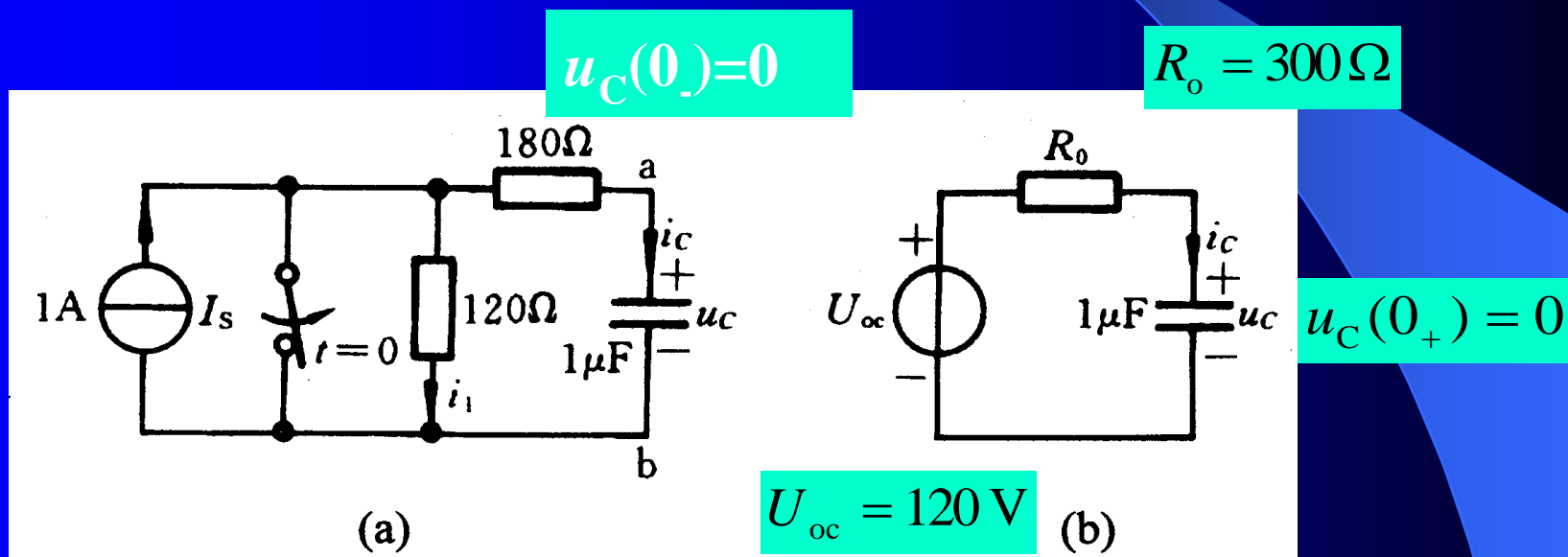
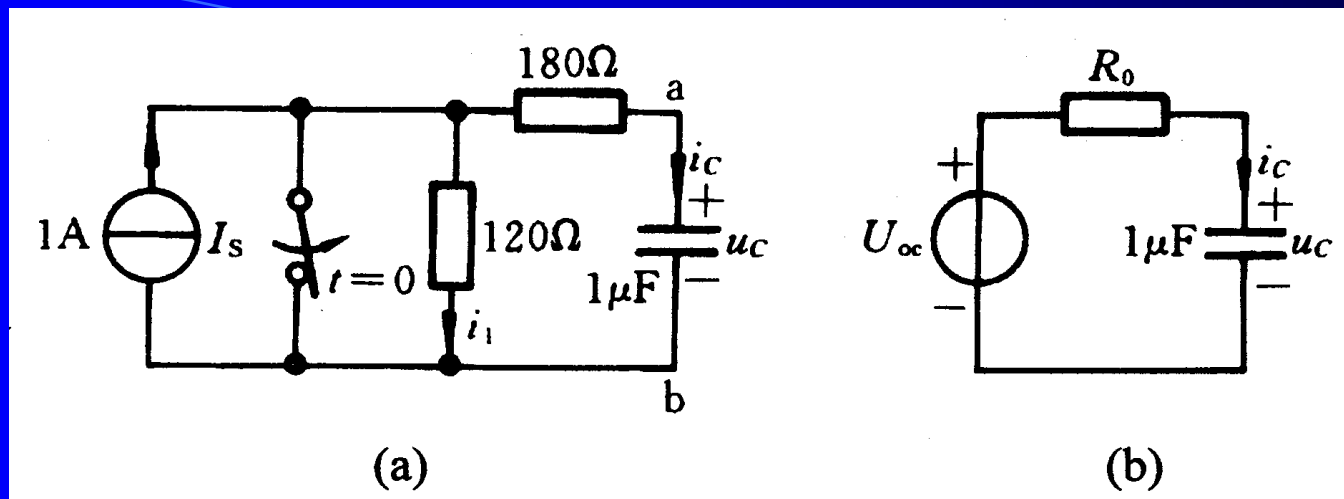


图8-11



解：在开关闭合瞬间，电容电压不能跃变，由此得到

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

先将连接于电容两端的含源电阻单口网络等效于戴维宁等效电路，得到图(b)所示电路，其中

$$U_{oc} = 120 \text{ V}$$

$$R_0 = 300 \Omega$$

电路的时间常数为

$$\tau = R_0 C = 300 \Omega \times 10^{-6} \text{ F} = 3 \times 10^{-4} \text{ s} = 300 \mu\text{s}$$

当电路达到新的稳定状态时，电容相当开路，由此求得

$$U_C(\infty) = U_{oc} = 120 \text{ V}$$

按照式(8-11)可以得到

$$u_C(t) = U_{oc}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 120(1 - e^{-\frac{1}{3} \times 10^4 t}) \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = 10^{-6} \times 120 \times \frac{1}{3} \times 10^4 e^{-\frac{1}{3} \times 10^4 t} = 0.4e^{-\frac{1}{3} \times 10^4 t} \text{ A} \quad (t > 0)$$

为了求得 $i_1(t)$ ，根据图(a)所示电路，用KCL方程得到

$$i_1(t) = I_S - i_C(t) = (1 - 0.4e^{-\frac{1}{3} \times 10^4 t}) \text{ A} \quad (t > 0)$$

二、 RL 电路的零状态响应

RL 一阶电路的零状态响应与 RC 一阶电路相似。图8-12所示电路在开关转换前，电感电流为零，即 $i_L(0_-)=0$ 。当 $t=0$ 时开关由a倒向b，其电感电流和电感电压的计算如下：

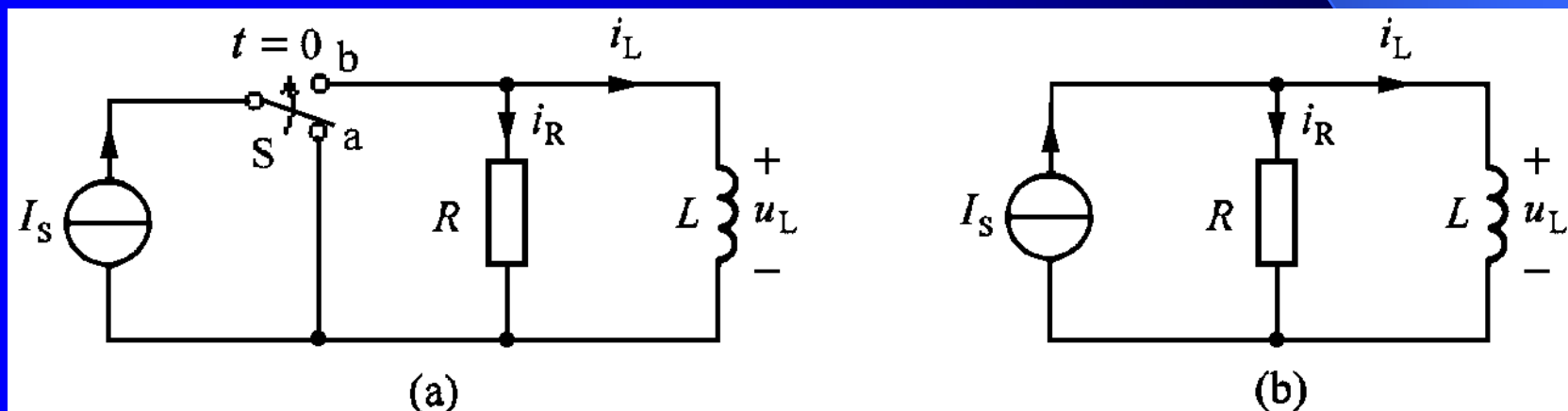
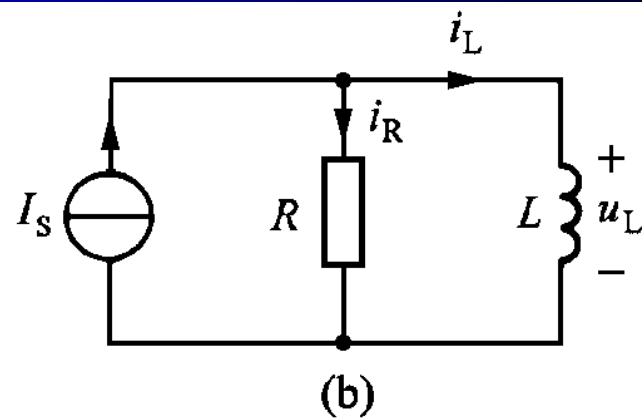
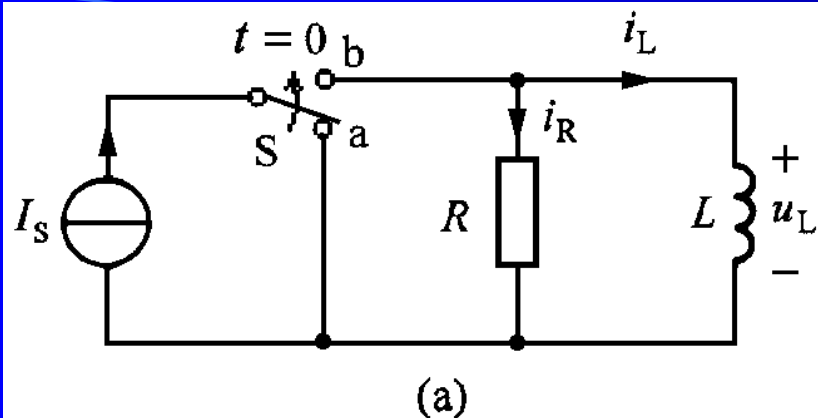


图8-12 RL 电路的零状态响应



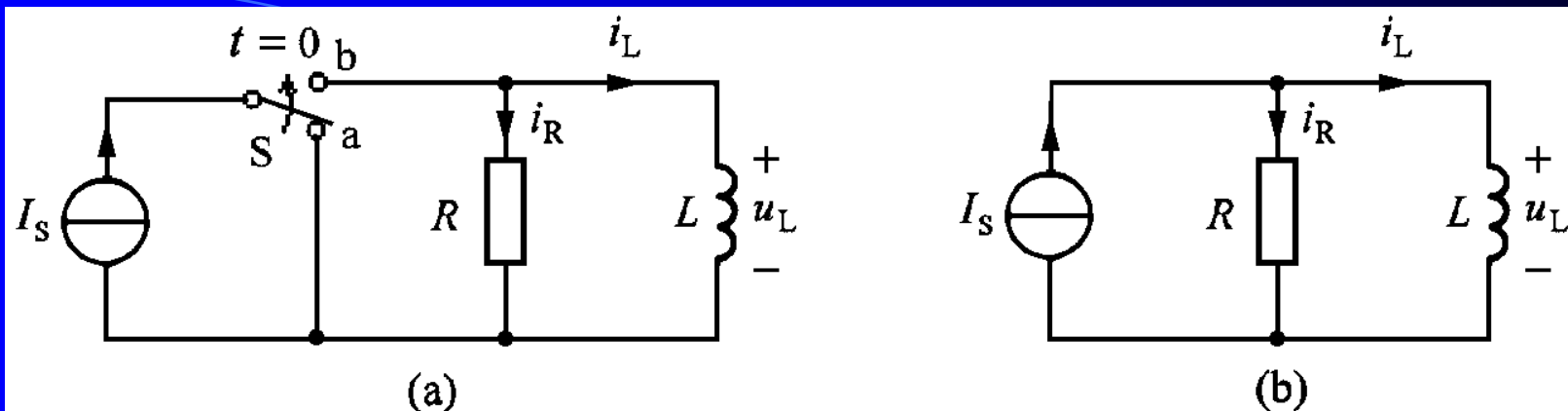
以电感电流作为变量，对图(b)电路列出电路方程

$$i_R + i_L = I_S$$

$$\frac{U_L}{R} + i_L = I_S$$

$$\frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = I_S \quad (t \geq 0) \quad (8-12)$$

这是常系数非齐次一阶微分方程，其解答为



常系数非齐次一阶微分方程的其解答为

$$i_L(t) = i_{Lh}(t) + i_{Lp}(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} + I_S = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + I_S \quad (8-13)$$

式中 $\tau = L/R$ 是该电路的时间常数。常数 K 由初始条件确定，即

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = K + I_S = 0$$

由此求得

$$K = -I_S$$

→

$$i_L(t) = I_S(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

最后得到 RL 一阶电路的零状态响应为

$$i_L(t) = I_S(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = I_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (t \geq 0) \quad (8-14a)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = RI_S e^{-\frac{R}{L}t} = RI_S e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t > 0) \quad (8-14b)$$

其波形曲线如图8-13所示。

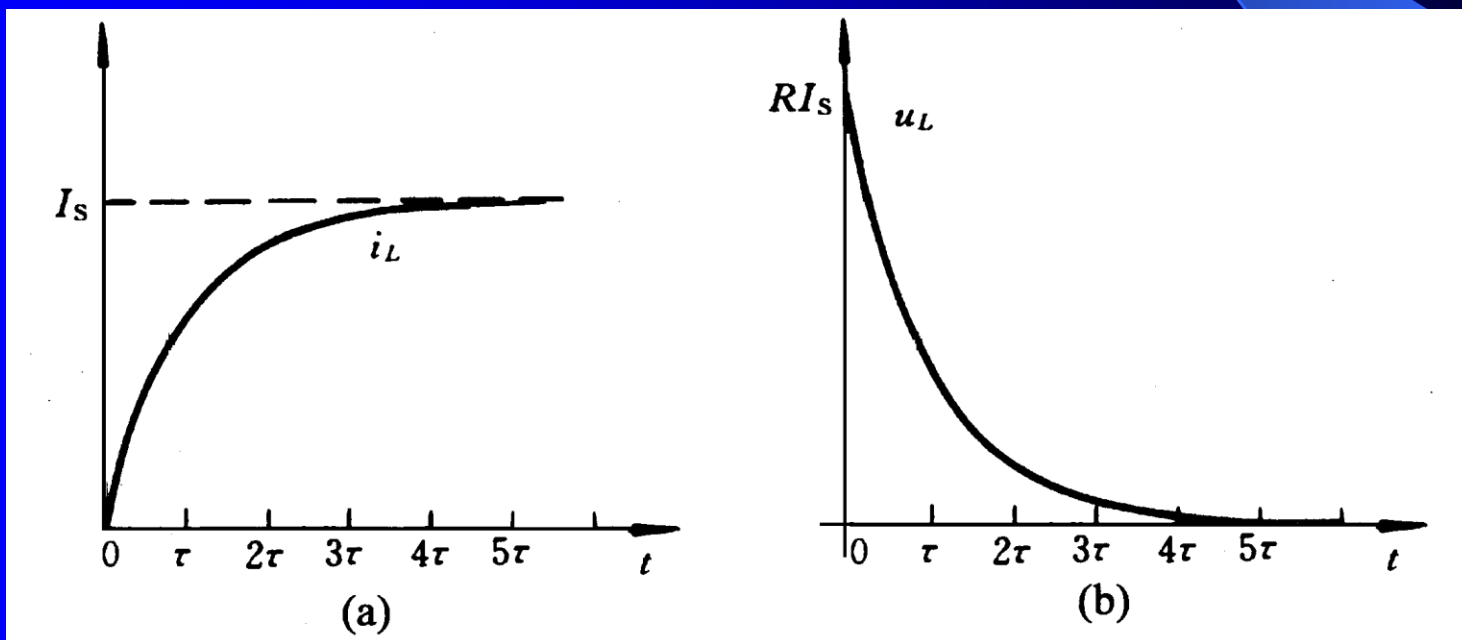


图8-13 RL 电路零状态响应的波形曲线

例8-4 电路如图8-14(a)所示, 已知电感电流 $i_L(0_-)=0$ 。
 $t=0$ 闭合开关, 求 $t \geq 0$ 的电感电流和电感电压。

$$i_L(0_+) = 0$$

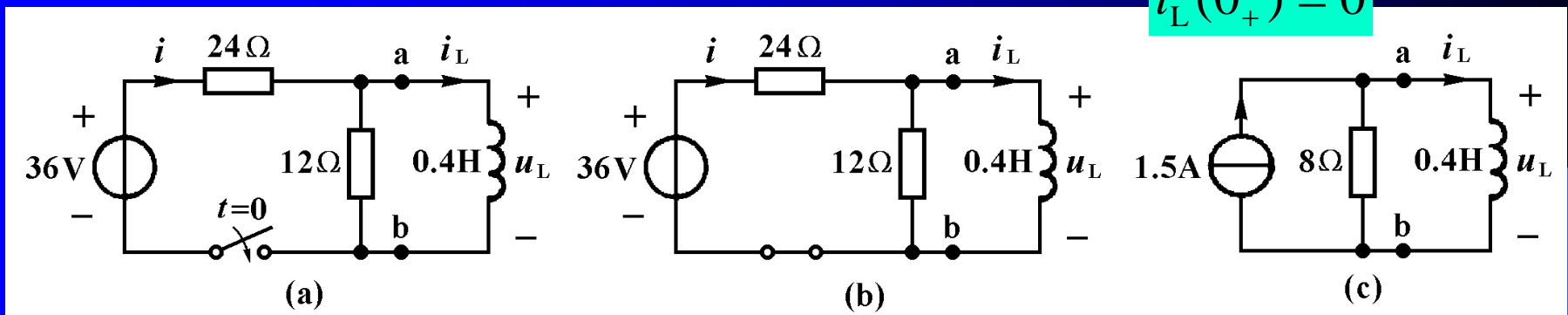


图8-14

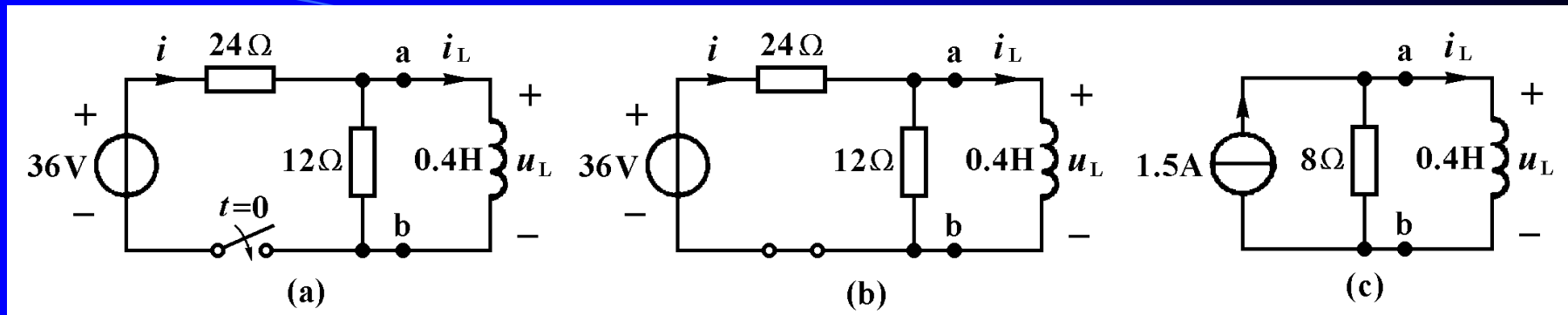


图8-14

解：开关闭合后的电路如图(b)所示，由于开关闭合瞬间电感电压有界，电感电流不能跃变，即

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

将图(b)中连接电感的含源电阻单口网络用诺顿等效电路代替，得到图(c)所示电路。由此电路求得时间常数为

$$\tau = \frac{L}{R_0} = \frac{0.4}{8} \text{ s} = 0.05 \text{ s}$$

$$i_L(t) = 1.5(1 - e^{-20t}) \text{ A}$$

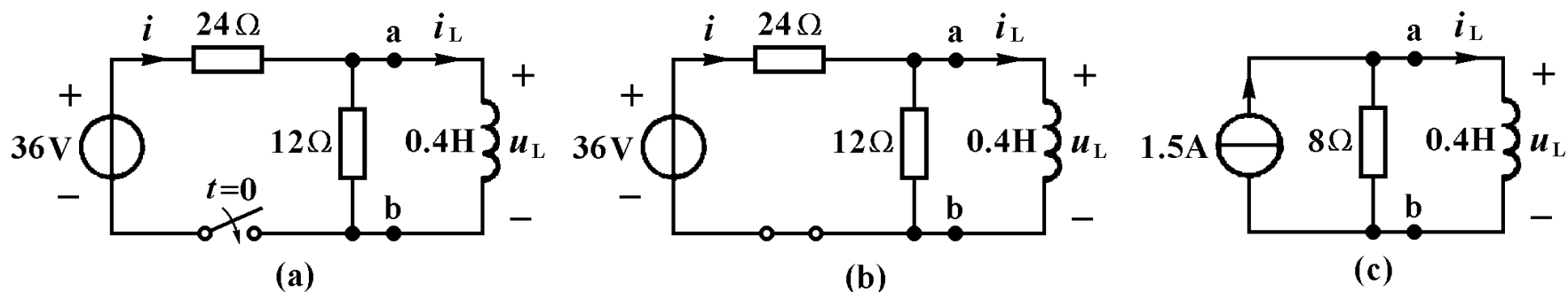


图8-14

按照式(8-14)可以得到

$$i_L(t) = 1.5(1 - e^{-20t}) \text{ A} \quad (t \geq 0)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = 0.4 \times 1.5 \times 20 e^{-20t} \text{ V} = 12 e^{-20t} \text{ V} \quad (t > 0)$$

假如还要计算电阻中的电流 $i(t)$, 可以根据图(b)电路, 用欧姆定律求得

$$i(t) = \frac{36 \text{ V} - u_L(t)}{24 \Omega} = \frac{36 \text{ V} - 12 e^{-20t} \text{ V}}{24 \Omega} = (1.5 - 0.5 e^{-20t}) \text{ A}$$

例8-5 图8-15(a)为一个继电器延时电路的模型。已知继电器线圈参数为： $R=100\Omega$ ， $L=4\text{H}$ ，当线圈电流达到 6mA 时，继电器开始动作，将触头接通。从开关闭合到触头接通时间称为延时时间。为了改变延时时间，在电路中串联一个电位器，其电阻值可以从零到 900Ω 之间变化。若 $U_S=12\text{V}$ ，试求电位器电阻值变化所引起的延时时间的变化范围。

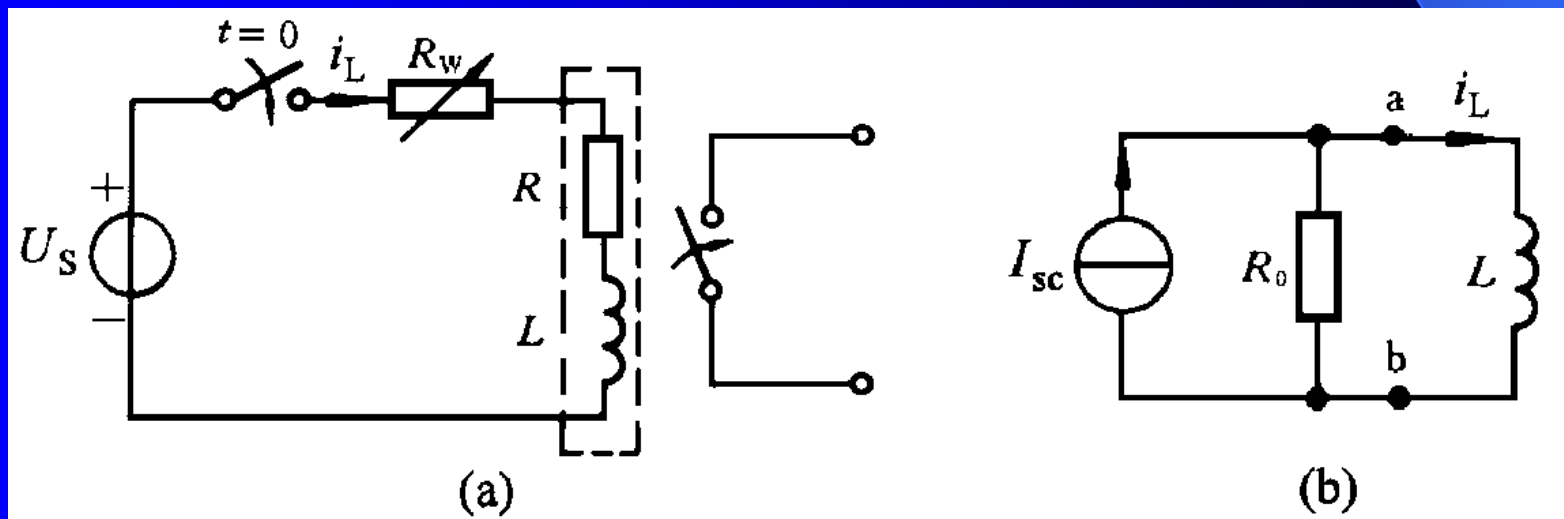
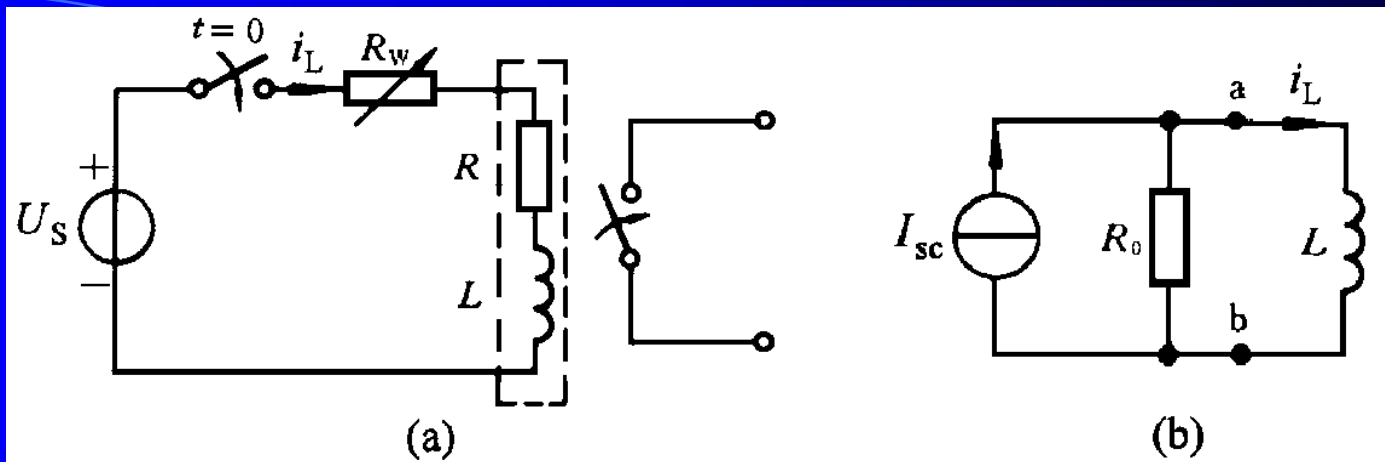


图8-15 例8-5



解：开关闭合前，电路处于零状态， $i_L(0_-)=0$ 。

开关转换瞬间电感电压有界，电感电流不能跃变，即 $i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$ 。将电路用图8-15(b)所示诺顿等效电路代替，其中

$$R_o = R + R_w \quad I_{sc} = \frac{U_s}{R + R_w} = \frac{U_s}{R_o}$$

电感电流的表达式为

$$i_L(t) = \frac{U_s}{R_o} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

设 t_0 为延时时间，则有

$$i_L(t_0) = \frac{U_S}{R_o} (1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}) = 6\text{mA}$$

由此求得

$$t_0 = -\tau \ln \left[1 - \frac{R_o i_L(t_0)}{U_S} \right]$$

当 $R_w = 0\Omega$ 时， $\tau = 0.04\text{s}$

$$t_0 = -\tau \ln \left[1 - \frac{R_o i_L(t_0)}{U_S} \right] = -0.04 \ln \left[1 - \frac{100 \times 6 \times 10^{-3}}{12} \right] = 2.05\text{ms}$$

当 $R_w = 900\Omega$ 时， $\tau = 0.004\text{s}$

$$t_0 = -\tau \ln \left[1 - \frac{R_o i_L(t_0)}{U_S} \right] = -0.004 \ln \left[1 - \frac{1000 \times 6 \times 10^{-3}}{12} \right] = 2.77\text{ms}$$

§ 8-3 完全响应

由储能元件的初始储能和独立电源共同引起的响应，称为全响应。下面讨论RC串联电路在直流电压源作用下的全响应。电路如图8-16(a)所示，开关连接在1端为时已经很久， $u_C(0_-)=U_0$ 。 $t=0$ 时开关倒向2端。 $t>0$ 时的电路如图8-16(b)所示。

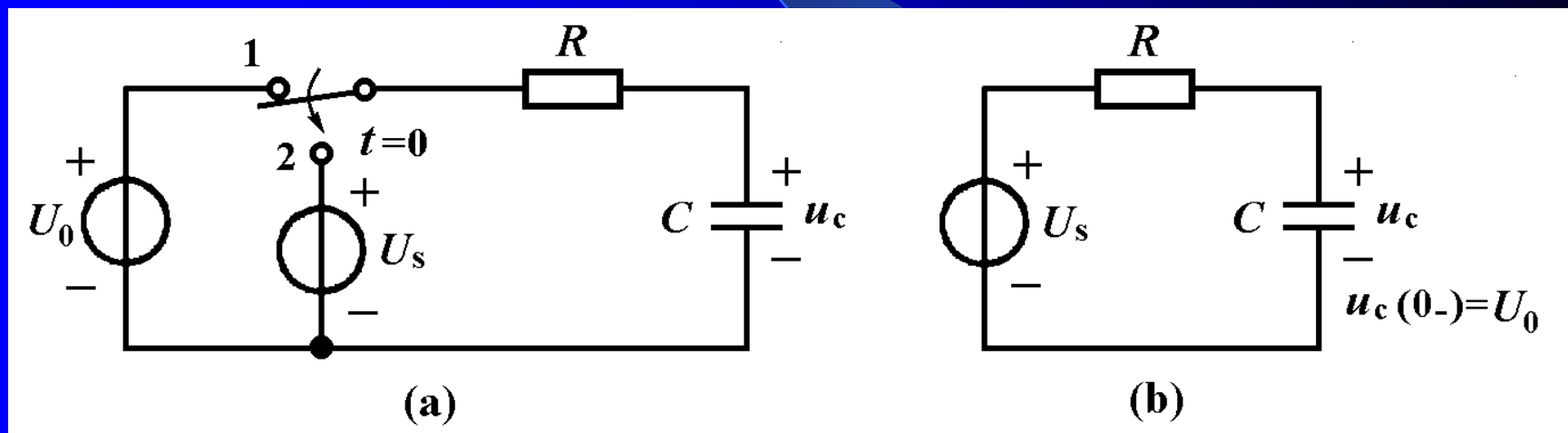
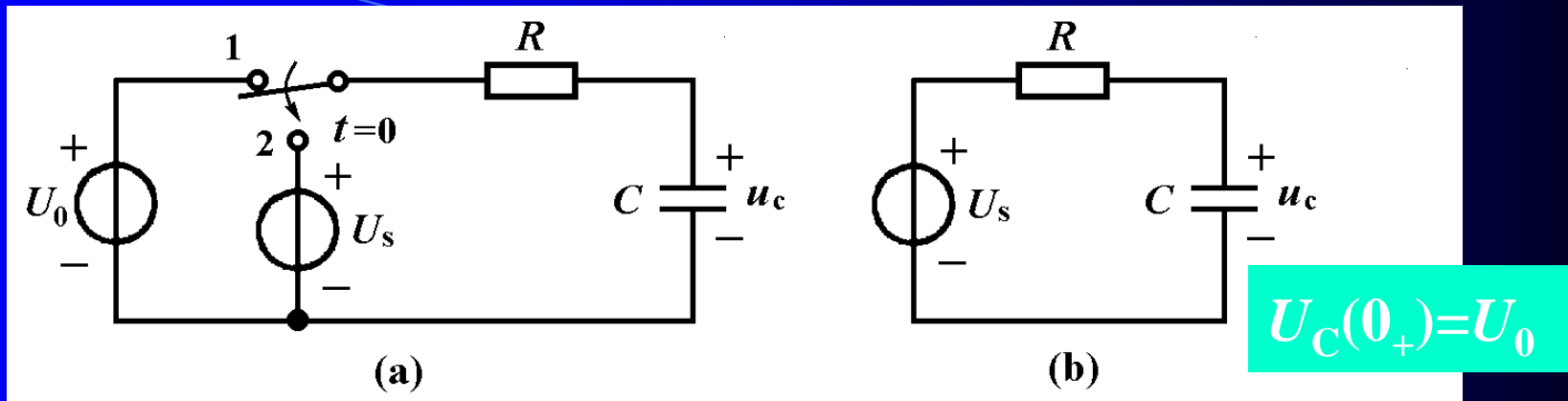


图8-16 RC电路的完全响应



为了求得电容电压的全响应，以电容电压 $u_C(t)$ 为变量，列出图(b)所示电路的微分方程

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s \quad (t \geq 0) \quad (8-15)$$

其解为

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} + U_s$$

代入初始条件

$$u_C(0_+) = U_0 = K + U_S$$

求得

$$K = U_0 - U_S \longrightarrow u_C(t) = (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{RC}} + U_S$$

于是得到电容电压以及电容电流的表达式

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t) = (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{RC}} + U_S$$

$$u_C(t) = (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} + U_S \quad (t \geq 0) \quad (8-16)$$

全响应 = 固有响应 + 强制响应

全响应 = 瞬态响应 + 稳态响应

第一项是对应微分方程的通解 $u_{Ch}(t)$ ，称为电路的固有响应或自由响应，若时间常数 $\tau > 0$ ，固有响应将随时间增长而按指数规律衰减到零，在这种情况下，称它为瞬态响应。

第二项是微分方程的特解 $u_{Cp}(t)$ ，其变化规律一般与输入相同，称为强制响应。在直流输入时，当 $t \rightarrow \infty$ 时， $u_C(t) = u_{Cp}(t)$ 这个强制响应称为直流稳态响应。

$$u_C(t) = (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} + U_S \quad (t \geq 0) \quad (8-16)$$

全响应 = 瞬态响应 + 稳态响应

式(8-16)可以改写为以下形式

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (t \geq 0) \quad (8-17)$$

全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

式中第一项为初始状态单独作用引起的零输入响应，第二项为输入(独立电源)单独作用引起的零状态响应。

也就是说电路的完全响应等于零输入响应与零状态响应之和。这是线性动态电路的一个基本性质，是响应可以叠加的一种体现。

以上两种叠加的关系，可以用波形曲线来表示。利用全响应的这两种分解方法，可以简化电路的分析计算，实际电路存在的是电压电流的完全响应。

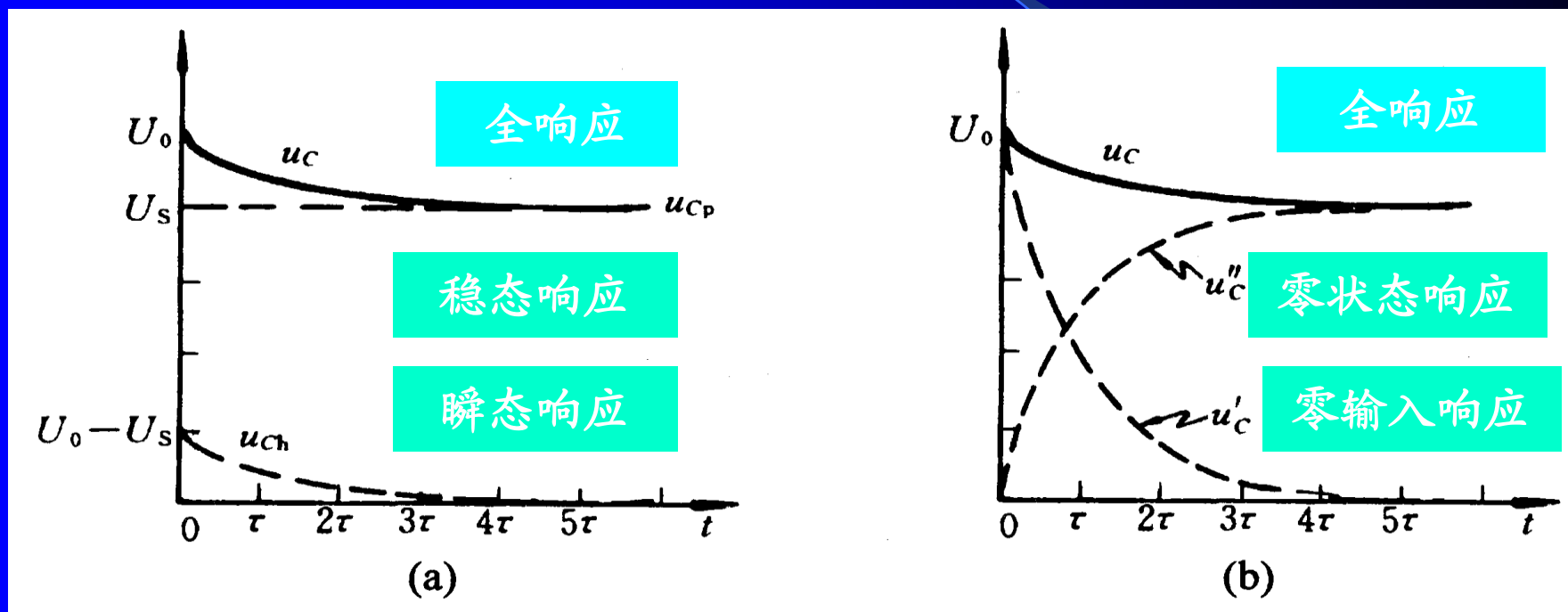


图8-17

(a) 全响应分解为固有响应与强制响应之和

(b) 全响应分解为零输入响应与零状态响应之和

例8-6 图8-18(a)所示电路原来处于稳定状态。 $t=0$ 时开关断开，求 $t \geq 0$ 的电感电流 $i_L(t)$ 和电感电压 $u_L(t)$ 。

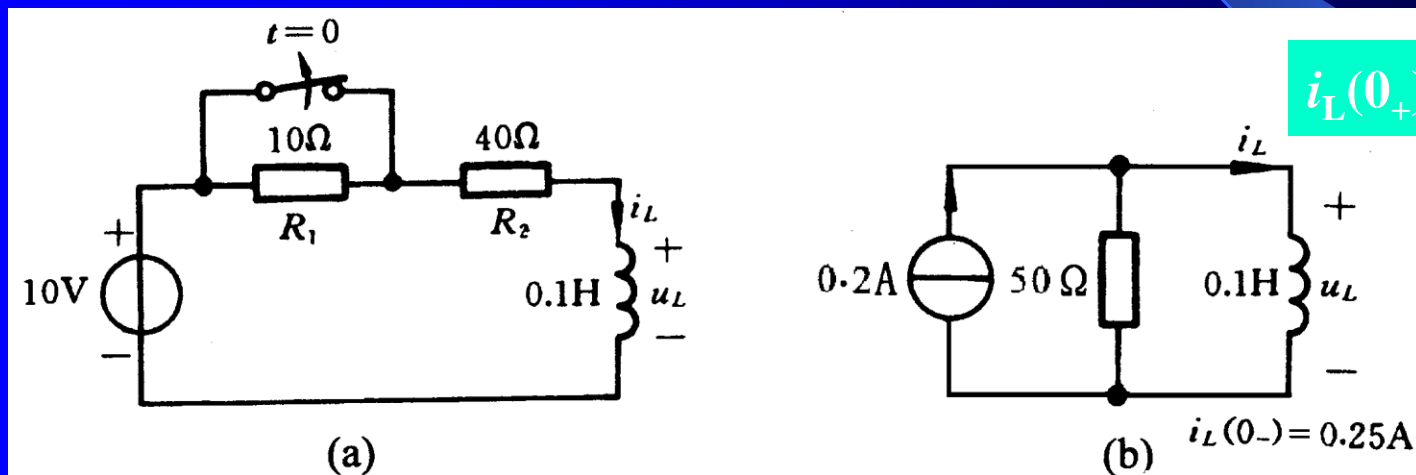


图8-18

解：在 $t < 0$ 时，电阻 R_1 被开关短路，电感电流的初始值为

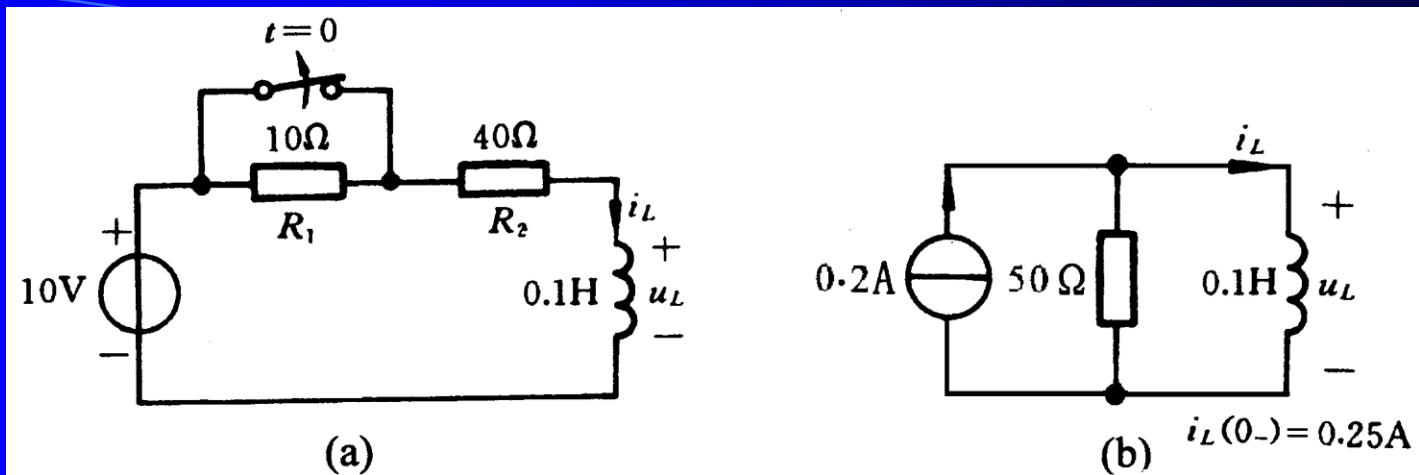
$$i_L(0_-) = \frac{U_S}{R_2} = \frac{10\text{V}}{40\Omega} = 0.25\text{A}$$

在 $t > 0$ 时的电路中，用诺顿等效电路代替连接电感的含源电阻单口网络，得到图(b)所示电路，该电路的微分方程为

$$\frac{L}{R_o} \frac{di_L}{dt} + i_L = I_{sc} \quad (t \geq 0)$$

其全解为

$$i_L(t) = i_{Lh}(t) + i_{Lp}(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + i_{Lp}(t)$$



式中

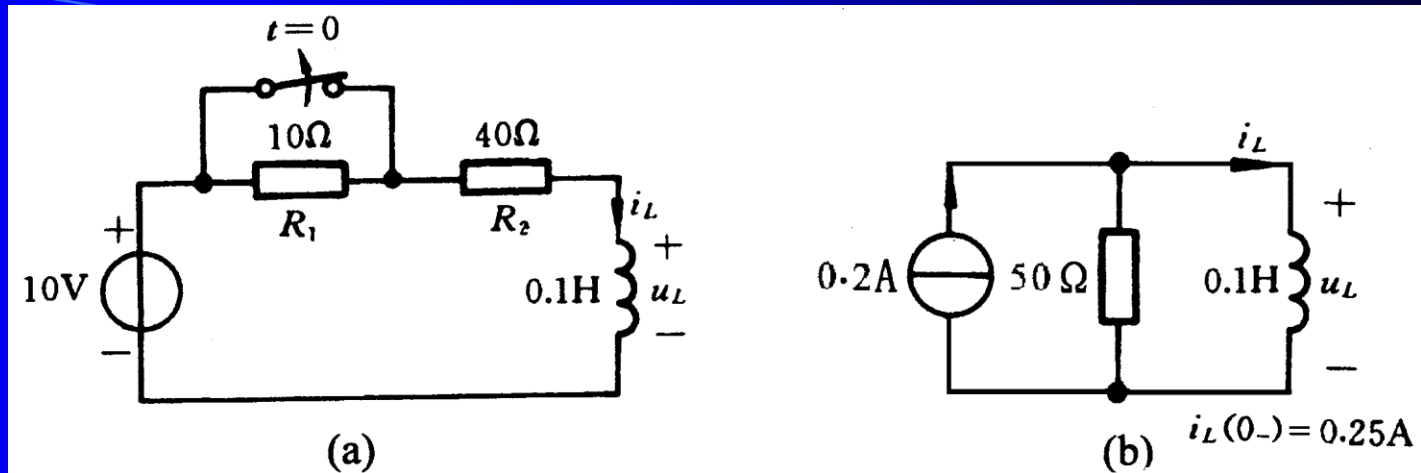
$$\tau = \frac{L}{R_0} = \frac{0.1\text{H}}{50\Omega} = 0.002\text{s} = 2\text{ms} \quad i_{Lp}(t) = I_{sc} = 0.2\text{A}$$

代入上式得到

$$i_L(t) = Ke^{-500t} + 0.2\text{A}$$

代入初始条件

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0.25\text{A}$$



可以得到

$$K = 0.25\text{A} - 0.2\text{A} = 0.05\text{A}$$

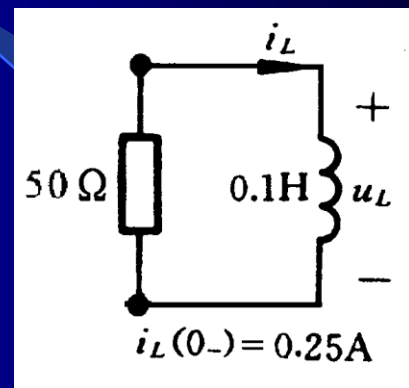
于是

$$i_L(t) = (0.05e^{-500t} + 0.2)\text{A} \quad (t \geq 0)$$

其中第一项是瞬态响应，第二项是稳态响应。电路在开关断开后，经过 $(4 \sim 5)\tau$ 的时间，即经过 $(8 \sim 10)\text{ms}$ 的过渡时期，就达到了稳态。

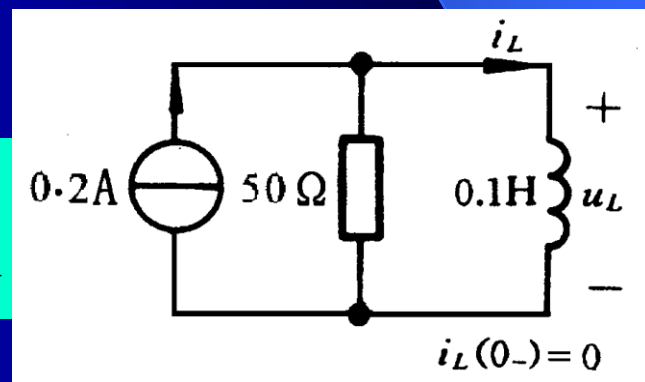
电感电流 $i_L(t)$ 的全响应也可以用分别计算出零输入响应和零状态响应，然后相加的方法求得。电感电流 $i_L(t)$ 的零输入响应为

$$i_L'(t) = i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.25e^{-500t} \text{ A}$$



电感电流 $i_L(t)$ 的零状态响应为

$$i_L''(t) = i_{Lp}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 0.2(1 - e^{-500t}) \text{ A}$$



$i_L(t)$ 的全响应为零输入响应与零状态响应之和

$$\begin{aligned}i_L(t) &= i_L'(t) + i_L''(t) \\ &= 0.25e^{-500t} \text{ A} + 0.2(1 - e^{-500t}) \text{ A} \\ &= (0.05e^{-500t} + 0.2) \text{ A} \quad (t \geq 0)\end{aligned}$$

电感电压的全响应可以利用电感元件的VCR方程求得

$$\begin{aligned}u_L(t) &= L \frac{di_L}{dt} \\ &= -2.5e^{-500t} \text{ V} \quad (t > 0)\end{aligned}$$

例8-7 电路如图8-19(a)所示。

已知 $u_C(0_-)=4\text{V}$, $u_S(t)=(2+e^{-2t})\text{V}$,

求电容电压 $u_C(t)$ 的全响应。

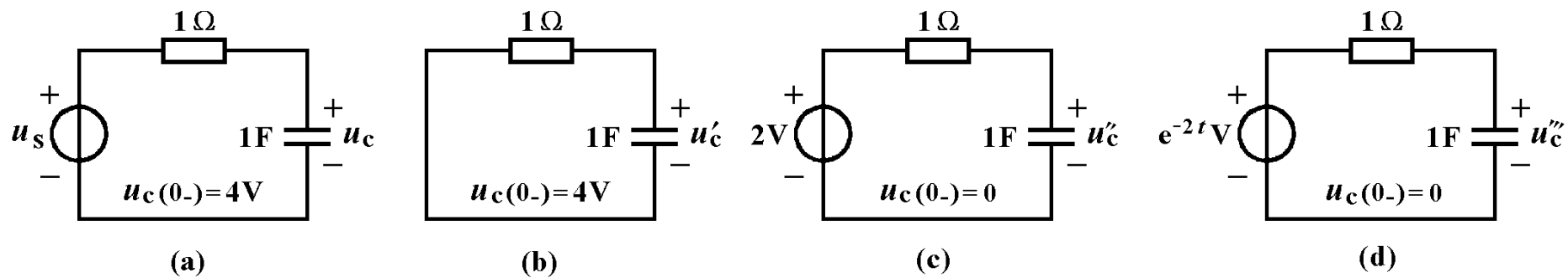


图8-19

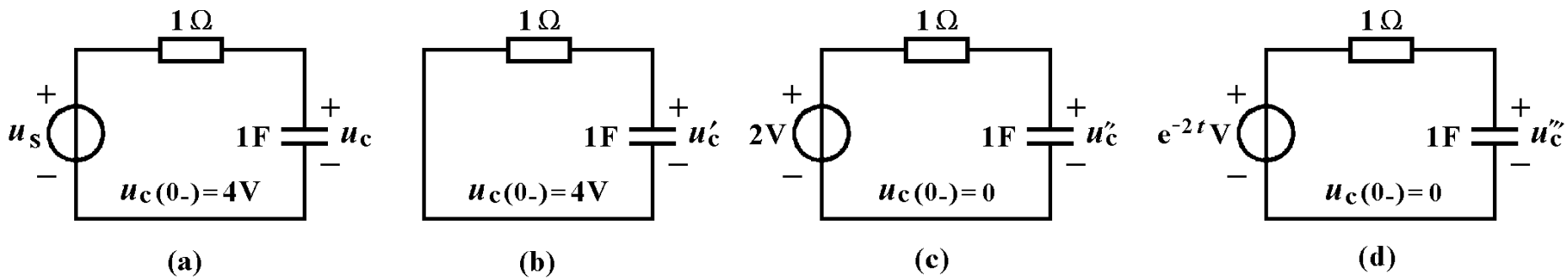


图8-19

解：将全响应分解为(零输入响应) + (2V电压源引起的零状态响应) + (e^{-2t} 电压源引起的零状态响应)。现在分别计算响应的几个分量然后相加得到全响应。

首先列出图(a)电路的微分方程和初始条件

$$\begin{cases} \frac{du_C}{dt} + u_C = (2 + e^{-2t})V & (t \geq 0) \\ u_C(0_+) = 4V \end{cases} \quad (8-18)$$

1. 求电路的零输入响应[见图(b)电路]

列出齐次微分方程和初始条件

$$\begin{cases} \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 & (t \geq 0) \\ u_C(0_+) = 4V \end{cases} \quad (8-19)$$

求得

$$\tau = RC = 1\Omega \times 1F = 1s$$

$$u_C'(t) = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 4e^{-t}$$

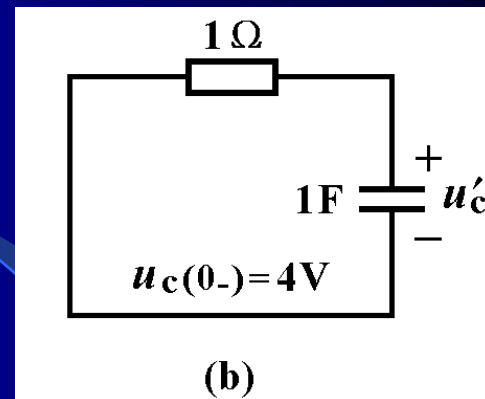
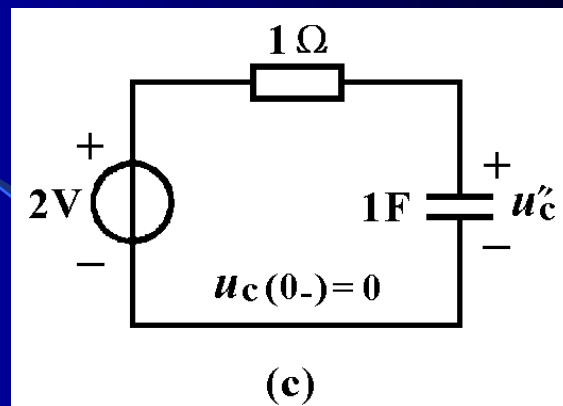


图8-19

2.求2V电压源引起的零状态响应[见图(c)电路]



列出微分方程和初始条件

$$\begin{cases} \frac{du_c}{dt} + u_c = 2V & (t \geq 0) \\ u_c(0_+) = 0 \end{cases} \quad (8-20)$$

由此求得

$$u'_c(t) = U_s(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 2(1 - e^{-t})V$$

图8-19

3. 求 $2e^{-2t}\text{V}$ 电压源引起的零状态响应[见图(d)电路]

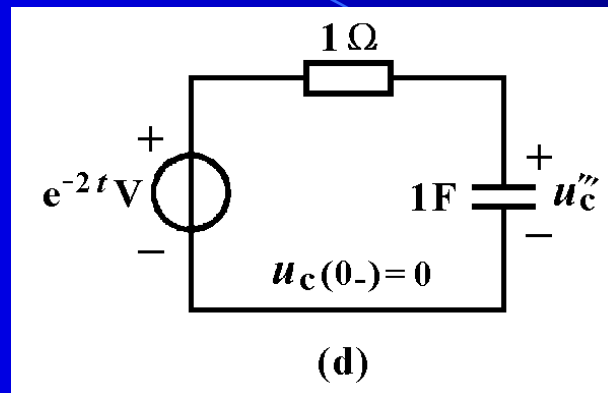


图8-19

列出微分方程和初始条件

$$\begin{cases} \frac{du_C}{dt} + u_C = e^{-2t}\text{V} & (t \geq 0) \\ u_C(0_+) = 0 \end{cases} \quad (8-21)$$

其解为

$$u_C'''(t) = u_{\text{Ch}}'''(t) + u_{\text{Cp}}'''(t) = Ke^{-t} + u_{\text{Cp}}'''(t)$$

设 $u_{Cp}'''(t) = Ae^{-2t}$ ，并将它代入到式8-21所示微分方程中可以得到

$$-2Ae^{-2t} + Ae^{-2t} = e^{-2t}$$

由此求得 $A = -1$ $u_{Cp}(t) = -1e^{-2t}$

代入上式 $u_C'''(t) = Ke^{-t} - 1e^{-2t}$

代入初始条件， $t=0$ 时， $u_C'''(0) = K - 1 = 0$

由此得到 $K=1$

最后求得零状态响应 $u_C'''(t) = (e^{-t} - e^{-2t})V$

4.最后求得全响应如下

$$\begin{aligned}u_C(t) &= u_C'(t) + u_C''(t) + u_C'''(t) \\&= 4e^{-t}V + (2 - 2e^{-t})V + (e^{-t} - e^{-2t})V \\&= \underbrace{4e^{-t}V}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{(2 - e^{-t} - e^{-2t})V}_{\text{零状态响应}} \\&= \underbrace{3e^{-t}V}_{\text{固有响应}} + \underbrace{(2 - e^{-2t})V}_{\text{强制响应}} \\&= \underbrace{(3e^{-t} - e^{-2t})V}_{\text{瞬态响应}} + \underbrace{2V}_{\text{稳态响应}}\end{aligned}$$

思考与练习

8-3-1 在电阻，电感与电压源串联电路中，若 $U_S=1V$ ， $i_L(0)=1A$ 时的全响应为 $i_L(t)$ 。如果使全响应增加一倍，达到 $2i_L(t)$ ，则需改变电压源电压和电感初始电流为以下数值

(1) $U_S=2V, i_L(0)=1A$

(2) $U_S=1V, i_L(0)=2A$

(3) $U_S=2V, i_L(0)=2A$

请从以上三个条件中，选择一个正确的答案，并说明原因。

8-3-2 图8-3-2电路中 $u_C(0)=5V$ ，试求 $t>0$ 时电容电压 $u_C(t)$ 的全响应，瞬态响应和稳态响应。

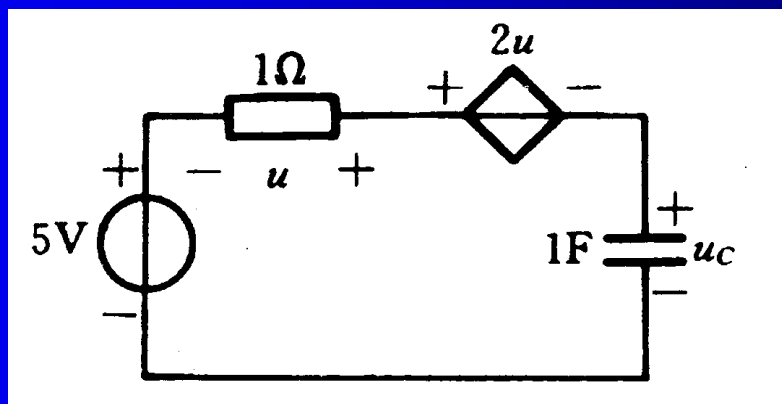


图8-3-2

§ 8-4 三要素法

本节专门讨论由直流电源驱动的只含一个动态元件的一阶电路全响应的一般表达式，并在此基础上推导出三要素法。

一、三要素法

仅含一个电感或电容的线性一阶电路，将连接动态元件的线性电阻单口网络用戴维宁和诺顿等效电路代替后，可以得到图8-20(a)和(b)所示的等效电路。

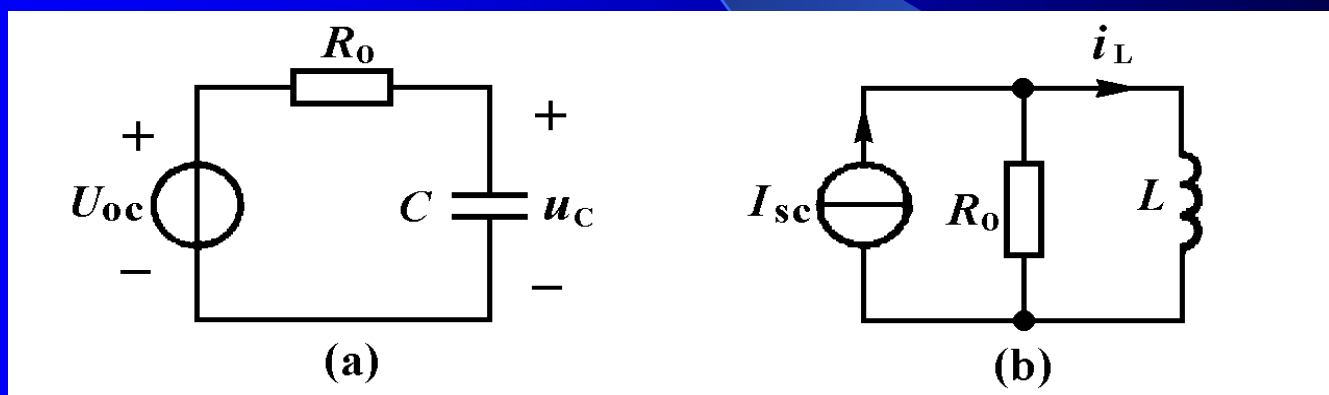
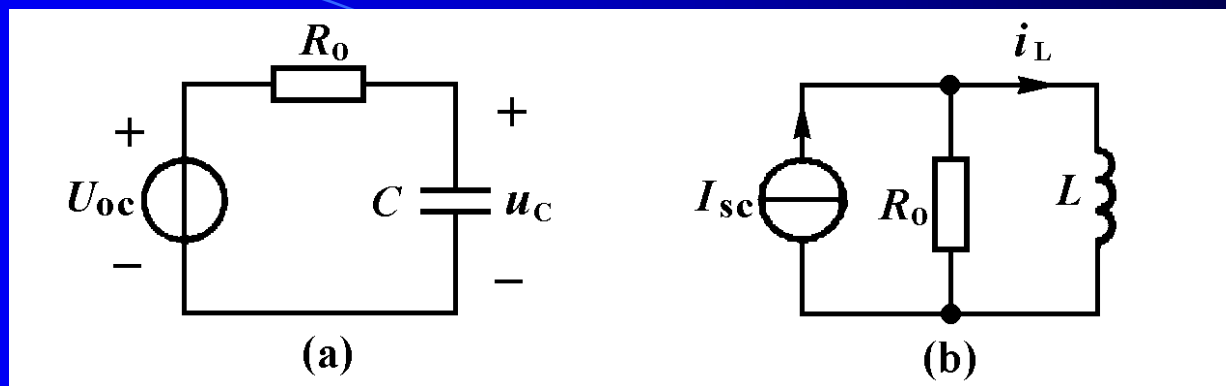


图8-20 (a)RC一阶电路

(b)RL一阶电路



图(a)电路的微分方程和初始条件为

$$\begin{cases} R_o C \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = U_{oc} & (t \geq 0) \\ u_C(0_+) = U_0 \end{cases} \quad (8-22)$$

图(b)电路的微分方程和初始条件为

$$\begin{cases} G_o L \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = I_{sc} & (t \geq 0) \\ i_L(0_+) = I_0 \end{cases} \quad (8-23)$$

上述两个微分方程可以表示为具有统一形式的微分方程

$$\begin{cases} \tau \frac{df(t)}{dt} + f(t) = A & (t \geq 0) \\ f(0_+) \end{cases} \quad (8-24)$$

其通解为

$$f(t) = f_h(t) + f_p(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + A$$

如果 $\tau > 0$ ，在直流输入的情况下， $t \rightarrow \infty$ 时， $f_h(t) \rightarrow 0$ ，
则有

$$f_{Cp}(t) = A = f(\infty)$$

因而得到

$$f(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + f(\infty)$$

由初始条件 $f(0_+)$, 可以求得

$$K = f(0_+) - f(\infty)$$

于是得到全响应的一般表达式

$$f(t) = [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + f(\infty) \quad (t \geq 0) \quad (8-25)$$

$$\text{其中} \quad \tau = R_0 C \quad \text{或} \quad \tau = L/R_0$$

这就是直流激励的 RC 一阶电路和 RL 中的任一响应的表达式(可以用叠加定理证明)。其波形曲线如图8-21所示。由此可见,直流激励下一阶电路中任一响应总是从初始值 $f(0_+)$ 开始,按照指数规律增长或衰减到稳态值 $f(\infty)$,响应变化的快慢取决于电路的时间常数 τ 。

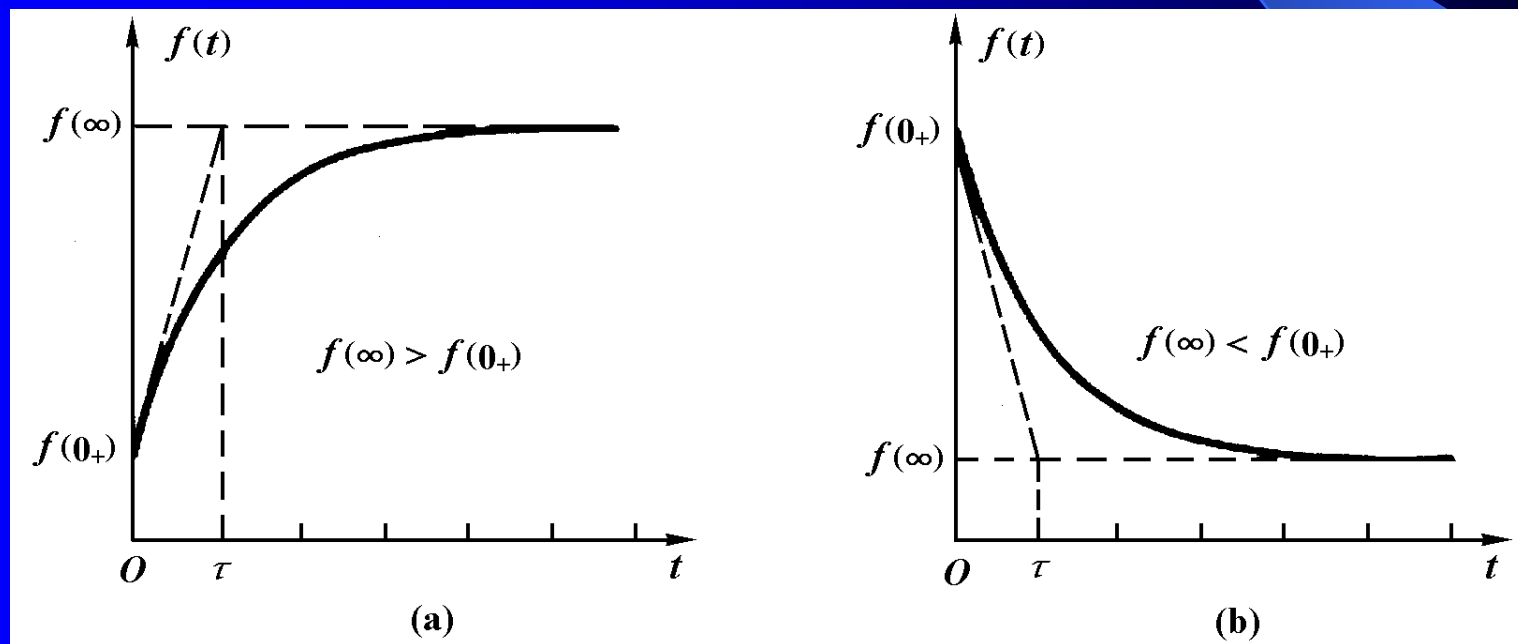
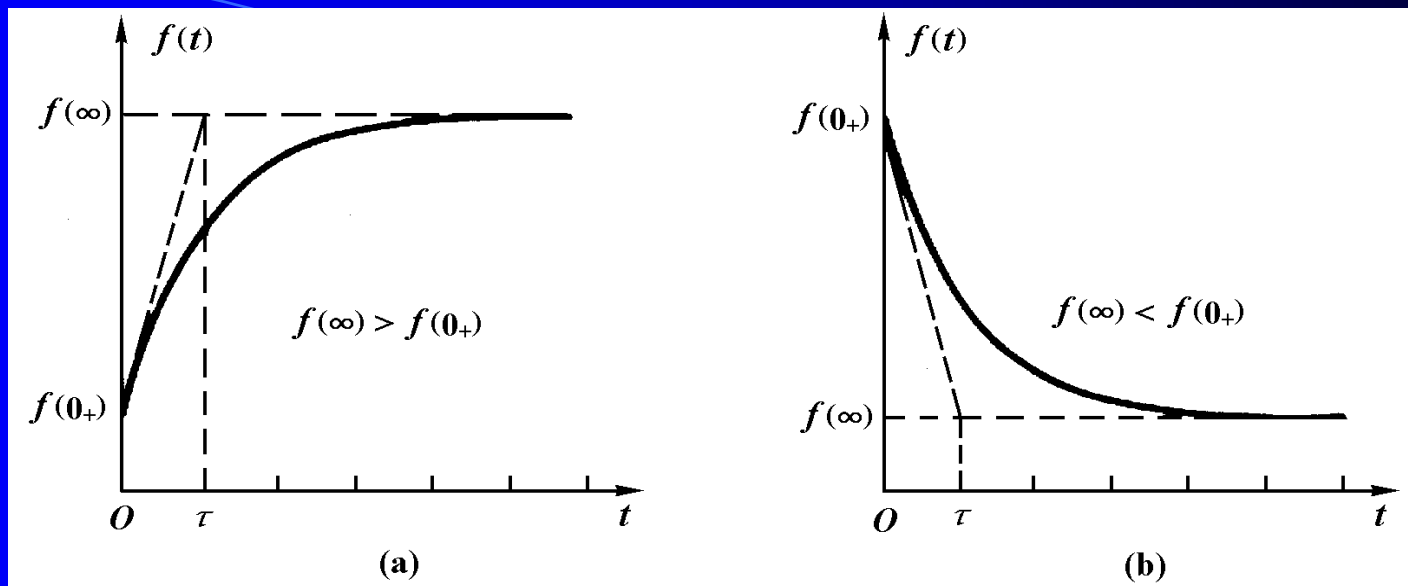


图8-21 直流激励下一阶电路全响应的波形曲线



由此可见，直流激励下一阶电路的全响应取决于 $f(0_+)$ 、 $f(\infty)$ 和 τ 这三个要素。只要分别计算出这三个要素，就能够确定全响应，也就是说，根据式(8-25)可以写出响应的表达式以及画出图8-21那样的全响应曲线，而不必建立和求解微分方程。这种计算直流激励下一阶电路响应的方法称为三要素法。

用三要素法计算含一个电容或一个电感的直流激励一阶电路响应的一般步骤是：

1. 初始值 $f(0_+)$ 的计算

(1) 根据 $t < 0$ 的电路，计算出 $t = 0_-$ 时刻的电容电压 $u_C(0_-)$ 或电感电流 $i_L(0_-)$ 。

(2) 根据电容电压和电感电流连续性，即

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \text{ 和 } i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

确定电容电压或电感电流初始值。

(3) 假如还要计算其它非状态变量的初始值，可以从用数值为 $u_C(0_+)$ 的电压源替代电容或用数值为 $i_L(0_+)$ 的电流源替代电感后所得到的电阻电路中计算出来。

2. 稳态值 $f(\infty)$ 的计算

根据 $t>0$ 的电路，将电容用开路代替或电感用短路代替，得到一个直流电阻电路，再从此电路中计算出稳态值 $f(\infty)$ 。

3. 时间常数 τ 的计算

先计算与电容或电感连接的线性电阻单口网络的输出电阻 R_0 ，然后用以下公式 $\tau=R_0C$ 或 $\tau=L/R_0$ 计算出时间常数。

4. 将 $f(0_+)$, $f(\infty)$ 和 τ 代入下式得到响应的一般表达式和画出图8-21那样的波形曲线。

$$f(t) = [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + f(\infty) \quad (t \geq 0) \quad (8-25)$$

其中 $\tau = R_0 C$ 或 $\tau = L/R_0$

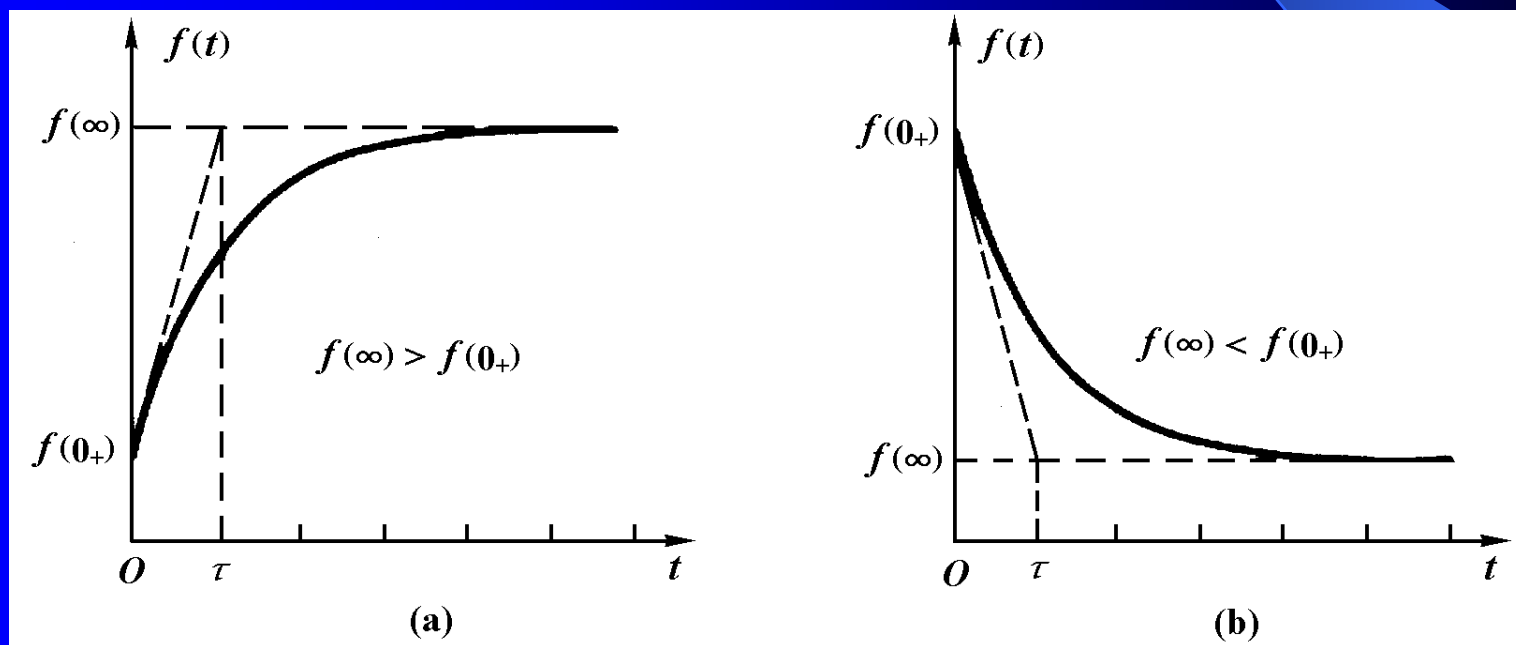
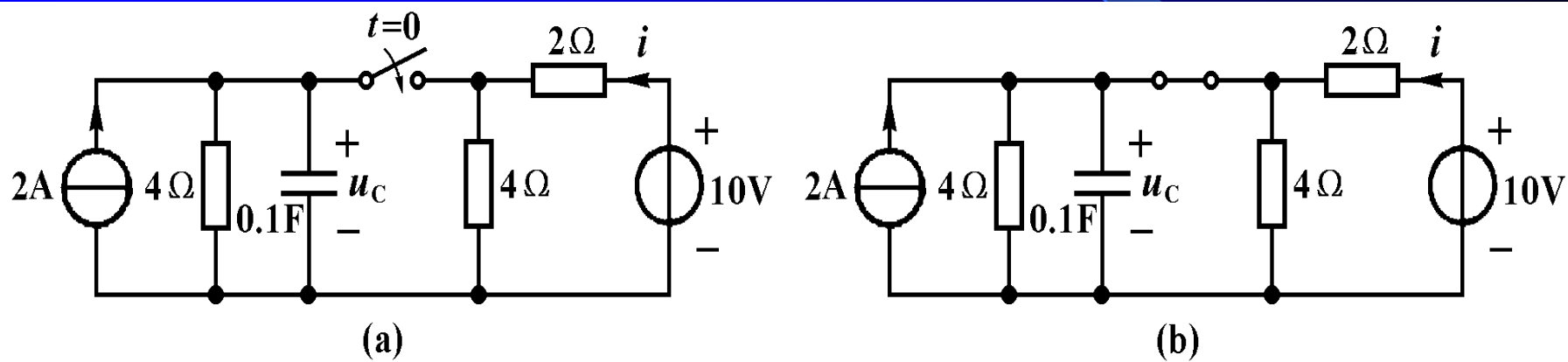
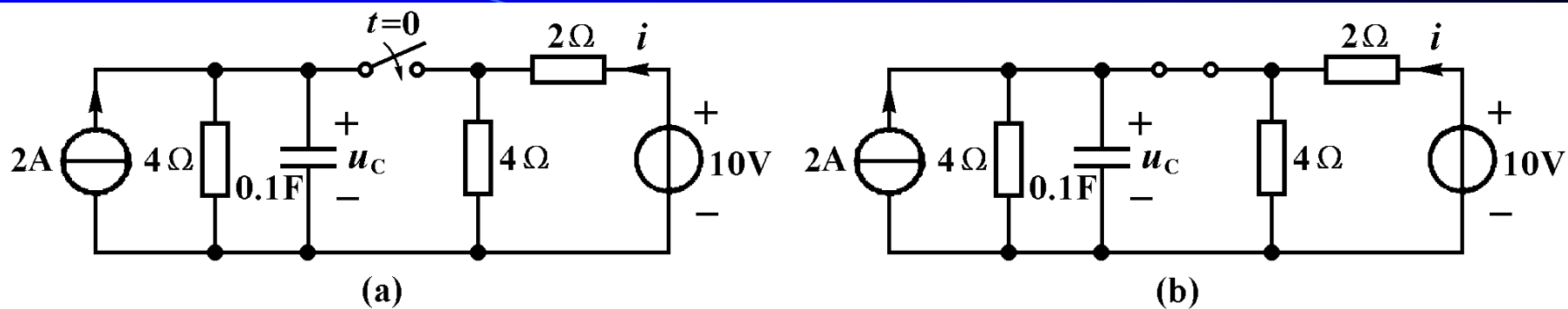


图8-21 直流激励下一阶电路全响应的波形曲线

例8-8 图8-22(a)所示电路原处于稳定状态。 $t=0$ 时开关闭合，求 $t \geq 0$ 的电容电压 $u_C(t)$ 和电流 $i(t)$ ，并画波形图。





解：1. 计算初始值 $u_C(0_+)$

开关闭合前，图(a)电路已经稳定，电容相当于开路，
 电流源电流全部流入 4Ω 电阻中，此时电容电压与电阻电压
 相同

$$u_C(0_-) = 4\Omega \times 2A = 8V$$

由于开关转换时电容电流有界，电容电压不能跃变，

故

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 8V$$

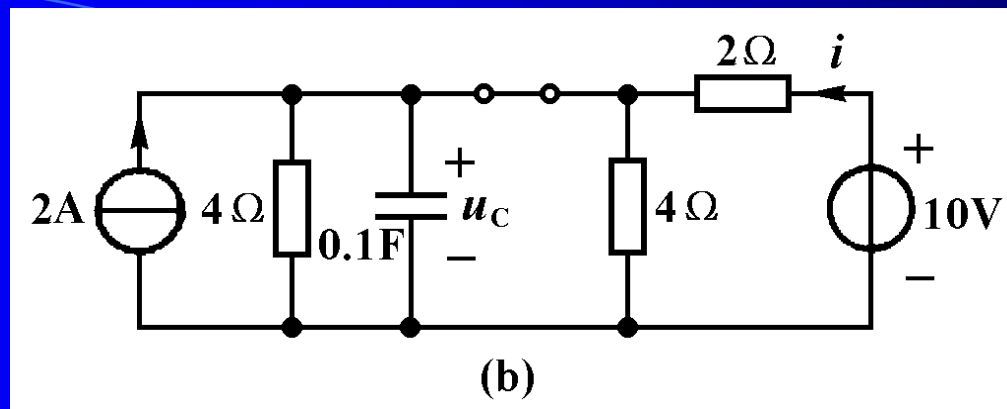
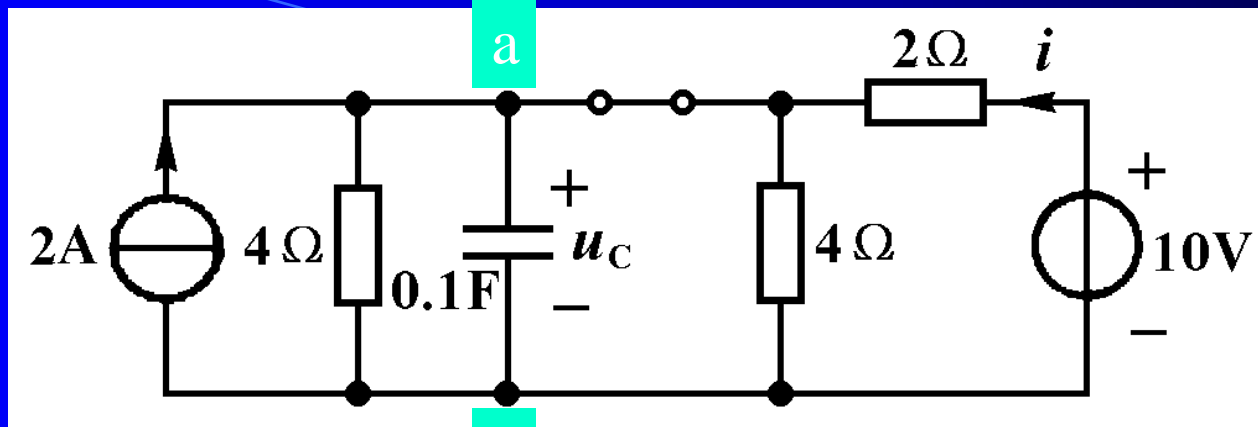


图8-22

2. 计算稳态值 $u_C(\infty)$

开关闭合后，电路如图(b)所示，经过一段时间，重新达到稳定状态，电容相当于开路，根据用开路代替电容所得到一个电阻电路，运用叠加定理求得

$$u_C(\infty) = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} \times 2V + \frac{\frac{4 \times 4}{4 + 4}}{2 + \frac{4 \times 4}{4 + 4}} \times 10V = 2V + 5V = 7V$$



b 图8-22

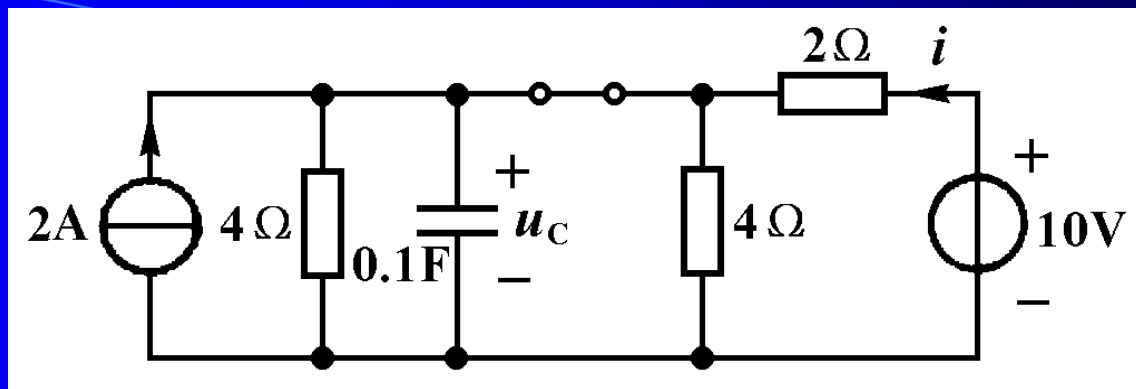
3. 计算时间常数 τ

计算与电容相连接的电阻单口网络的输出电阻，它是三个电阻的并联

$$R_o = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} \Omega = 1\Omega$$

时间常数为

$$\tau = R_o C = 1\Omega \times 0.1F = 0.1s$$



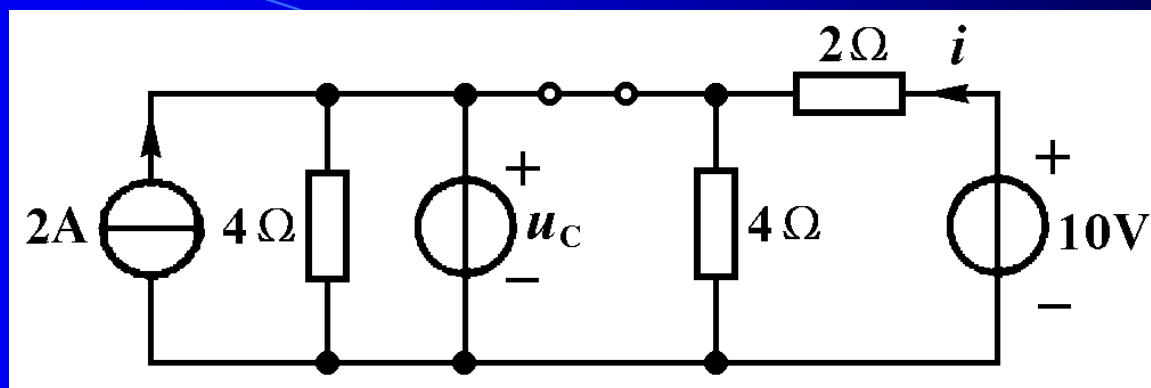
$$f(t) = [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + f(\infty)$$

4. 将 $u_C(0_+) = 8\text{V}$, $u_C(\infty) = 7\text{V}$ 和 $\tau = 0.1\text{s}$ 代入式(8-25)得到响应的一般表达式

$$u_C(t) = [(8-7)e^{-10t} + 7]\text{V} = [7 + 1e^{-10t}]\text{V} \quad (t \geq 0)$$

求得电容电压后, 电阻电流 $i(t)$ 可以利用欧姆定律求得

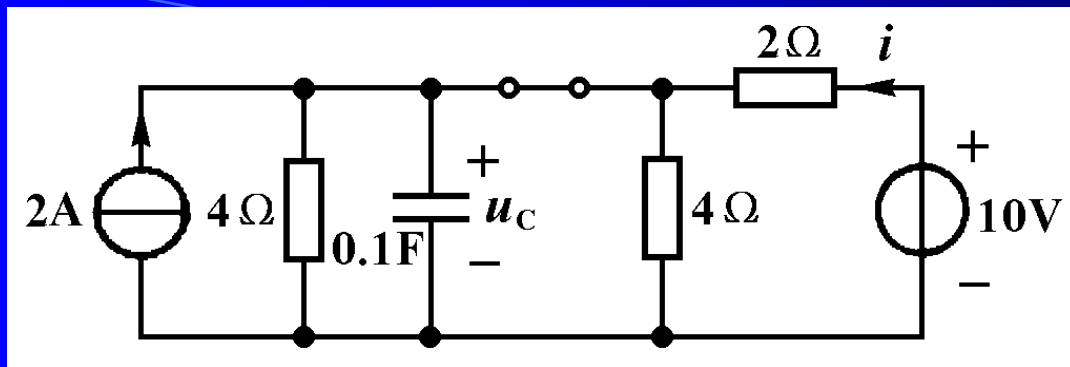
$$i(t) = \frac{10\text{V} - u_C(t)}{2\Omega} = \frac{10 - (7 + 1e^{-10t})}{2} \text{A} = (1.5 - 0.5e^{-10t})\text{A} \quad (t > 0)$$



$$u_C(t) = [7 + 1e^{-10t}] \text{V}$$

也可以用叠加定理分别计算2A电流源，10V电压源和电容电压 $u_C(t)$ 单独作用引起响应之和

$$\begin{aligned} i(t) &= i'(t) + i''(t) + i'''(t) = 0 + \frac{10\text{V}}{2\Omega} - \frac{u_C(t)}{2\Omega} \\ &= (5 - 3.5 + 0.5e^{-10t}) \text{A} \\ &= (1.5 - 0.5e^{-10t}) \text{A} \quad (t > 0) \end{aligned}$$



$$u_C(0_+) = 8V$$

电阻电流*i(t)*还可以利用三要素法直接求得

$$i(0_+) = \frac{10V - u_C(0_+)}{2\Omega} = \frac{10 - 8}{2} A = 1A$$

$$i(\infty) = \frac{10V - u_C(\infty)}{2\Omega} = \frac{10 - 7}{2} A = 1.5A$$

由于电路中每个响应具有相同的时间常数，不必重新计算，用三要素公式得到

$$i(t) = [(1 - 1.5)e^{-10t} + 1.5]A = (1.5 - 0.5e^{-10t})A \quad (t > 0)$$

值得注意的是该电阻电流在开关转换时发生了跃变， $i(0_+) = 1A \neq i(0_-) = 1.667A$ ，因而在电流表达式中，标明的时间范围是 $t > 0$ ，而不是 $t \geq 0$ 。

例8-9 图8-23示电路中，开关转换前电路已处于稳态， $t=0$ 时开关S由1端接至2端，求 $t>0$ 时的电感电流 $i_L(t)$ ，电阻电流 $i_2(t)$ ， $i_3(t)$ 和电感电压 $u_L(t)$ 。

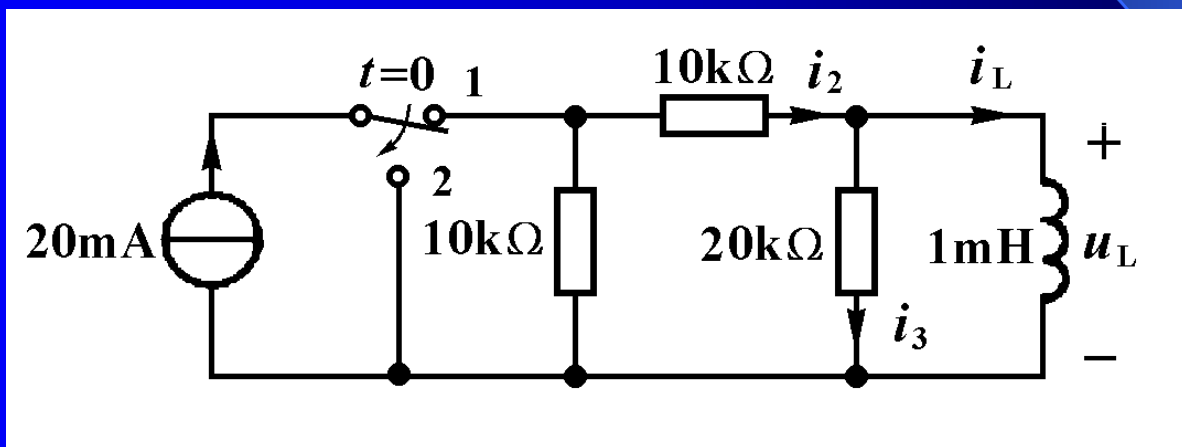
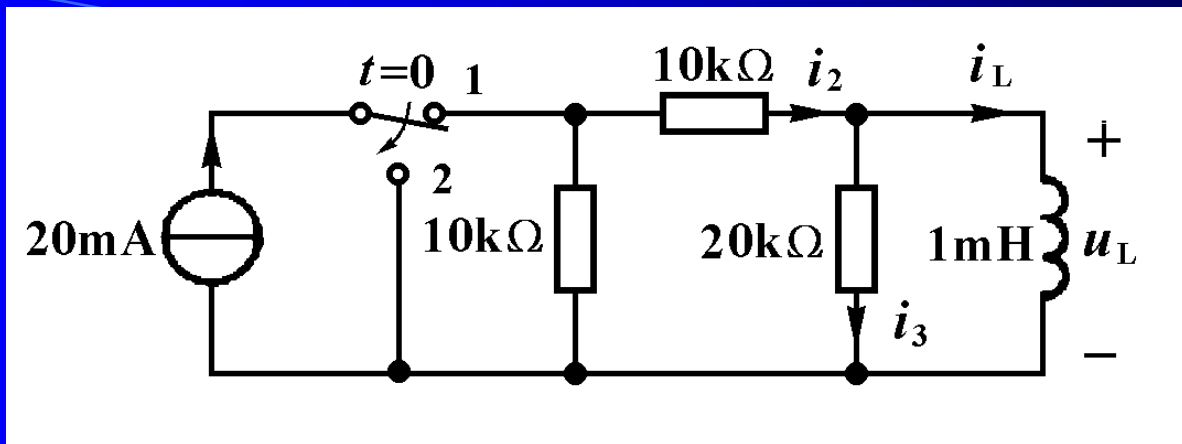


图8-23



解：用三要素法计算电感电流。

1. 计算电感电流的初始值 $i_L(0_+)$

直流稳态电路中，电感相当于短路，此时电感电流为

$$i_L(0_-) = \frac{20\text{mA}}{2} = 10\text{mA}$$

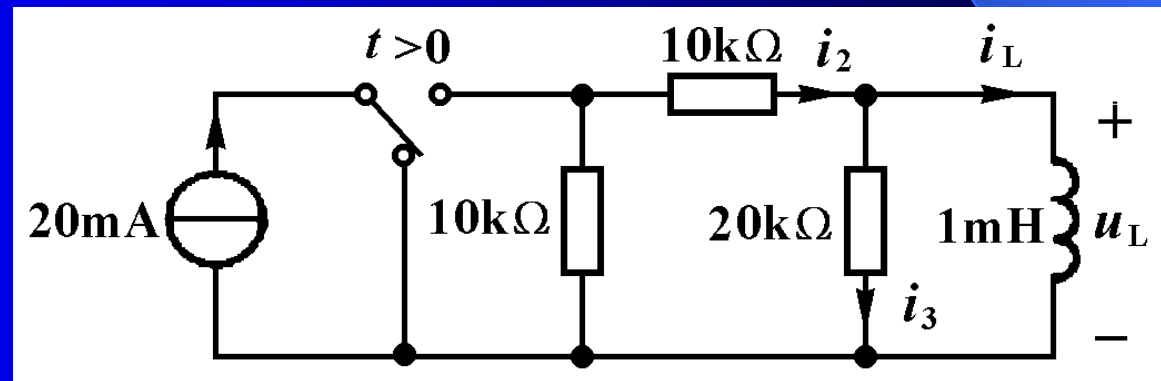
开关转换时，电感电压有界。电感电流不能跃变，即

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 10\text{mA}$$

2. 计算电感电流的稳态值 $i_L(\infty)$

开关转换后，电感与电流源脱离，电感储存的能量释放出来消耗在电阻中，达到新的稳态时，电感电流为零，即

$$i_L(\infty) = 0$$



3. 计算时间常数 τ

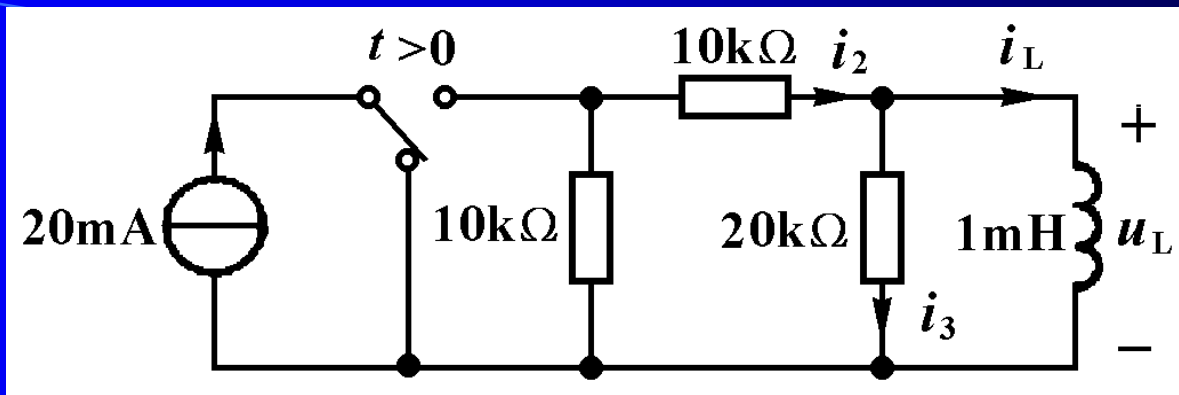
与电感连接的电阻单口网络的等效电阻以及时间常数为

$$R_o = \frac{20(10 + 10)}{20 + 10 + 10} \text{ k}\Omega = 10 \text{ k}\Omega \quad \tau = \frac{10^{-3}}{10 \times 10^3} \text{ s} = 1 \times 10^{-7} \text{ s}$$

4. 计算 $i_L(t)$, $u_L(t)$, $i_2(t)$ 和 $i_3(t)$ 。

将 $i_L(0_+) = 10 \text{ mA}$, $i_L(\infty) = 0$ 和 $\tau = 1 \times 10^{-7} \text{ s}$ 代入式(8-25)得到电感电流的表达式

$$i_L(t) = [(10 \times 10^{-3} - 0)e^{-10^7 t} + 0] \text{ A} = 10e^{-10^7 t} \text{ mA} \quad (t \geq 0)$$



然后根据KCL, KVL和VCR求出其它电压电流

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = -10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 10^7 e^{-10^7 t}$$

$$= -100e^{-10^7 t} \text{ V} \quad (t > 0)$$

$$i_3(t) = \frac{u_L(t)}{20\text{k}\Omega} = \frac{-100e^{-10^7 t} \text{ V}}{20 \times 10^3}$$

$$= -5e^{-10^7 t} \text{ mA} \quad (t > 0)$$

$$i_2(t) = i_L(t) + i_3(t) = 10e^{-10^7 t} \text{ mA} - 5e^{-10^7 t} \text{ mA}$$

$$= 5e^{-10^7 t} \text{ mA} \quad (t > 0)$$

例8-10 图8-24(a)所示电路在 $t=0$ 时闭合开关，求电容电压 $u_C(t)$ 和电流 $i_2(t)$ 的零状态响应。

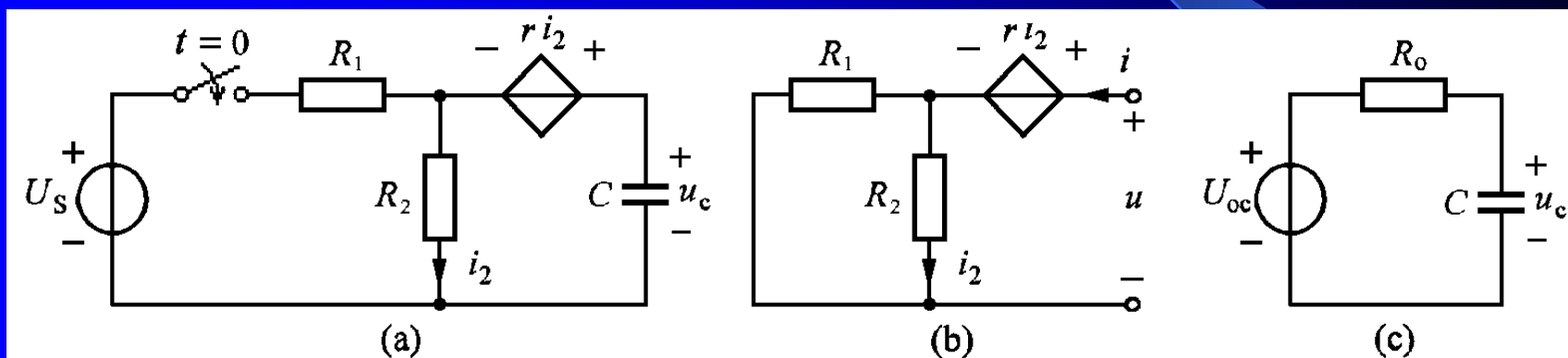
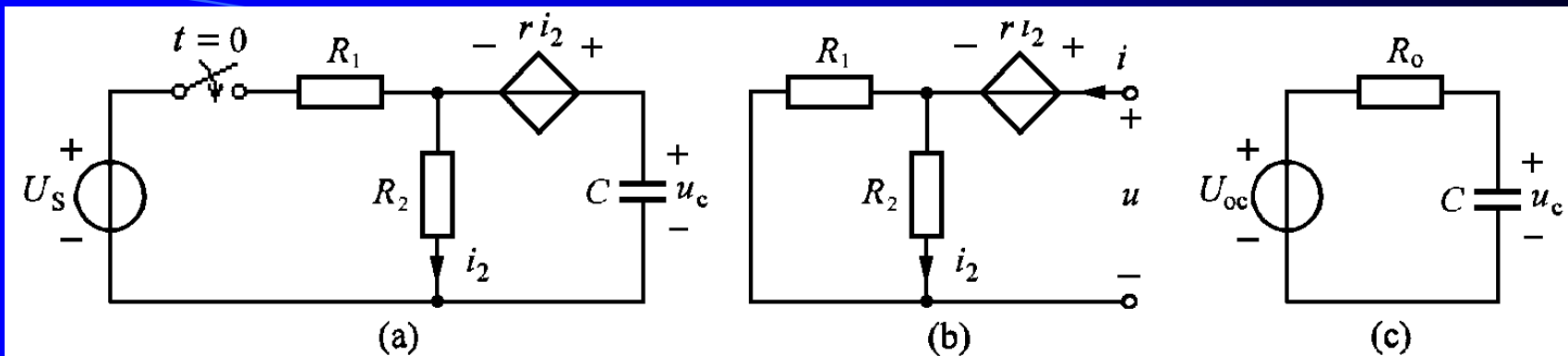


图8-24 例8-10

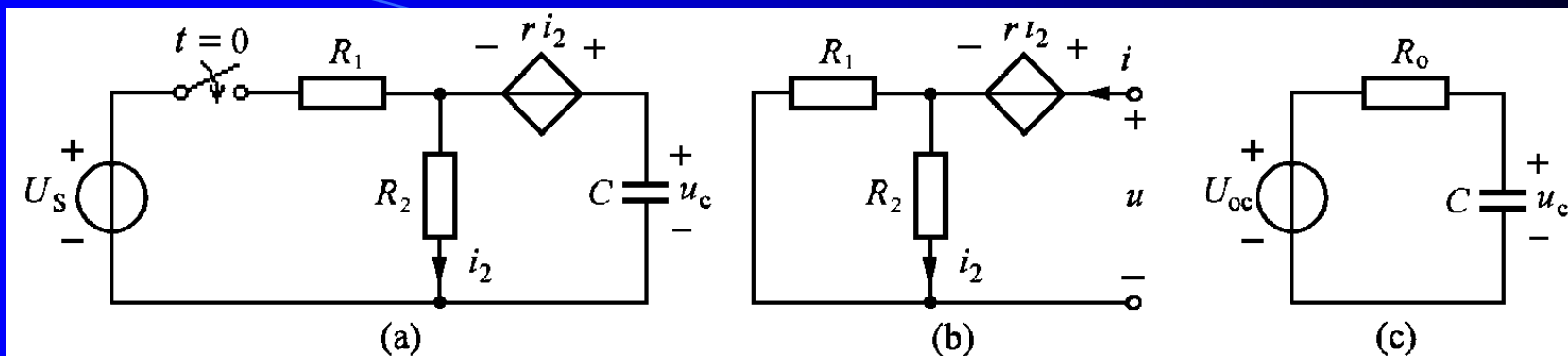


解：在开关闭合以后，与电容连接的含有独立电压源和受控源的电阻单口网络用图8-24(c)所示的戴维宁等效电路代替，其中

$$U_{oc} = (r + R_2)i_2 = (r + R_2) \frac{U_s}{R_1 + R_2}$$

用外加电源法求图8-24(b)所示电阻单口网络的输出电阻 R_o 。

$$R_o = \frac{u}{i} = \frac{(r + R_2)i_2}{i} = \frac{(r + R_2)}{i} \frac{R_1}{R_1 + R_2} i = \frac{(r + R_2)R_1}{R_1 + R_2}$$



时间常数为

$$\tau = \frac{(r + R_2)R_1C}{R_1 + R_2}$$

用三要素公式得到电容电压的表达式

$$u_C(t) = U_{oc}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{(r + R_2)}{R_1 + R_2} U_s (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (t \geq 0)$$

从图8-24(a)电路中开关闭合后的电路求得电流 $i_2(t)$

$$i_2(t) = \frac{u_C(t)}{r + R_2} = \frac{U_s}{R_1 + R_2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (t > 0)$$

二、包含开关序列的直流一阶电路

本小节讨论的直流一阶电路中包含有在不同时刻转换的开关，在开关没有转换的时间间隔内，它是一个直流一阶电路，可以用三要素法来计算。

对于这一类电路，我们可以按照开关转换的先后次序，从时间上分成几个区间，分别用三要素法来求解电路的响应。

例8-11 图8-25(a)所示电路中，电感电流 $i_L(0_-)=0$ ， $t=0$ 时，开关 S_1 闭合，经过0.1s，再闭合开关 S_2 ，同时断开 S_1 。试求电感电流 $i_L(t)$ ，并画波形图。

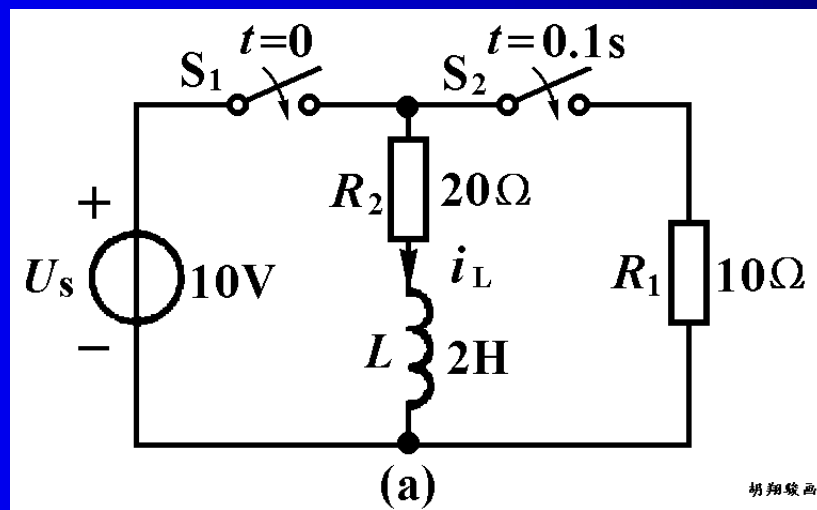
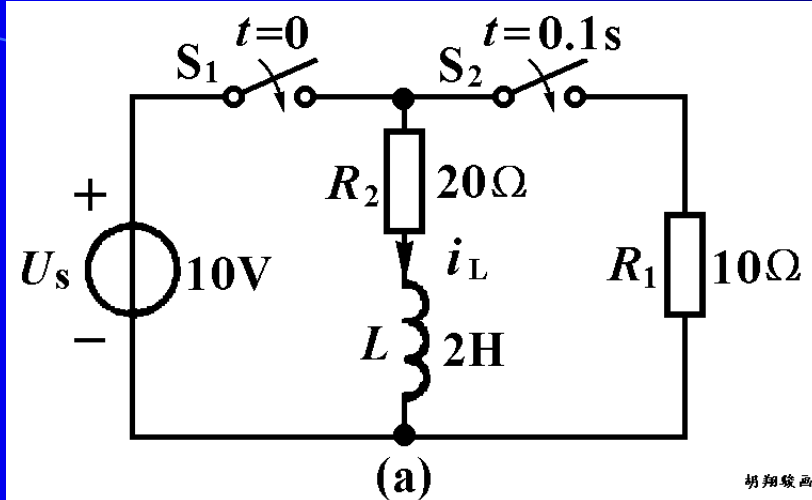


图8-25



解：1. 在 $0 \leq t \leq 0.1\text{s}$ 时间范围内响应的计算

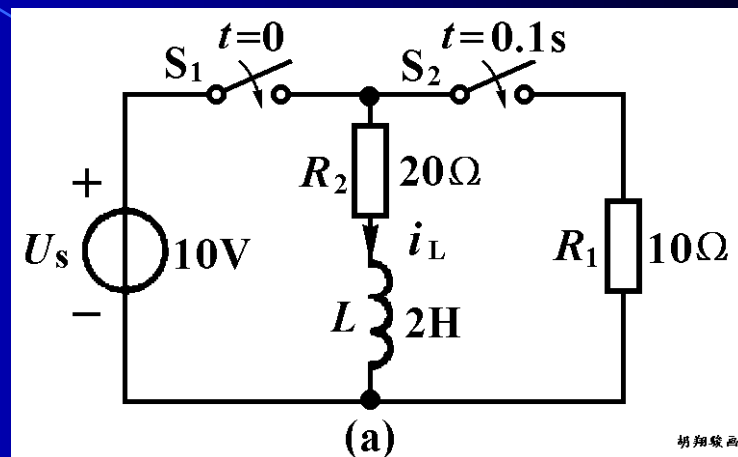
S_1 闭合后, $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$, 处于零状态, 电感电流为零状态响应。可以用三要素法求解

$$i_L(\infty) = \frac{U_s}{R_2} = \frac{10\text{V}}{20} \text{A} = 0.5\text{A} \quad \tau_1 = \frac{L}{R_2} = \frac{2\text{H}}{20\Omega} = 0.1\text{s}$$

$$i_L(t) = 0.5(1 - e^{-10t})\text{A} \quad (0.1\text{s} \geq t \geq 0)$$

2. 在 $t \geq 0.1\text{s}$ 时间范围内响应的计算

仍然用三要素法，先求
 $t=0.1\text{s}$ 时刻的初始值。



$$\begin{aligned} i_L(0.1_+) &= i_L(0.1_-) \\ &= 0.5(1 - e^{-10 \times 0.1}) \text{A} = 0.316 \text{A} \end{aligned}$$

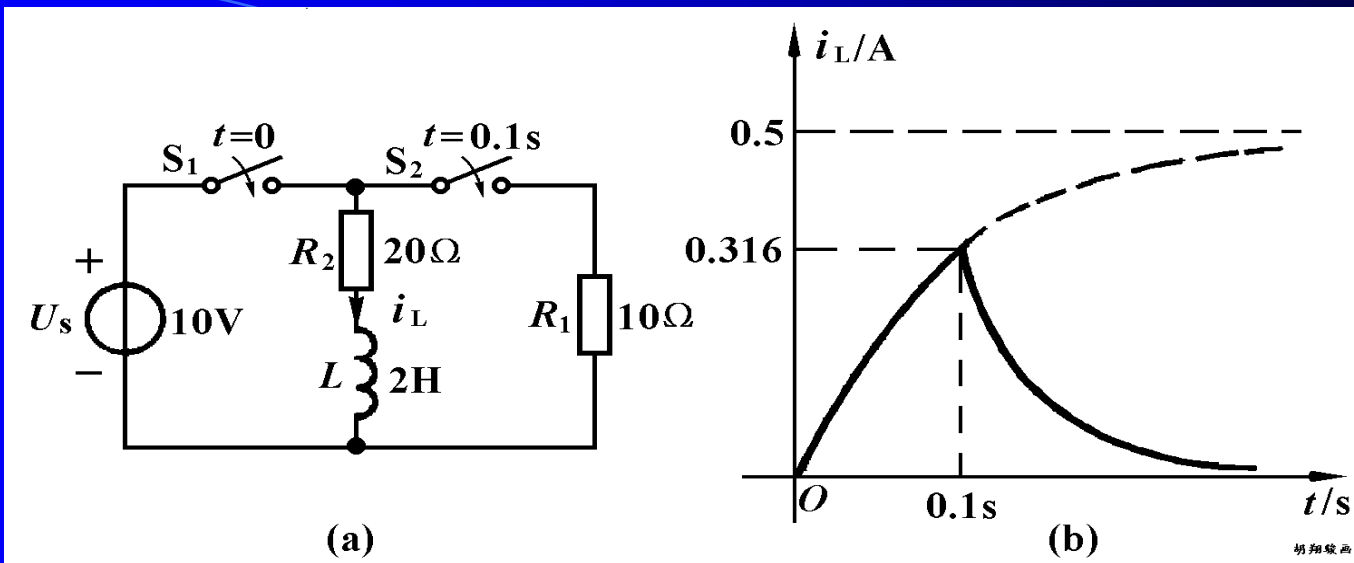
此后的电感电流属于零输入响应， $i_L(\infty) = 0$ 。

在此时间范围内电路的时间常数为

$$\begin{aligned}\tau_2 &= \frac{L}{R_1 + R_2} \\ &= \frac{2}{10 + 20} \text{ s} = \frac{2}{30} \text{ s} = 0.0667 \text{ s}\end{aligned}$$

根据三要素公式 (8-25) 得到

$$\begin{aligned}i_L(t) &= i_L(0.1_+) e^{\frac{t-0.1}{\tau_2}} \\ &= 0.316 e^{-15(t-0.1s)} \text{ A} \quad (t \geq 0.1s)\end{aligned}$$

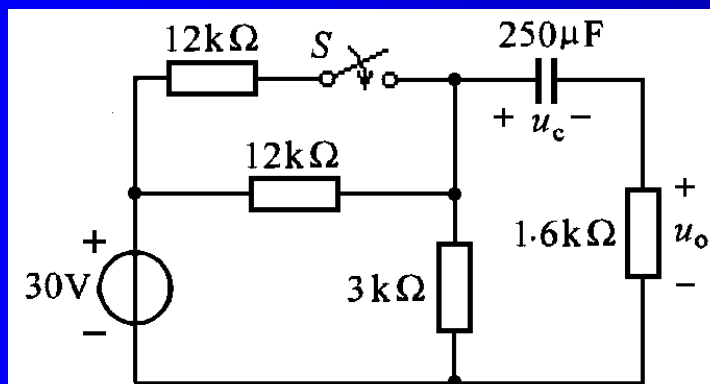


$$i_L(t) = 0.5(1 - e^{-10t}) \text{ A} \quad (0.1\text{s} \geq t \geq 0)$$

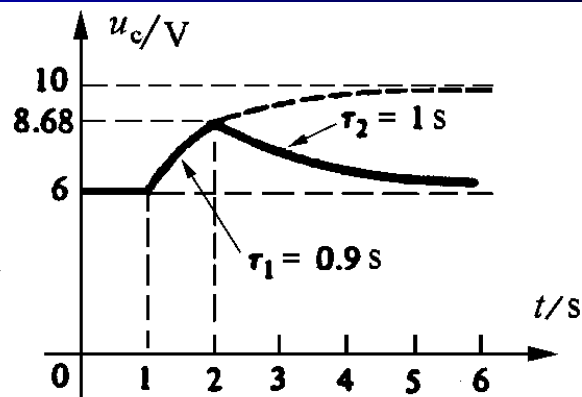
$$i_L(t) = i_L(0.1_+) e^{\frac{t-0.1}{\tau_2}} = 0.316 e^{-15(t-0.1\text{s})} \text{ A} \quad (t \geq 0.1\text{s})$$

电感电流 $i_L(t)$ 的波形曲线如图(b)所示。在 $t=0$ 时，它从零开始，以时间常数 $\tau_1=0.1\text{s}$ 确定的指数规律增加到最大值 0.316A 后，就以时间常数 $\tau_2=0.0667\text{s}$ 确定的指数规律衰减到零。

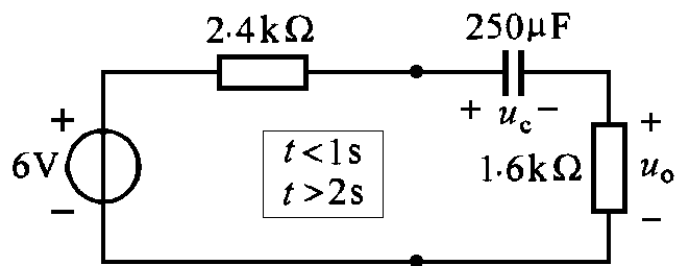
例8-12 图8-26(a)所示电路中，开关断开已经很久， $t=1\text{s}$ 时开关S闭合， $t=2\text{s}$ 时开关S重新断开，试求 $t \geq 0$ 电容电压 $u_c(t)$ 和电阻电压 $u_o(t)$ 。



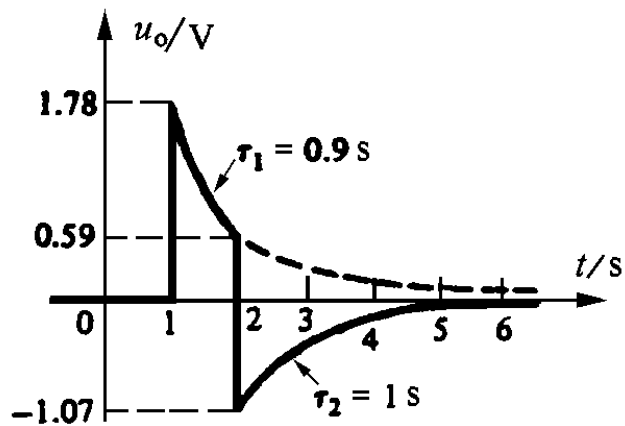
(a)



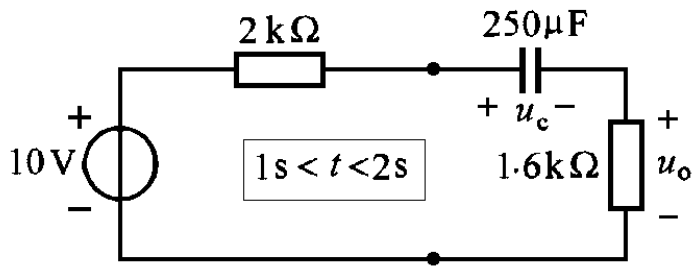
(d)



(b)



(e)



(c)

解：本题要求计算电容电压和 $1.6\text{k}\Omega$ 电阻电压，先将电路其余部分用戴维宁等效电路代替，得到开关S断开和闭合时的等效电路如图8-26(b)和(c)所示，再从时间上分段计算。

1. $1\text{s} \leq t \leq 2\text{s}$ 区间内响应的计算

根据

$$u_C(1_+) = u_C(1_-) = 6\text{V}, u_C(\infty) = 10\text{V}$$
$$\tau = 3.6 \times 10^3 \times 250 \times 10^{-6} = 0.9\text{s}$$

得到电容电压为

$$u_C(t) = 10 - 4e^{-\frac{t-1}{0.9}} \text{V} \quad (1\text{s} \leq t \leq 2\text{s})$$

2. $t \geq 2\text{s}$ 区间内响应的计算

$$u_C(2_+) = u_C(2_-) = 10 - 4e^{-1/0.9} = 8.68\text{V}, u_C(\infty) = 6\text{V}$$

$$\tau = 4 \times 10^3 \times 250 \times 10^{-6} = 1\text{s}$$

得到

$$u_C(t) = 6 + 2.68e^{-(t-2)} \text{ V} \quad (t \geq 2\text{s})$$

用三要素法也可以求出电压 $u_o(t)$ ，读者可以检验以下计算结果是否正确。

$$u_o(t) = \begin{cases} 1.78e^{-\frac{t-1}{0.9}} \text{ V} & (1\text{s} < t < 2\text{s}) \\ -1.07e^{-(t-2)} \text{ V} & (t > 2\text{s}) \end{cases}$$

画出 $u_c(t)$ 和 $u_o(t)$ 的波形如图8-26(d)和(e)所示。

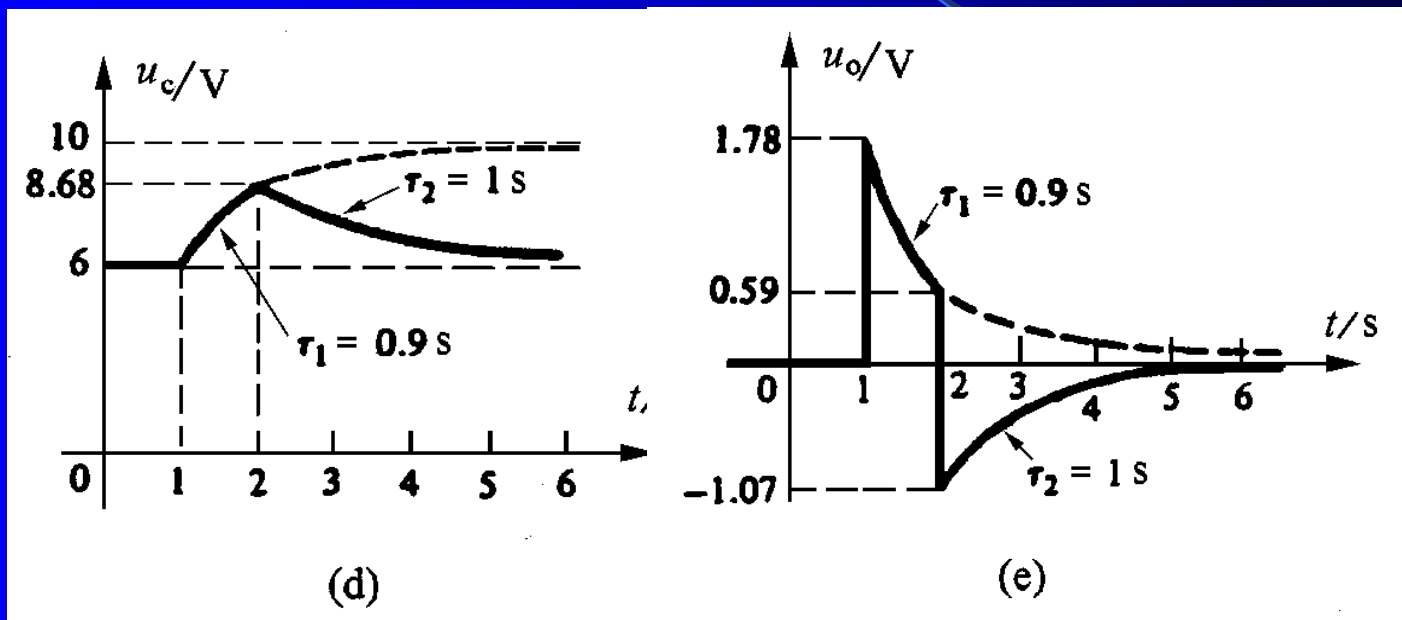


图8-26

三、分段恒定信号激励的一阶电路

通过电路中的开关可以将一个直流电源接通到某些电路中，它们所起的作用等效于一个分段恒定信号的时变电源。例如图(a)所示包含的开关电路，其输出电压 $u(t)$ 等效于图(b)所示的一个时变电压源，其电压波形如图8-27(c)所示。假如 $t=t_0$ 时刻开关再由2端转换到1端，使其输出电压为零，此时图(a)电路等效于产生图(d)所示的脉冲波形的时变电压源。

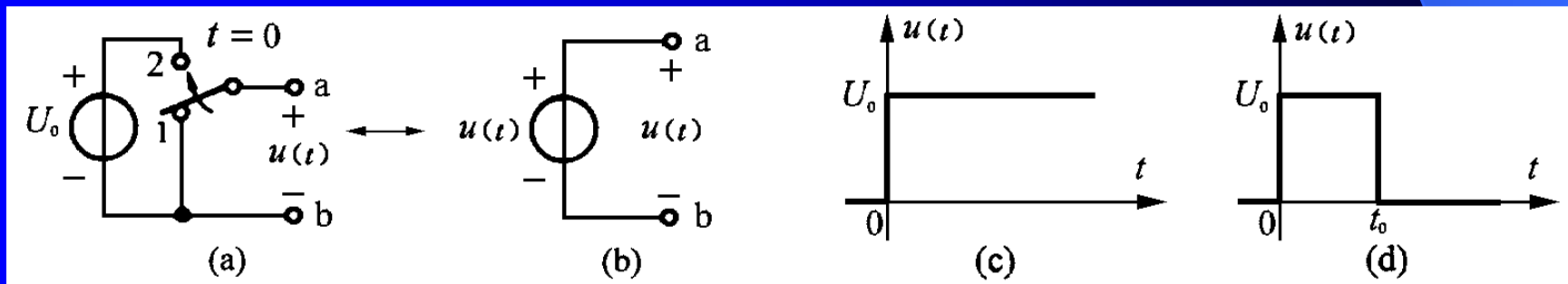


图8-27 利用开关的转换产生分段恒定信号

例如对于图(b)所示波形的电压源作用于图(a)所示的RC串联电路，用三要素法容易画出 $i_C(t)$ 、 $u_C(t)$ 的波形，如图(c)和(d)所示。注意到电容电压的波形是连续的，而电容电流波形在 $t=0$ 时是不连续的。

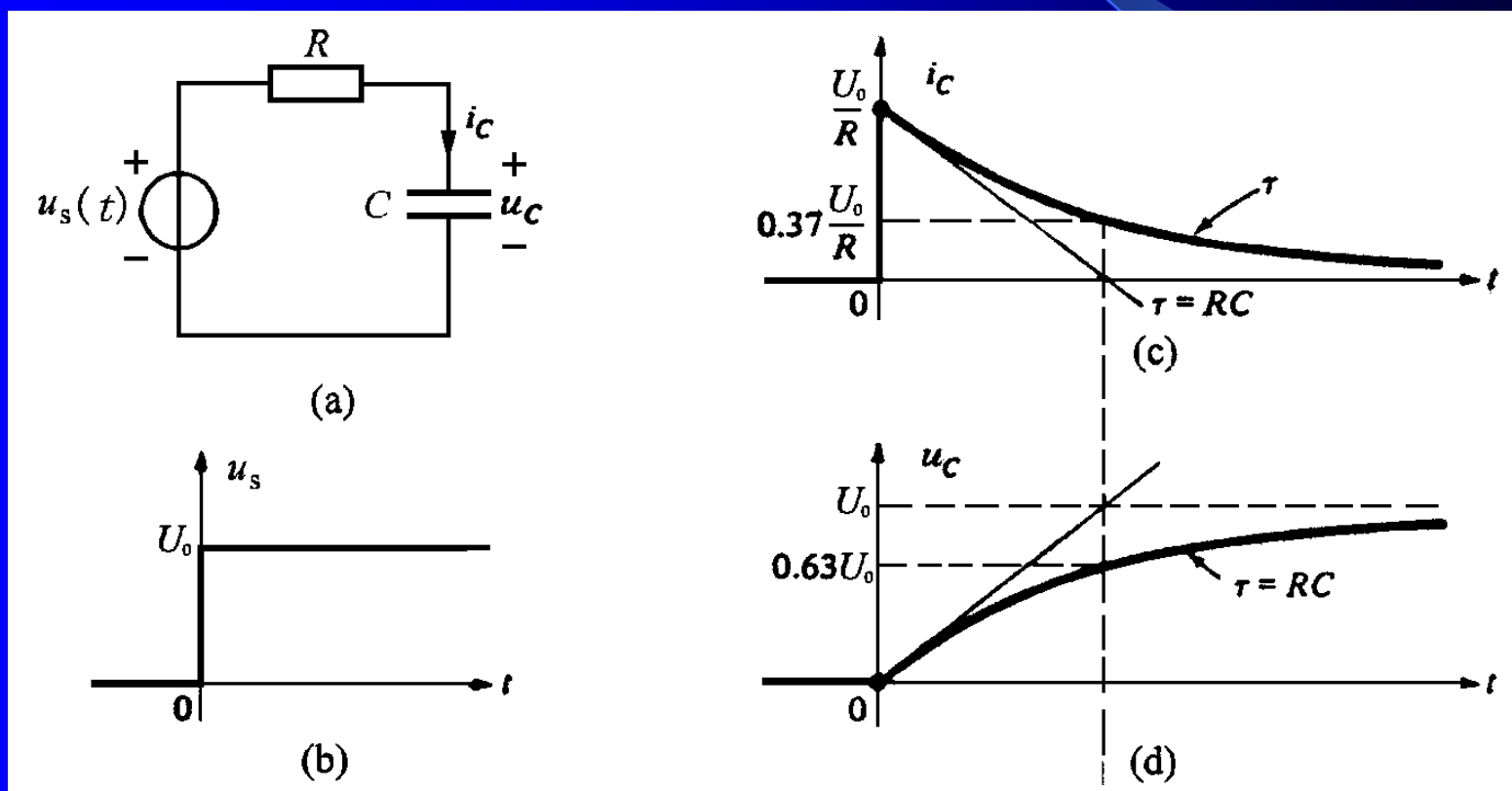


图8-28 用三要素法求分段恒定信号激励的一阶电路响应

例8-13 电路如图8-29(a)所示，独立电流源的波形如图(b)所示，求电感电流的响应，并画出波形曲线。

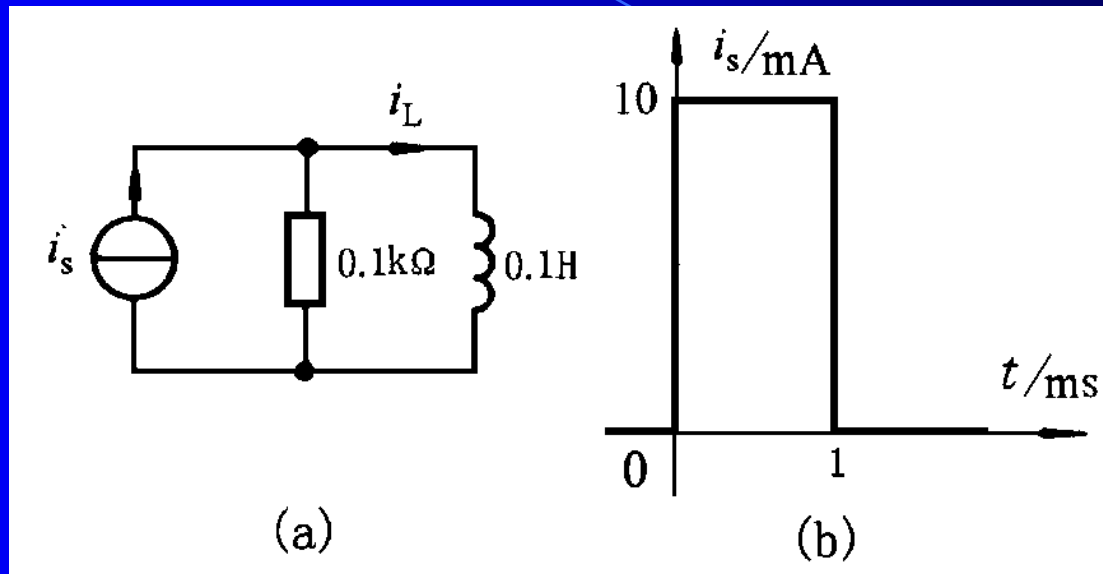


图8-29

解：按照波形的具体情况，从时间上分三段用三要素法求电感电流的响应。

1. $t \leq 0$, $i_s(t) = 0$, 由此得到

$$i_L(t) = 0 \quad t \leq 0$$

2. $0 \leq t \leq 1\text{ms}$, $i_s(t) = 10\text{mA}$

(1) 计算初始值 $i_L(0_+)$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

(2) 计算稳态值 $i_L(\infty)$

$$i_L(\infty) = 10\text{mA}$$

(3) 计算时间常数 τ

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.1\text{H}}{0.1 \times 10^3 \Omega} = 1\text{ms}$$

(4) 利用三要素公式得到

$$i_L(t) = 10 \times 10^{-3} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \text{A} = 10(1 - e^{-10^3 t}) \text{mA} \quad (0 \leq t \leq 1\text{ms})$$

$$\text{当 } t = 1\text{ms} \text{ 时, } i_L(1\text{ms}) = 10 \times 10^{-3} (1 - e^{-1}) \text{A} = 6.32\text{mA}$$

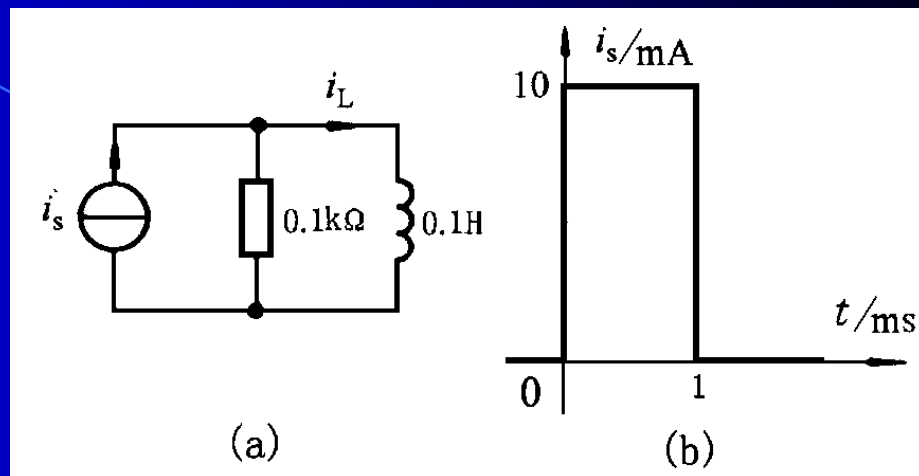
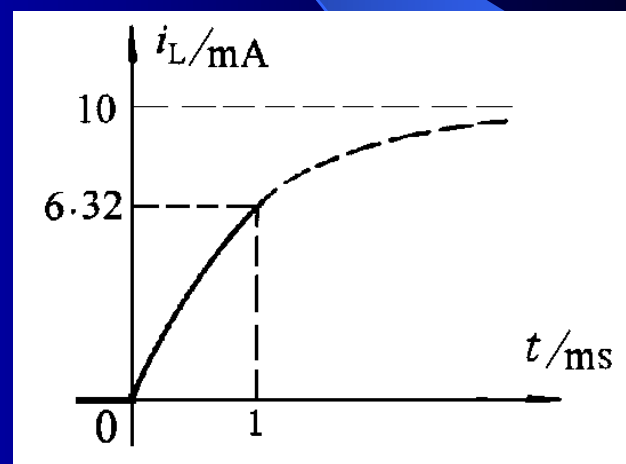


图 8-29



3. $1\text{ms} \leq t < \infty$, $i_s(t) = 0$

(1) 计算初始值 $i_L(1\text{ms}_+)$

$$i_L(1\text{ms}_+) = i_L(1\text{ms}_-) = 6.32\text{mA}$$

(2) 计算稳态值 $i_L(\infty)$

$$i_L(\infty) = 0$$

(3) 时间常数相同, 即

$$\tau = 1\text{ms}$$

(4) 根据三要素公式得到

$$\begin{aligned} i_L(t) &= 6.32e^{-\frac{t-1\text{ms}}{\tau}} \text{mA} \\ &= 6.32e^{-10^3(t-10^{-3})} \text{mA} \quad (t > 1\text{ms}) \end{aligned}$$

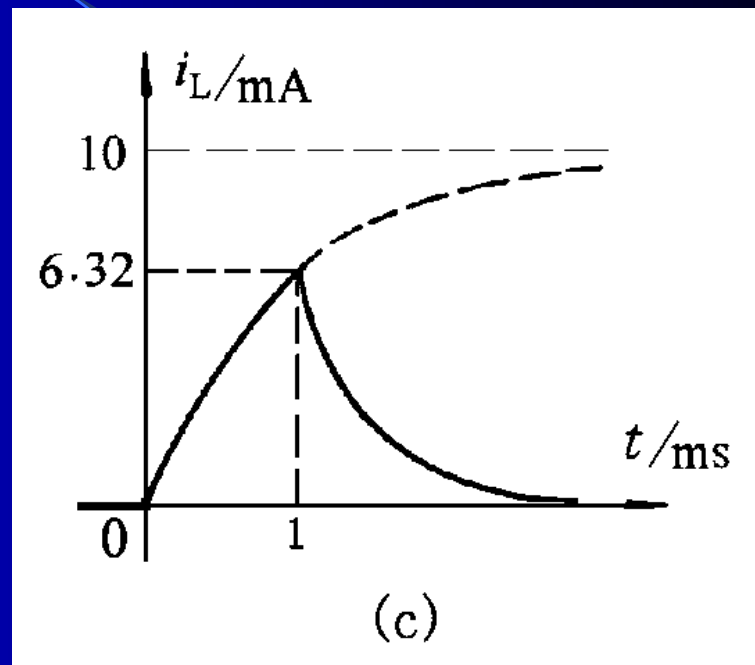


图8-29

§ 8-5 阶跃函数和阶跃响应

在上一节的讨论中，我们看到直流一阶电路中的各种开关，可以起到将直流电压源和电流源接入电路或脱离电路的作用，这种作用可以描述为分段恒定信号对电路的激励。

随着电路规模的增大和计算工作量增加，有必要引入阶跃函数来描述这些物理现象，以便更好地建立电路的物理模型和数学模型，也有利于用计算机分析和设计电路。

一、阶跃函数

单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 的定义为

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (8-26)$$

波形如图(a)所示。当 $t=0$ 时， $\varepsilon(t)$ 从0跃变到1。当跃变量是 k 个单位时，可以用阶跃函数 $k\varepsilon(t)$ 来表示，其波形如图(b)所示。当跃变发生在 $t=t_0$ 时刻，可以用延迟阶跃函数 $\varepsilon(t-t_0)$ 表示，其波形如图(c)所示。函数 $\varepsilon(-t)$ 表示 $t<0$ 时， $\varepsilon(-t)=1$ ， $t>0$ 时， $\varepsilon(-t)=0$ ，如图(d)所示。

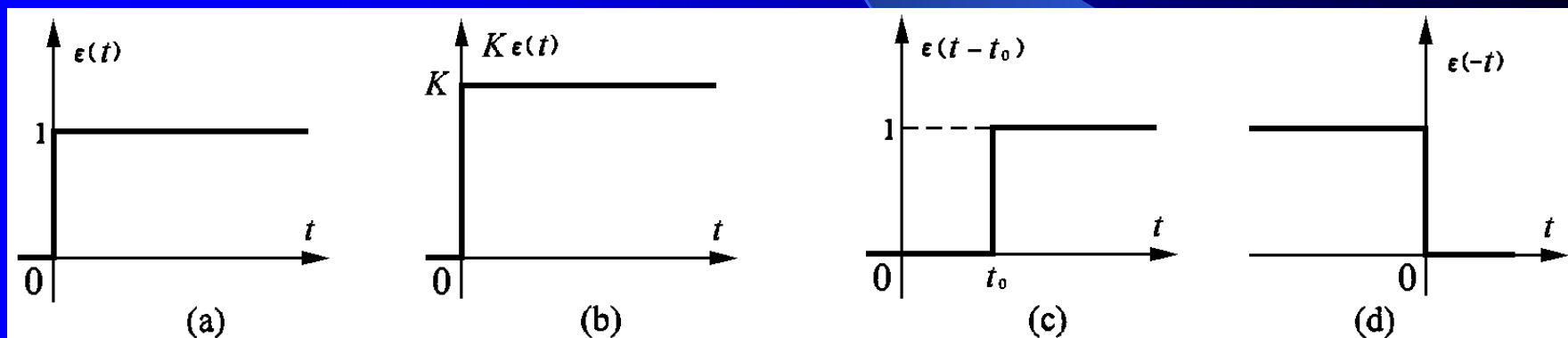


图8-30 阶跃函数

当直流电压源或直流电流源通过一个开关的作用施加到某个电路时，有时可以表示为一个阶跃电压或阶跃电流作用于该电路。

例如图 (a)所示开关电路，就其端口所产生的电压波形 $u(t)$ 来说，等效于图(b)所示的阶跃电压源 $U_0 \epsilon(t)$ 。

图(c)所示开关电路，就其端口所产生的电流波形 $i(t)$ 来说，等效于图(d)所示的阶跃电流源 $I_0 \epsilon(t)$ 。

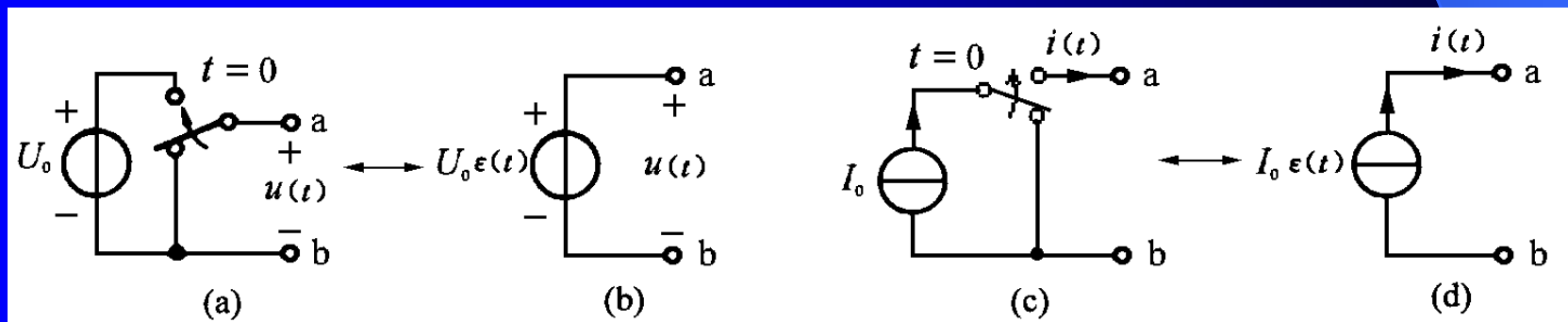


图8-31 用阶跃电源来表示开关的作用

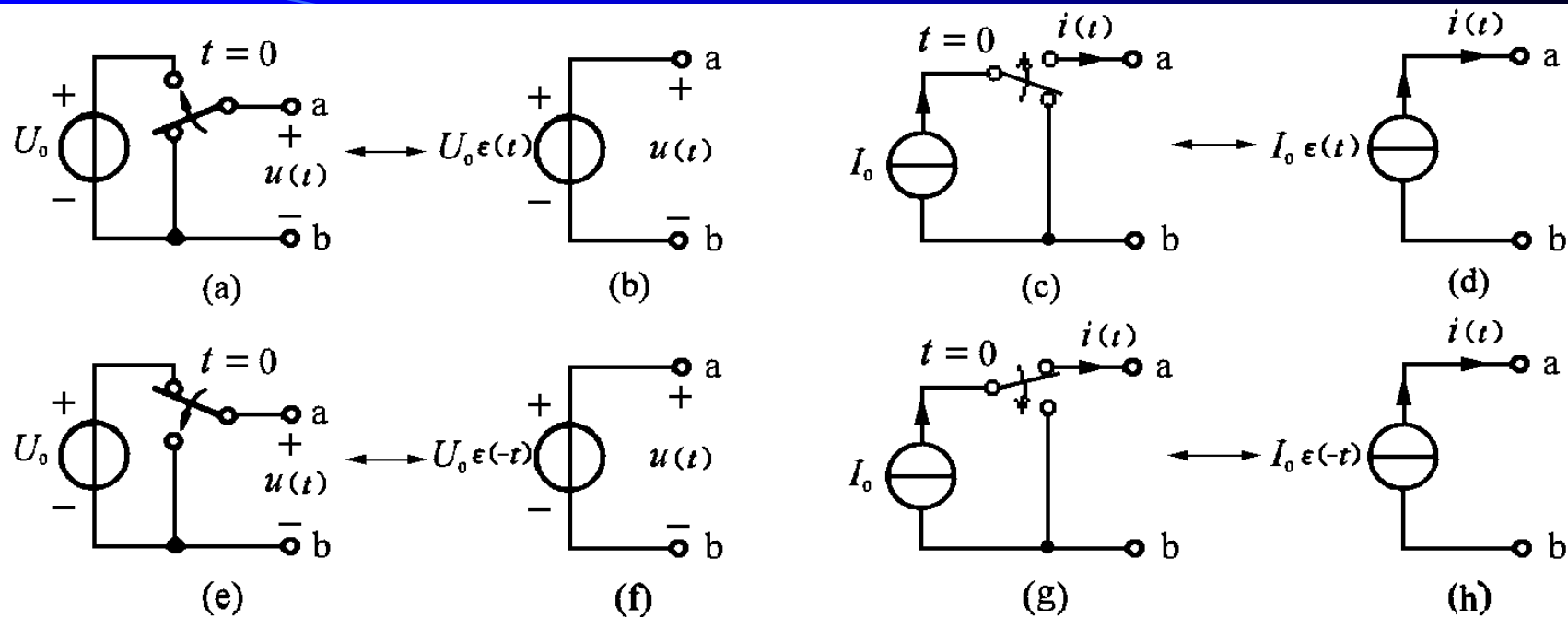


图8-31 用阶跃电源来表示开关的作用

与此相似，图(e)所示电路等效于图(f)所示阶跃电压源 $U_0 \epsilon(-t)$ ；图(g)所示电路等效于图8-31(h)所示阶跃电流源 $I_0 \epsilon(-t)$ ；引入阶跃电压源和阶跃电流源，可以省去电路中的开关，使电路的分析研究更加方便，下面举例加以说明。

例8-14 电路如图8-32(a)所示, 求 $t \geq 0$ 时电感电流 $i_L(t)$ 。

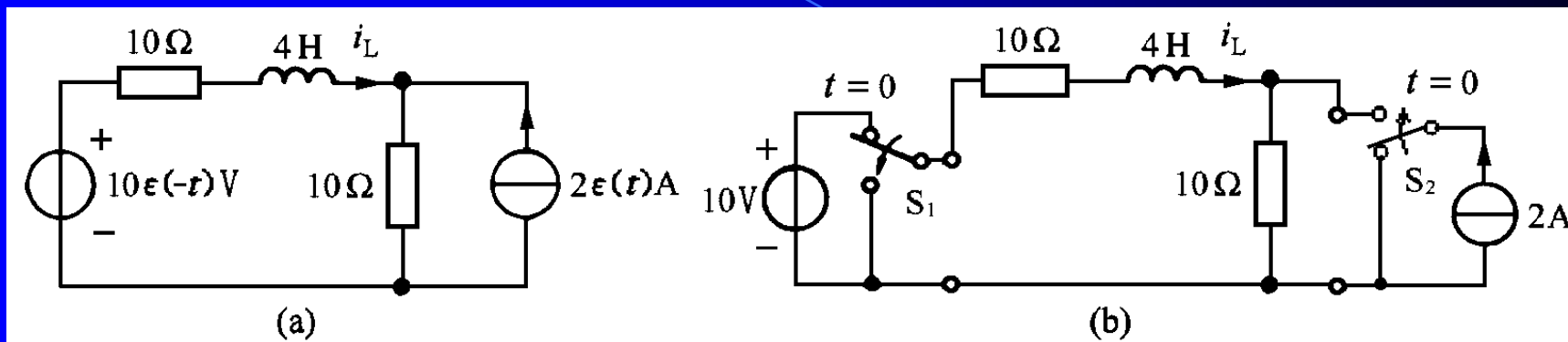


图8-32

解: 图(a)电路中的阶跃电压源 $10\epsilon(-t)\text{V}$, 等效于开关 S_1 将 10V 电压源接入电路; 阶跃电流源 $2\epsilon(t)\text{A}$, 等效于开关 S_2 将 2A 电流源接入电路, 如图(b)所示。就电感电流来说, 图(a)和(b)是等效的。

根据图(b)电路, 用三要素法容易求得电感电流 $i_L(t)$ 。

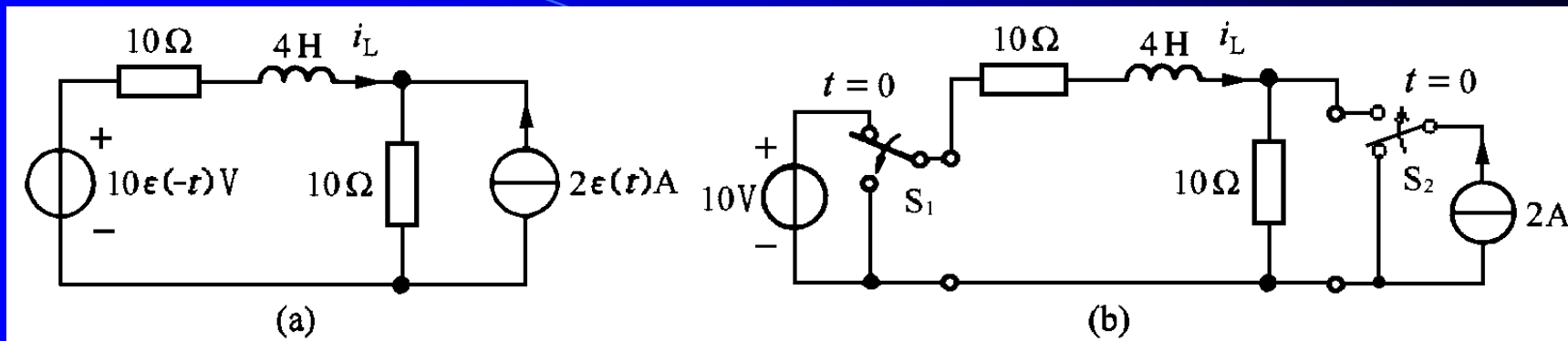


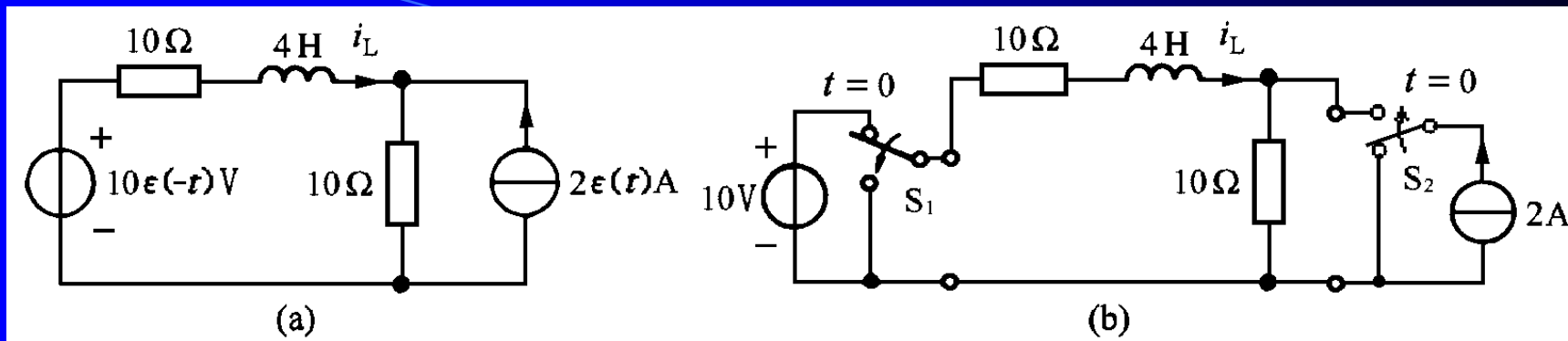
图 6-32

1. 计算电感电流的初始值 $i_L(0_+)$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{10\text{V}}{(10 + 10)\Omega} = 0.5\text{A}$$

2. 计算电感电流的稳态值 $i_L(\infty)$

$$i_L(\infty) = \frac{-10}{10 + 10} \times 2\text{A} = -1\text{A}$$



3. 计算电路的时间常数 τ

$$\tau = \frac{L}{R_o} = \frac{0.1H}{(10 + 10)\Omega} = 0.005s = 5ms$$

4. 根据三要素公式写出电感电流的表达式

$$\begin{aligned} i_L(t) &= [0.5 - (-1)]e^{-200t} A - 1A \\ &= (1.5e^{-200t} - 1)A \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

此题说明如何用三要素法来计算含有阶跃电压源和阶跃电流源的电路。

阶跃函数还可以用来表示时间上分段恒定的电压或电流信号，例如图8-33(a)所示方波电压信号，可以用图(b)所示两个阶跃电压源串联来表示；图(c)所示方波电流信号，可以用图(d)所示两个阶跃电流源并联来表示。对于线性电路来说，这种表示方法的好处在于可以应用叠加定理来计算电路的零状态响应，在此基础上，采用积分的方法还可以求出电路在任意波形激励时的零状态响应

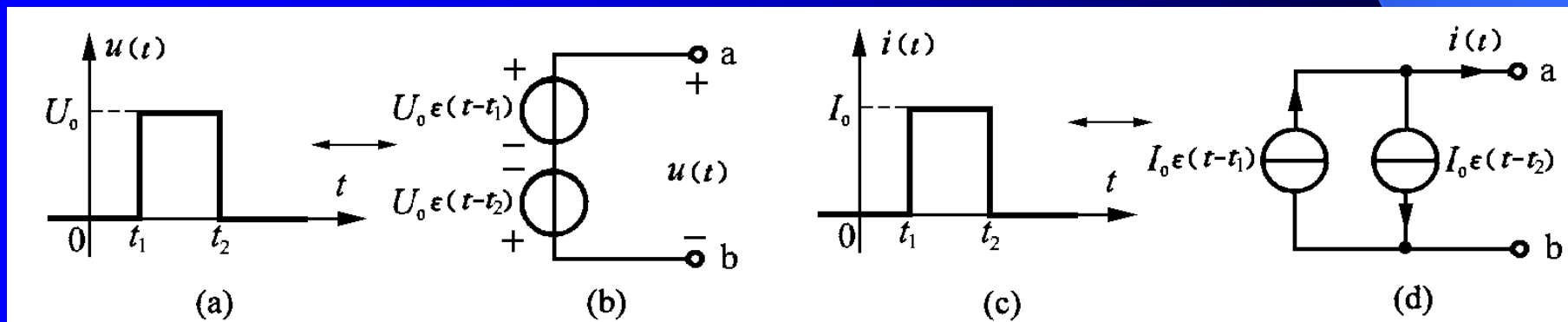


图8-33

例8-15 用阶跃电流源表示图8-33(b)所示的方波电流，再次求解电路中电感电流的响应，并画出波形曲线。

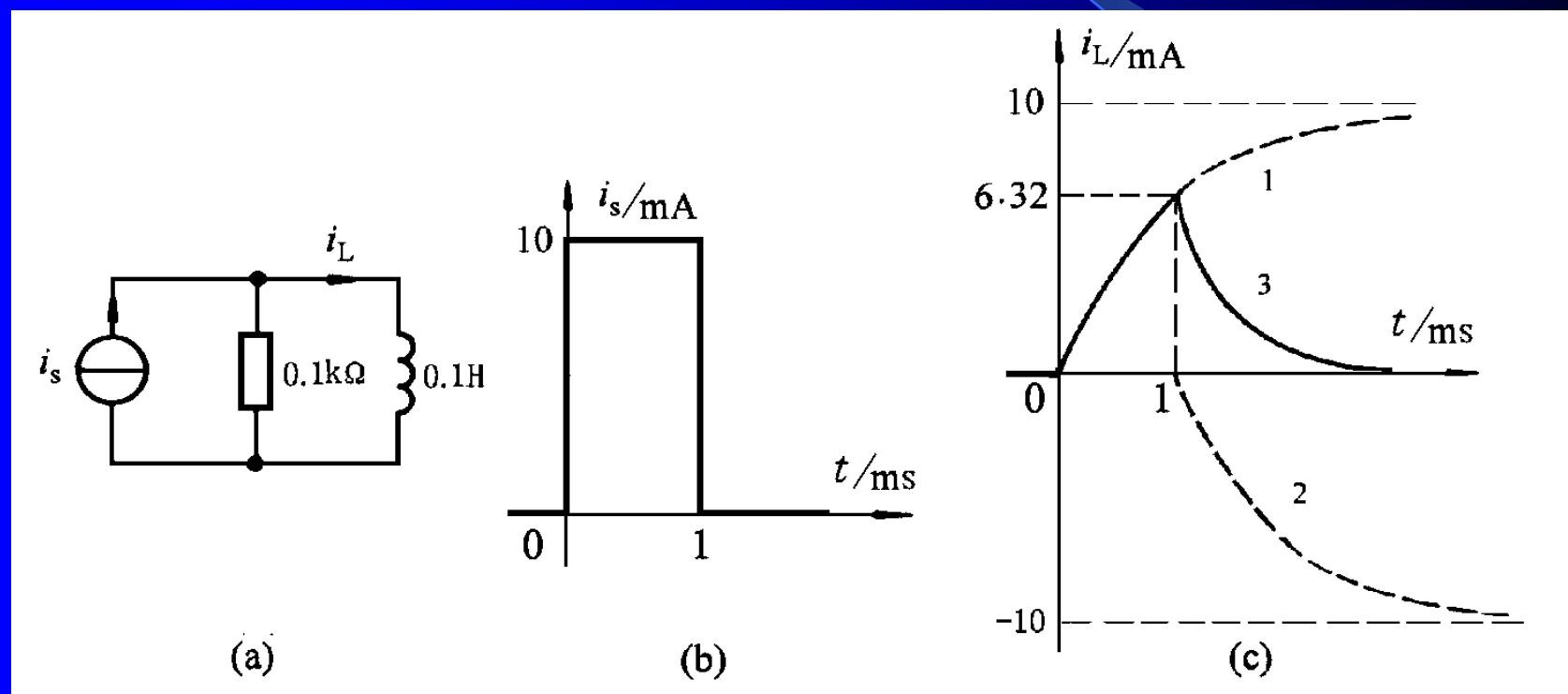


图8-33

解：图(b)所示的方波电流，可以用两个阶跃函数

$$i_S(t)=[10\varepsilon(t)-10\varepsilon(t-1\text{ms})]\text{mA} \text{ 表示。}$$

由于该电路是线性电路，根据动态电路的叠加定理，其零状态响应等于 $10\varepsilon(t)$ 和 $-10\varepsilon(t-1\text{ms})$ 两个阶跃电源单独作用引起零状态响应之和。

1. 阶跃电流源 $10\varepsilon(t)\text{mA}$ 单独作用时，其响应为

$$i_L'(t) = 10(1 - e^{-1000t})\varepsilon(t) \text{ mA}$$

2. 阶跃电流源 $-10\varepsilon(t-1\text{ms})\text{mA}$ 单独作用时，其响应为

$$i_L''(t) = -10[1 - e^{-1000(t-1\text{ms})}]\varepsilon(t-1\text{ms}) \text{ mA}$$

3. 应用叠加定理求得 $10\varepsilon(t)$ 和 $-10\varepsilon(t-1\text{ms})$ 共同作用的零状态响应为

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_L'(t) + i_L''(t) \\ &= \{10(1 - e^{-1000t})\varepsilon(t) - 10[1 - e^{-1000(t-1\text{ms})}]\varepsilon(t-1\text{ms})\} \text{ mA} \end{aligned}$$

分别画出 $i_L'(t)$ 和 $i_L''(t)$ 的波形，如曲线1和2所示。然后它们相加得到 $i_L(t)$ 波形曲线，如曲线3所示。

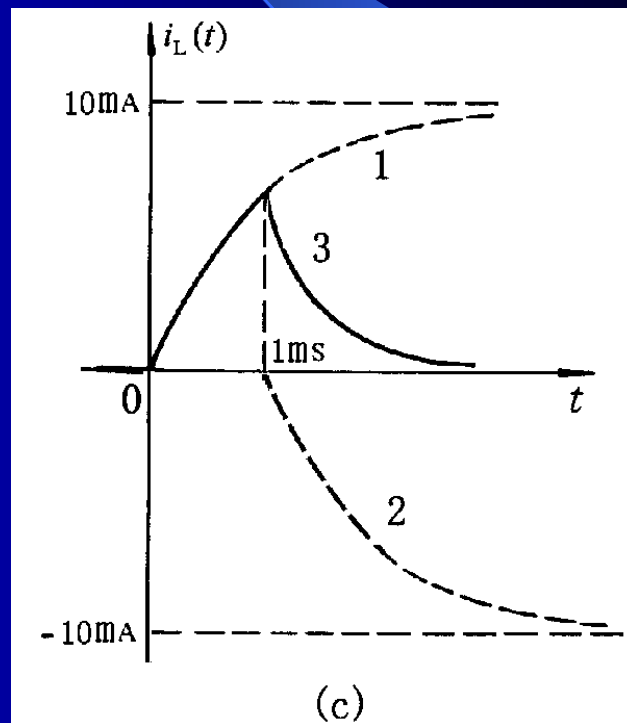


图8-34

二、阶跃响应

单位阶跃信号作用下电路的零状态响应，称为电路的阶跃响应，用符号 $s(t)$ 表示。

它可以利用三要素法计算出来。对于图(a)所示 RC 串联电路，其初始值 $u_C(0_+)=0$ ，稳态值 $u_C(\infty)=1$ ，时间常数为 $\tau=RC$ 。用三要素公式得到电容电压 $u_C(t)$ 的阶跃响应如下所示。对于图(b)所示 RL 并联电路，其初始值 $i_L(0_+)=0$ ，稳态值 $i_L(\infty)=1$ ，时间常数为 $\tau=L/R$ 。

利用三要素公式得到电感电流 $i_L(t)$ 的阶跃响应如下所示。

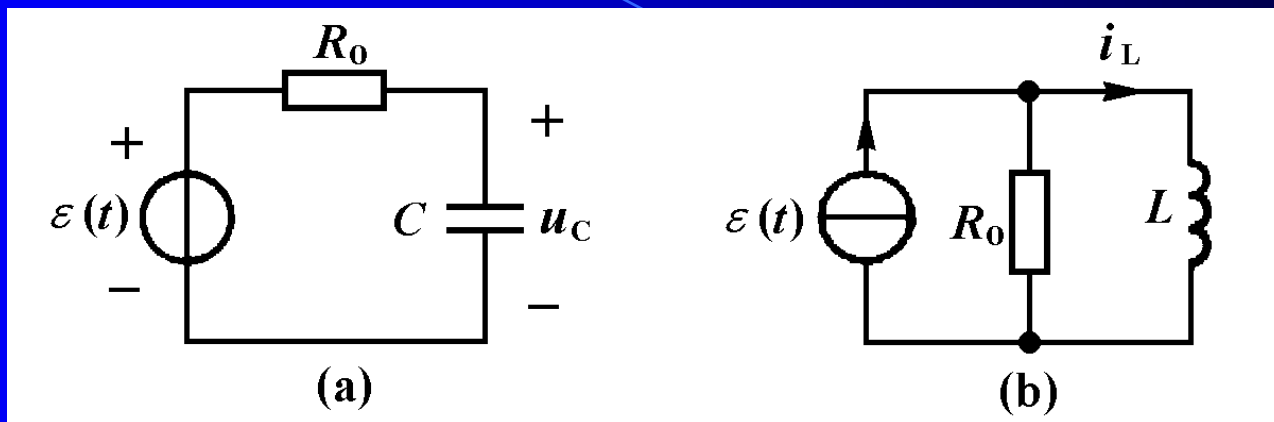


图8-35

$$s(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \varepsilon(t)$$

$$s(t) = (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \varepsilon(t)$$

以上两个式子可以用一个表达式表示如下：

$$s(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \varepsilon(t) \quad (8-27)$$

其中时间常数 $\tau=RC$ 或 $\tau=L/R$ 。

已知电路的阶跃响应，利用叠加定理容易求得在任意分段恒定信号激励下线性时不变电路的零状态响应，例如图8-36(b)所示信号作用图8-36(a)所示RC串联电路时，由于图(b)所示信号可以分解为下面所示的若干个延迟的阶跃信号的叠加。

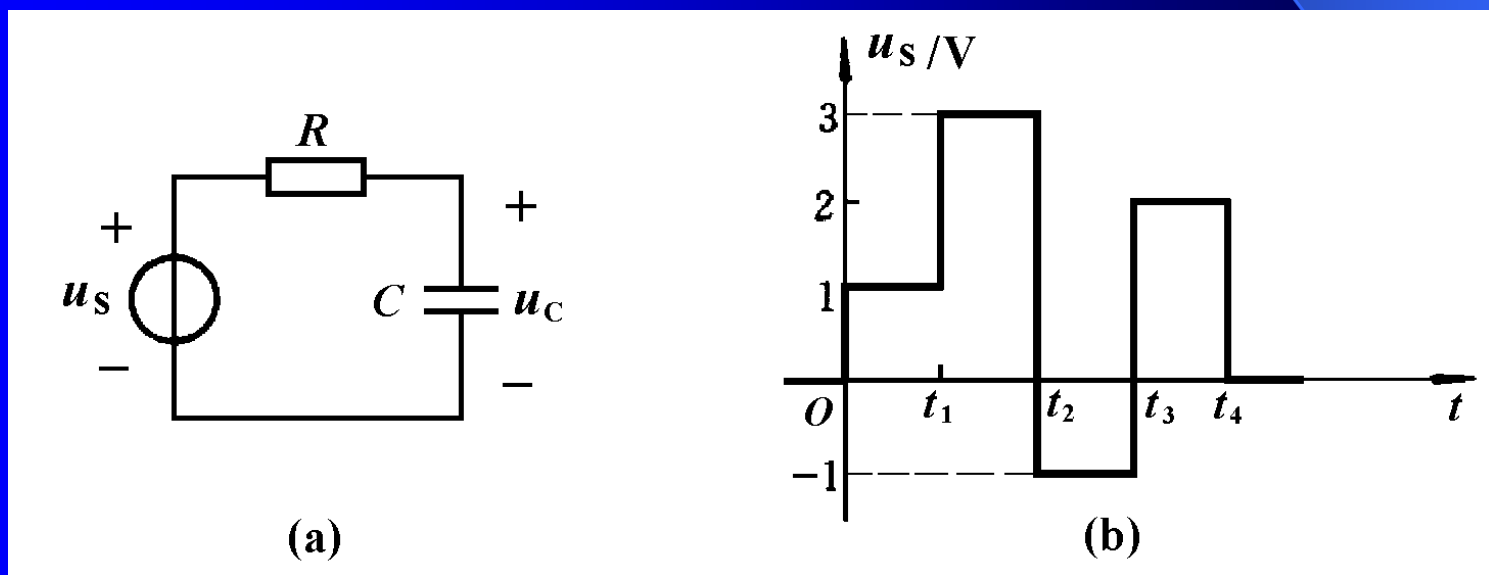


图8-36

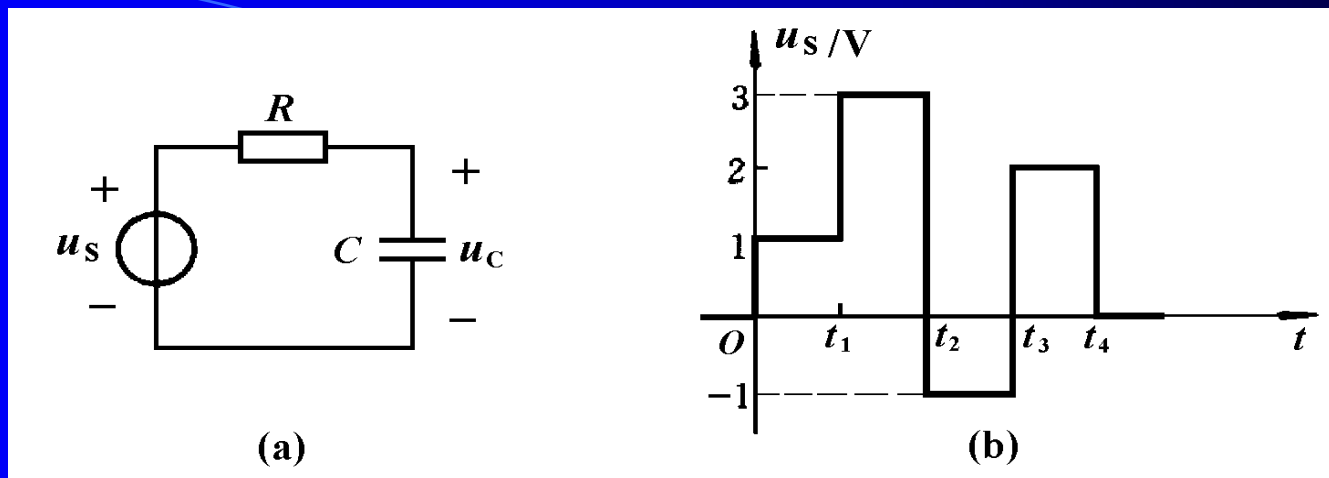


图8-36 RC串联电路在分段恒定信号激励下的零状态响应

$$u_s(t) = \varepsilon(t) + 2\varepsilon(t - t_1) - 4\varepsilon(t - t_2) + 3\varepsilon(t - t_3) - 2\varepsilon(t - t_4)$$

其电容电压 $u_c(t)$ 的零状态响应可以表示为

$$u_c(t) = s(t) + 2s(t - t_1) - 4s(t - t_2) + 3s(t - t_3) - 2s(t - t_4)$$

其中 $s(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$

$$s(t - t_1) = (1 - e^{-\frac{t-t_1}{RC}})\varepsilon(t - t_1)$$

$$s(t - t_2) = (1 - e^{-\frac{t-t_2}{RC}})\varepsilon(t - t_2)$$

$$s(t - t_3) = (1 - e^{-\frac{t-t_3}{RC}})\varepsilon(t - t_3)$$

$$s(t - t_4) = (1 - e^{-\frac{t-t_4}{RC}})\varepsilon(t - t_4)$$

例8-16 图8-37(a)是RC分压器的电路模型，试求输出电压 $u_{C_2}(t)$ 的阶跃响应。

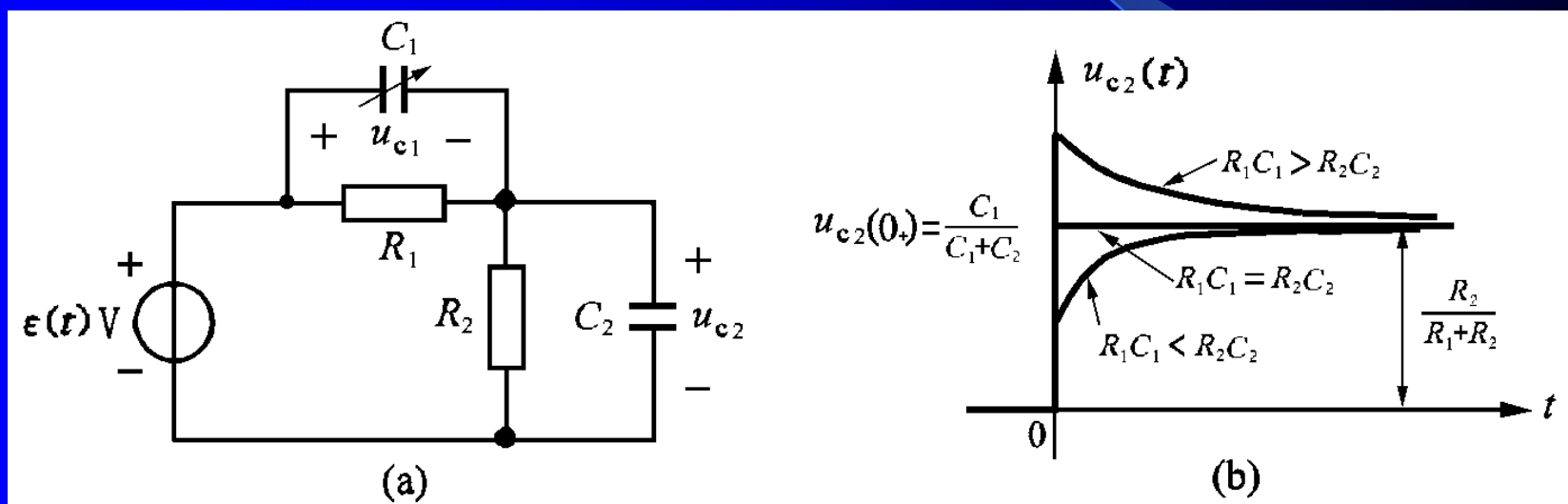


图8-37 RC分压器的电路模型

解：由于将图(a)所示电路中的电压源用短路代替后，电容 C_1 和 C_2 并联等效于一个电容，说明该电路是一阶电路，其时间常数为

$$\tau = R_o C_o = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (C_1 + C_2)$$

现在计算初始值 $u_{C_2}(0_+)$ 。在 $t < 0$ 时， $\varepsilon(t) = 0$ ，电路处于零状态， $u_{C_1}(0_-) = u_{C_2}(0_-) = 0$ 。在 $t = 0_+$ 时刻，两个电容电压应该满足以下KVL方程

$$u_{C_1}(0_+) + u_{C_2}(0_+) = 1V$$

上式说明电容电压的初始值要发生跃变。为了计算出 $u_{C2}(0_+)$ ，需要应用电荷守恒定律，即在跃变的瞬间一个结点的各电容总电荷量保持恒定(此例中总电荷为零)，由此得到以下方程

$$-C_1 u_{C1}(0_+) + C_2 u_{C2}(0_+) = 0$$

由以上两个方程求解方程得到

$$u_{C2}(0_+) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \times 1V$$

在 $t>0$ 时，该电路是由1V电压源激励的一阶电路，可以用三要素法计算。当 $t\rightarrow\infty$ 电路达到直流稳态时，电容相当开路，输出电压的稳态值为

$$u_{C2}(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times 1V$$

用三要素公式得到输出电压的表达式为

$$u_{C2}(t) = \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} + \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \varepsilon(t) V$$

由上可见，输出电压的稳态分量由两个电阻的比值确定，其暂态分量还与两个电容的比值有关。我们改变电容 C_1 可以得到三种情况：

当 $R_1C_1=R_2C_2$ 时，暂态分量为零，输出电压马上达到稳态值，这种情况称为完全补偿；

当 $R_1C_1<R_2C_2$ 或 $R_1C_1>R_2C_2$ 时，暂态分量不为零，输出电压要经过一段时间才达到稳态值，前者称为欠补偿，后者称为过补偿。

* § 8-6 冲激函数和冲激响应

一、冲激函数

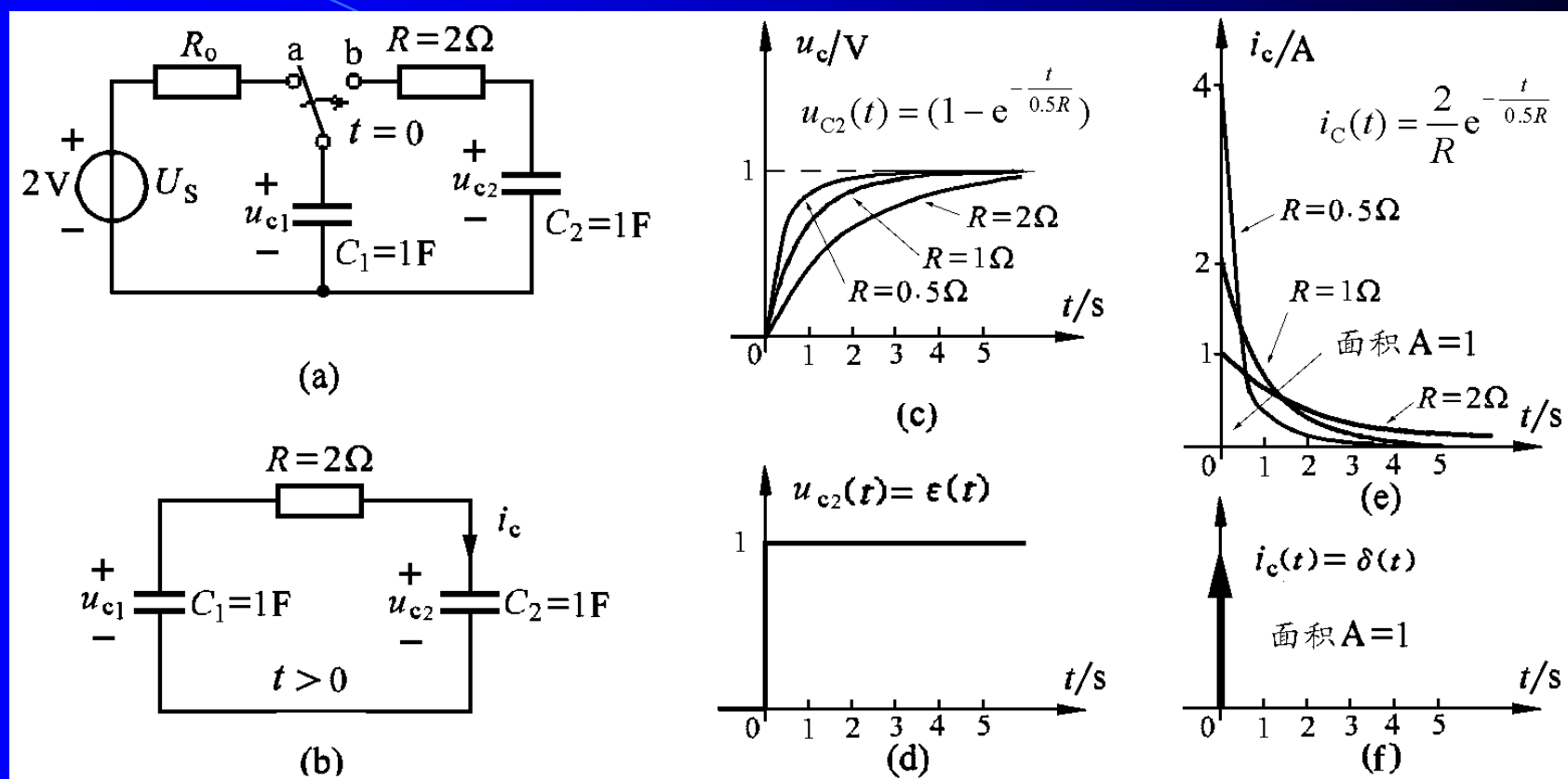
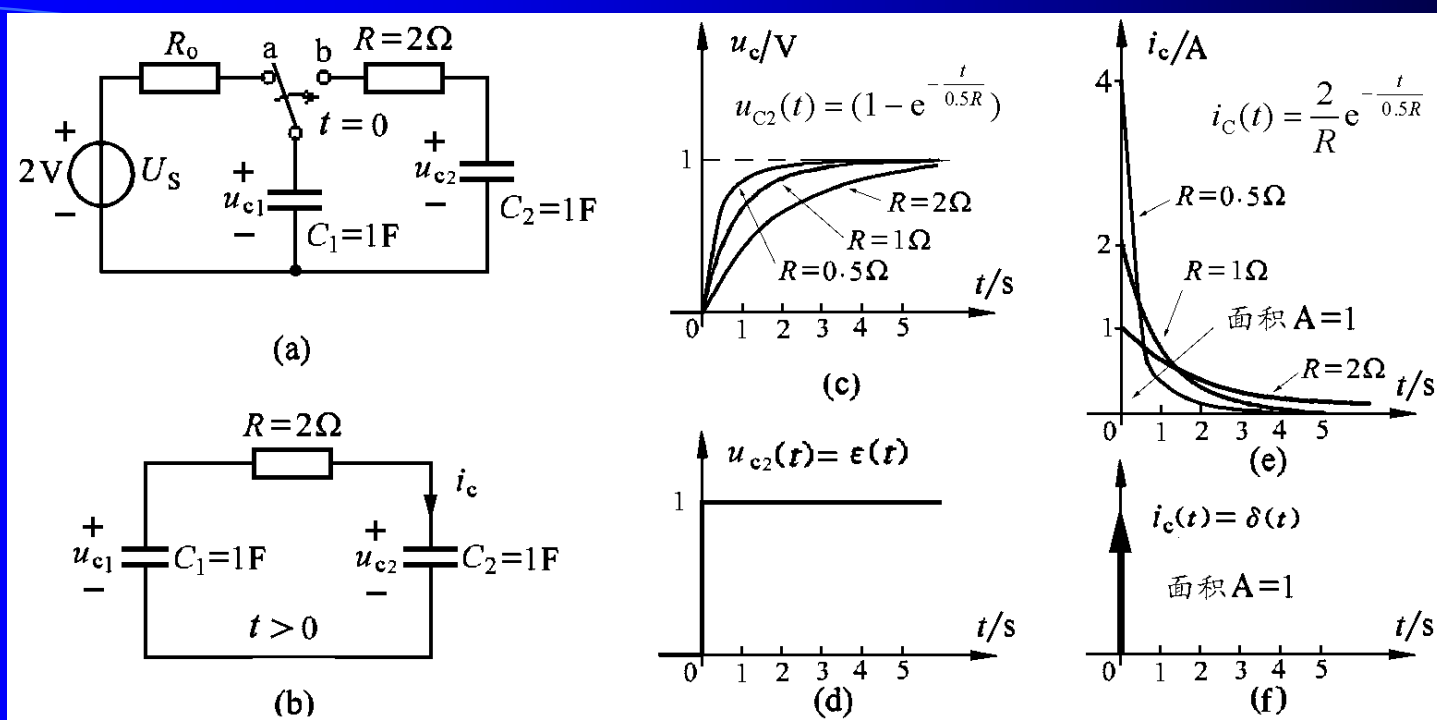
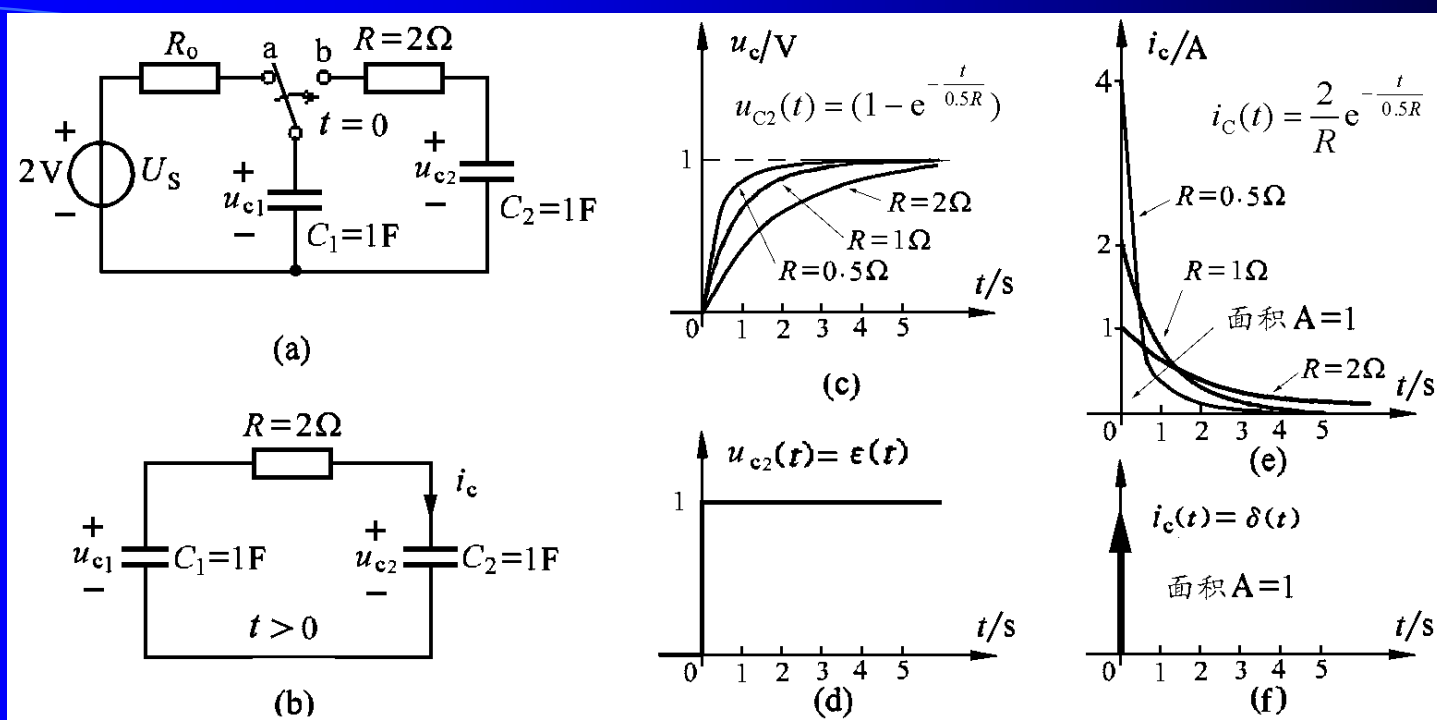


图8-38



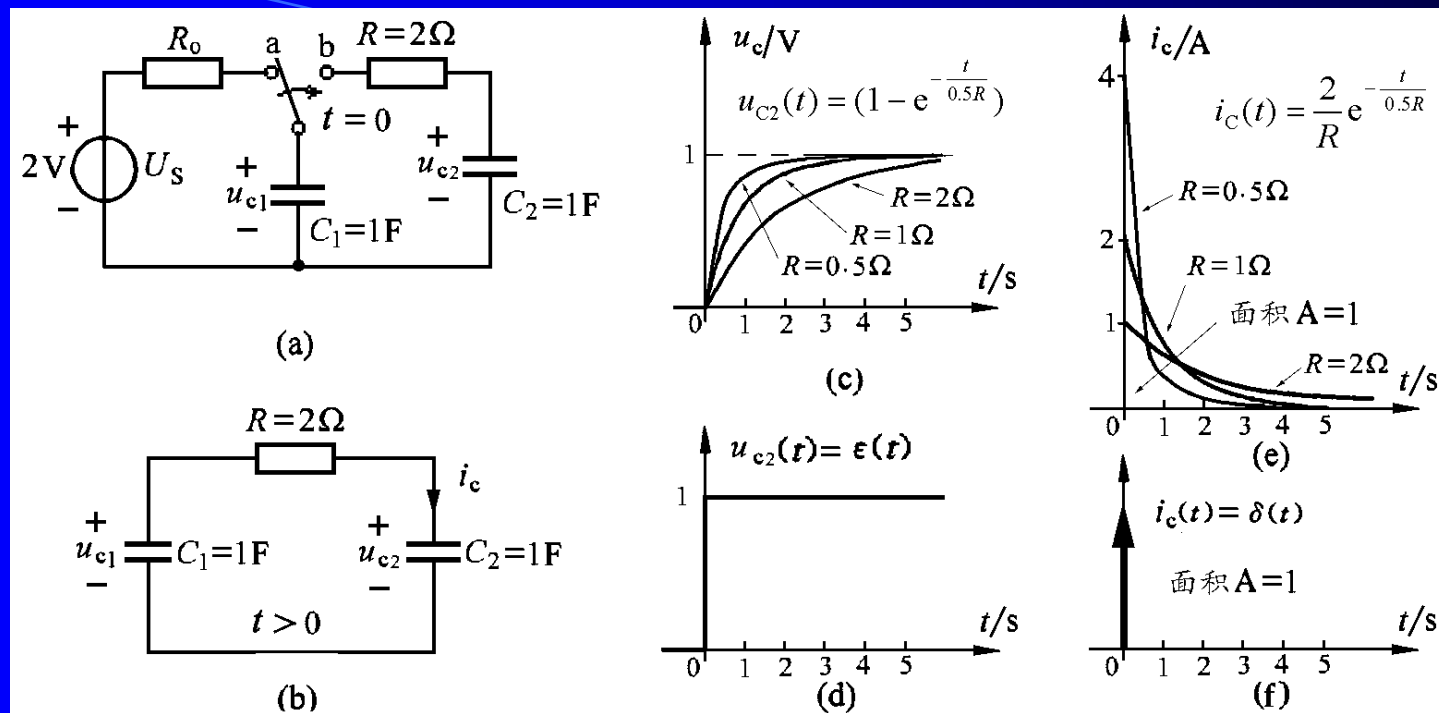
在介绍冲激函数之前，先看图8-38(a)所示电路，开关原来倒向a点，由2V电压源对电容 C_1 充电，使其电压达到2V，电容上有2库仑电荷。开关在 $t=0$ 时刻倒向b点后，将有1库仑电荷从电容 C_1 上移动到电容 C_2 上，使电容上的电压逐渐达到 $u_{C_1}(\infty) = u_{C_2}(\infty) = 1\text{V}$ 。

当电阻 R 为不同数值时，电容上的电压 $u_{C_2}(t)$ 以及电荷移动所形成的电容电流 $i_c(t)$ ，如图(c)和(e)所示。



由图8-38可见，当电路中的电阻分别为 $R=2\Omega$ 、 1Ω 、 0.5Ω 时， $u_{C2}(t)$ 和 $i_C(t)$ 的波形如图所示。注意到电容 C_1 上移动到电容 C_2 上的电荷量，即电容电流对时间的积分(电容电流对时间轴之间的面积)均为1个单位，即

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} i_C(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{R} e^{-\frac{0.2R}{t}} dt = 0.2 \times 5 = 1\text{C}$$



当图(b)电路中电阻 R 趋于零时，电容电压 $u_{C2}(t)$ 波形趋于一个单位阶跃，如图(d)所示。而电容电流 $i_C(t)$ 的波形将变为初始值 $i_C(0_+)$ 趋于无限大，时间常数无限小(波形的宽度趋于零)，而面积(电荷量)为一个单位的脉冲，这个极限的波形称为单位冲激电流，用 $\delta(t)$ 表示。

当且仅当其满足以下两个性质时，一个无界的信号 $\delta(t)$ 称为单位冲激函数

$$\begin{cases} \delta(t) = \begin{cases} \text{奇异值} & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \\ \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \delta(t) dt = 1 & \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0 \end{cases} \quad (8-28)$$

当图8-38(a)电路中电压源的电压增大时，从电容 C_1 上移动到电容 C_2 的电荷量以及相应的电流脉冲的面积也将增加，此时图(f)得到的冲激电流为 $A\delta(t)$ 。

例如电压源电压 $U_S=20V$ ，开关在 $t=5s$ 时刻由 a 点倒向 b 点，则冲激电流发生在 $t=5s$ 时刻，根据式 8-28，所产生的冲激电流应该表示为

$$i_S(t) = 10 \delta(t - 5) A$$

这个冲激电流使电容 C_2 在 $t=5s$ 时刻，迅速获得 10 库仑的电荷，使 1F 电容 C_2 的电压发生 10V 的跃变，由 $u_{C_2}(5_-)=0V$ 跃变到 $u_{C_2}(5_+)=10V$ 。

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{5} \int_{-\infty}^t i_S(t) dt = 2\varepsilon(t - 5) V$$

这是一个延迟的阶跃，如图(c)所示。由于冲激电流在 $t=5\text{s}$ 时刻，将10库仑电荷迅速投到5F电容的极板上，使电容电压发生2V的跃变，由 $u_C(5_-)=0\text{V}$ 跃变到 $u_C(5_+)=2\text{V}$ 。

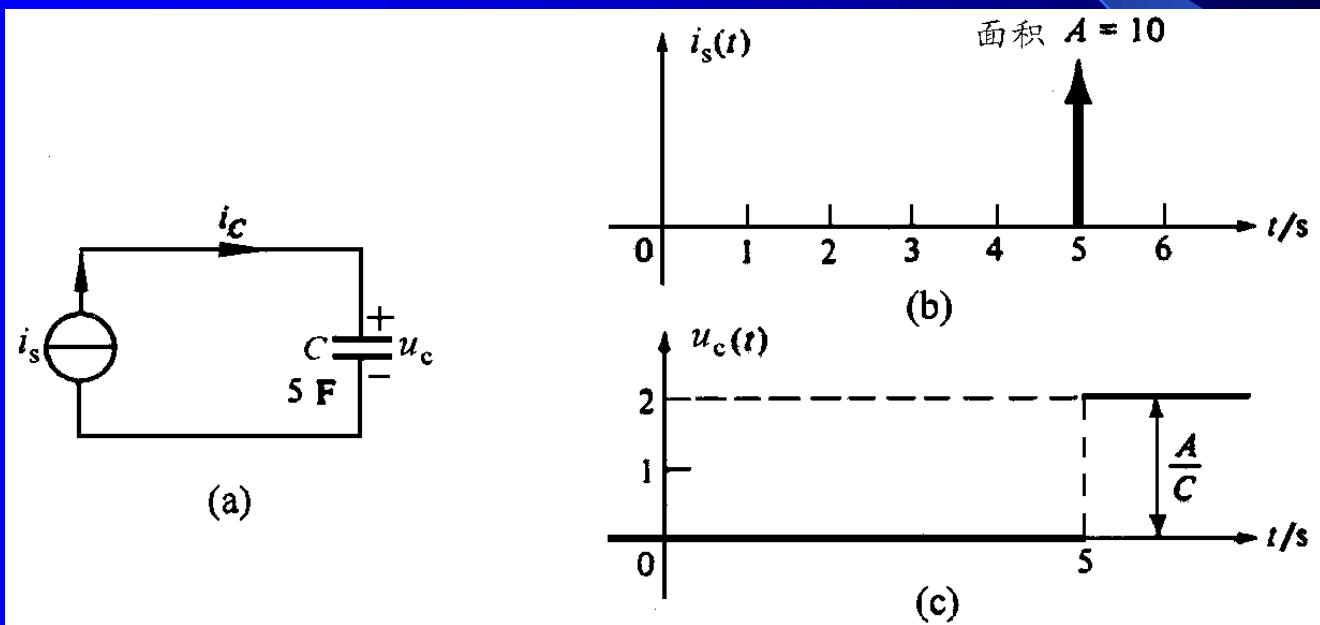


图8-39 冲激电流通过电容引起电容电压发生阶跃

从以上叙述可以看出单位阶跃函数与单位冲激函数之
存在以下关系

$$\delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (8-29)$$

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\xi) d\xi \quad (8-30)$$

二、冲激响应

单位冲激信号作用下电路的零状态响应，称为电路的冲激响应，用符号 $h(t)$ 表示。计算任何线性时不变电路冲激响应的一个方法是先求出电路的阶跃响应 $s(t)$ ，再将它对时间求导即可得到冲激响应，即利用下式由电路的阶跃响应计算出电路的冲激响应

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} \quad (8-31)$$

例如图8-35(a)所示RC串联电路的单位阶跃响应为

$$s(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \varepsilon(t)$$

其冲激响应为

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{ds(t)}{dt} \\ &= \frac{d[(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \varepsilon(t)]}{dt} \\ &= (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \delta(t) + \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) \end{aligned}$$

由于 $t=0$ 时，

$$(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = 0$$

而 $t \neq 0$ 时， $\delta(t)=0$ ，因此得到，

$$(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\delta(t) = 0$$

最后得到图8-40所示RC串联电路电容电压的冲激响应。

与此相似，可以得到图8-41所示RL并联电路中电感电流的冲激响应。

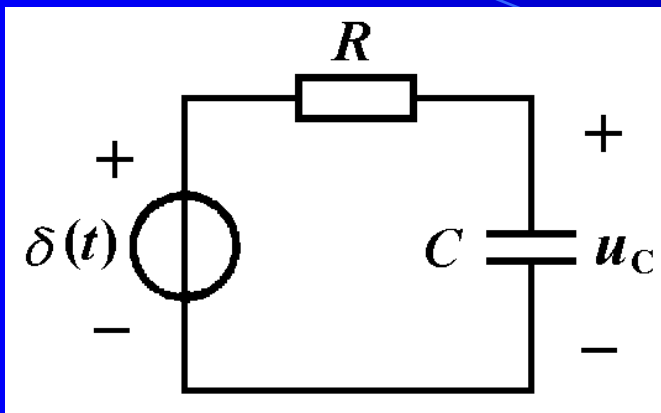


图8-40

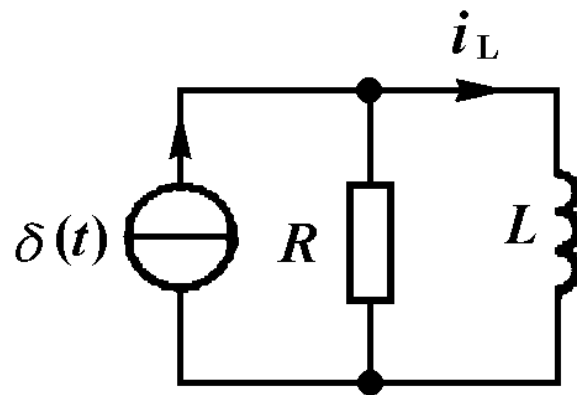


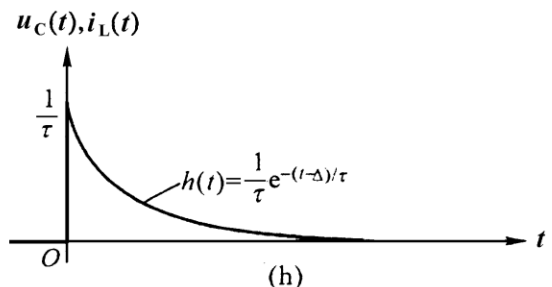
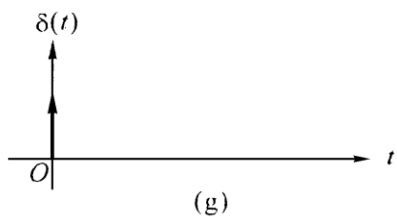
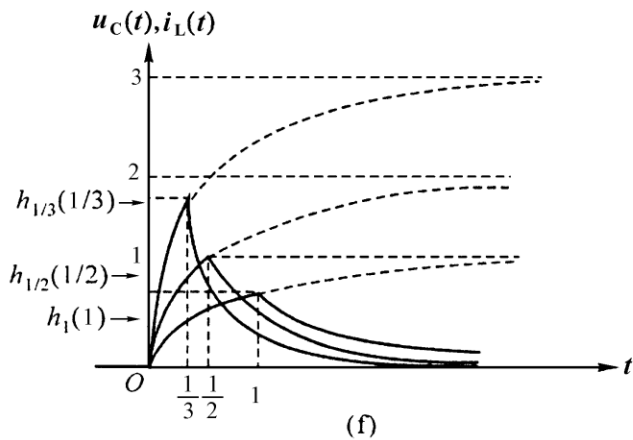
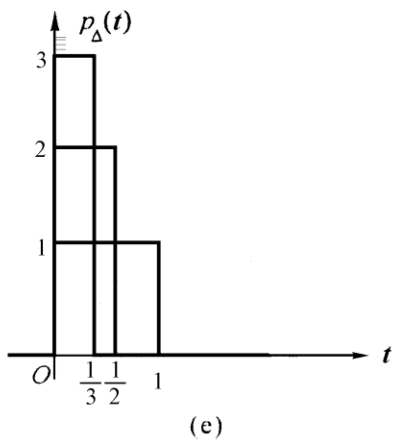
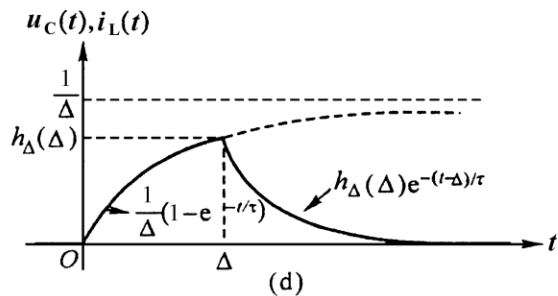
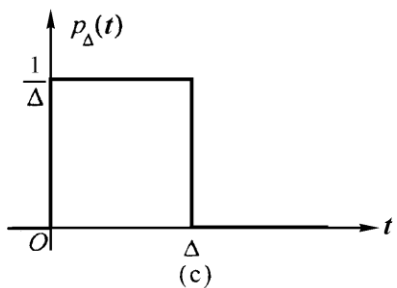
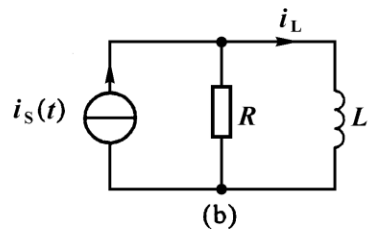
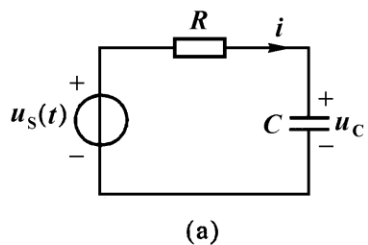
图8-41

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$

$$h(t) = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t)$$

以上两种情况的冲激响应可以用一个表达式表示如下：

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau}t} \varepsilon(t) \quad (8-32)$$



计算冲激响应的另一种方法是先求出面积为1个单位的矩形脉冲的响应，然后求脉冲宽度趋于零的极限。

$$h_{\Delta}(\Delta) = \frac{1 - e^{-\frac{\Delta}{\tau}}}{\Delta} = \frac{f(\Delta)}{g(\Delta)} \quad (8-33)$$

当 $\Delta \rightarrow 0$ 时， $P_{\Delta}(t)$ 趋向于单位冲激，如图(g)所示，即

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} P_{\Delta}(t) = \delta(t) \quad (8-34)$$

注意到响应波形的峰值 $h_{\Delta}(\Delta)$ 将随 Δ 减小而增加，我们用罗比塔法则求 $h_{\Delta}(\Delta)$ 在 $\Delta \rightarrow 0$ 时的极限

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} h_{\Delta}(\Delta) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f'(\Delta)}{g'(\Delta)} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(1/\tau)e^{-\frac{\Delta}{\tau}}}{1} = \frac{1}{\tau} \quad (8-35)$$

因此，图8-42(f)的波形趋于指数波形

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (8-36)$$

如图(h)所示。利用单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ ，我们可以将式(8-36)写为下式

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \varepsilon(t) \quad (8-37)$$

从以上讨论中可以看出，冲激电压或电流的作用就是给动态元件提供一个初始储能(例如 $u_C(0_+) = 1/C$ 或 $i_L(0_+) = 1/L$)，即产生一个初始条件(例如 $f(0_+) = 1/\tau$)。此时刻以后电路响应实际上是这些初始储能引起的零输入响应。

我们为什么要研究电路的冲激响应呢？这是由于电子、通信与信息工程中使用的电信号十分复杂，我们需要知道电路对任意输入信号的反映。而电路的冲激响应不仅能反映出电路的特性，而且在知道线性时不变电路的冲激响应后，可以通过一个积分运算求出电路在任意输入波形时的零状态响应，从而求出电路的全响应。

例如对于图8-43(a)所示线性时不变RC一阶电路，初始条件为零，即 $u_C(0)=0$ 时，在任意波形 $u_S(t)$ 激励下，电容电压 $u_C(t)$ 的零状态响应可以通过以下积分求得

$$u_C'(t) = \int_0^t \frac{1}{\tau} e^{-\frac{(t-\xi)}{\tau}} u_S(\xi) d\xi \quad (8-38)$$

考虑到电容电压 $u_C(t)$ 的零输入响应

$$u_C''(t) = u_C(0) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8-39)$$

根据线性电路的叠加定理可以求得电容电压 $u_C(t)$ 的全响应为

$$u_C(t) = u_C''(t) + u_C'(t) = u_C(0) e^{-\frac{t}{\tau}} + \int_0^t \frac{1}{\tau} e^{-\frac{(t-\xi)}{\tau}} u_S(\xi) d\xi \quad (8-40)$$

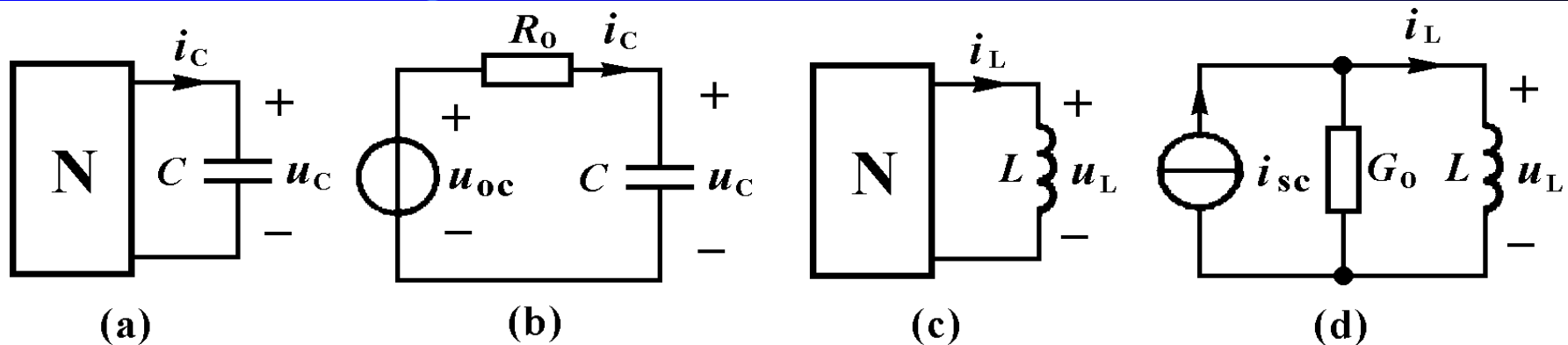


图8-43 (a),(b) 含一个电容的一阶电路 (c),(d) 含一个电感的一阶电路

与此相似， RL 并联一阶电路在任意波形电流源 $u_S(t)$ 作用下，其电感电流的全响应为

$$i_L(t) = i_L(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + \int_0^t \frac{1}{\tau} e^{-\frac{-(t-\xi)}{\tau}} i_S(\xi) d\xi \quad (8-41)$$

其中第一项是电感电流 $i_L(t)$ 的零输入响应，第二项是电感电流 $i_L(t)$ 的零状态响应，时间常数是 $\tau = G_0 L = L/R_0$ 。

例8-17 电路如图8-44(a)所示，试求电感电流和电感电压的阶跃响应和冲激响应。

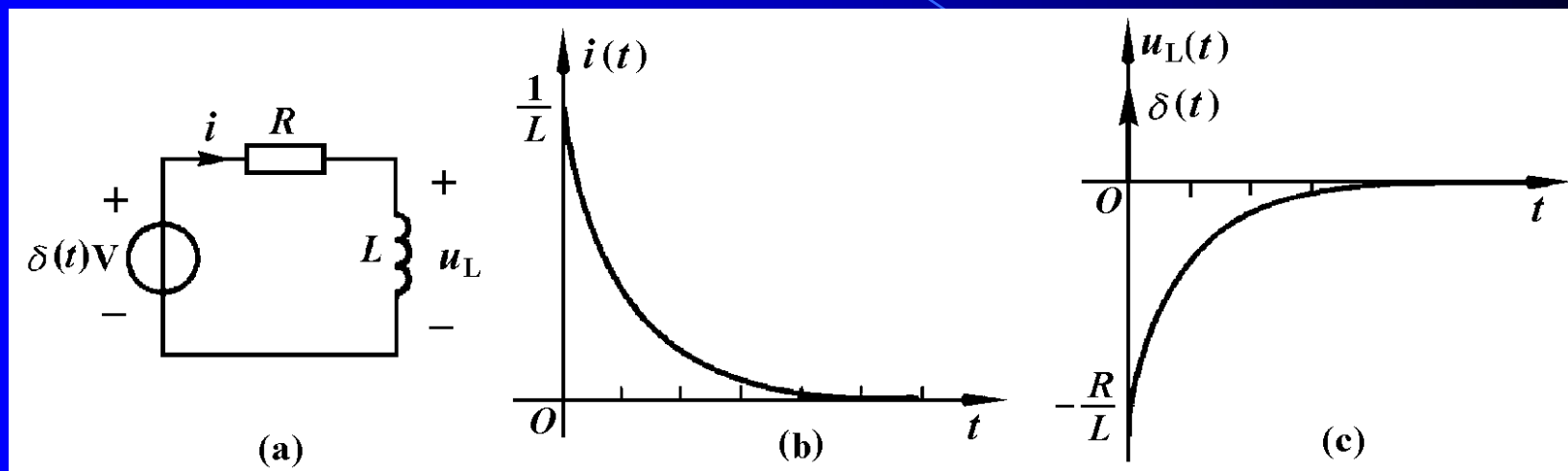


图8-44

解：用三要素法先求出电感电流 $i_L(t)$ 的阶跃响应

$$s(t) = \frac{1}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \varepsilon(t)$$

电感电流阶跃响应对时间求导得到 $i_L(t)$ 的冲激响应

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{1}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \delta(t) + \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t)$$

利用电感电压电流关系可以求出电感电压 $u_L(t)$ 的冲激响应

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = e^{-\frac{R}{L}t} \delta(t) - \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t)$$

令含有冲激函数 $\delta(t)$ 的第一项中的 $t=0$ ，得到电感电压 $u_L(t)$ 的冲激响应为

$$h(t) = \delta(t) - \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t)$$

电感电压的冲激响应也可以用三要素法先求出电感电压 $u_L(t)$ 的阶跃响应

$$s(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t)$$

然后再对时间求导得到电感电压 $u_L(t)$ 的冲激响应

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{ds(t)}{dt} \\ &= e^{-\frac{R}{L}t} \delta(t) - \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t) \\ &= \delta(t) - \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t) \end{aligned}$$

§ 8-7 计算机辅助电路分析举例

前面讨论了求解直流一阶电路的三要素法。由于只要求解几个直流电阻电路，就能分别计算出响应的初始值，稳态值和时间常数。我们可以利用直流电路分析程序DCAP，采用分别计算三要素的方法来得到仅含一个电容或一个电感的直流激励一阶电路的响应。现在举例加以说明。

例8-18 图8-45所示电路原来已经稳定， $t=0$ 时闭合开关 S_1 ，断开开关 S_2 ，求各电压电流的响应。

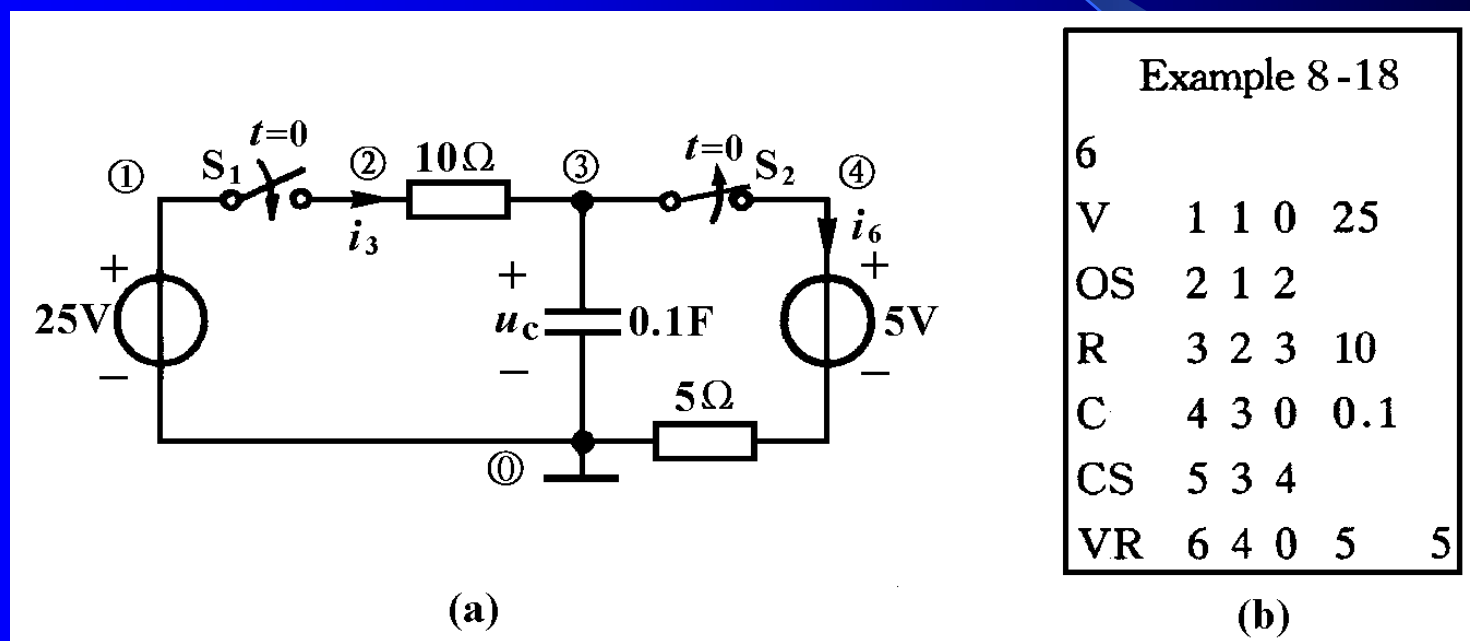
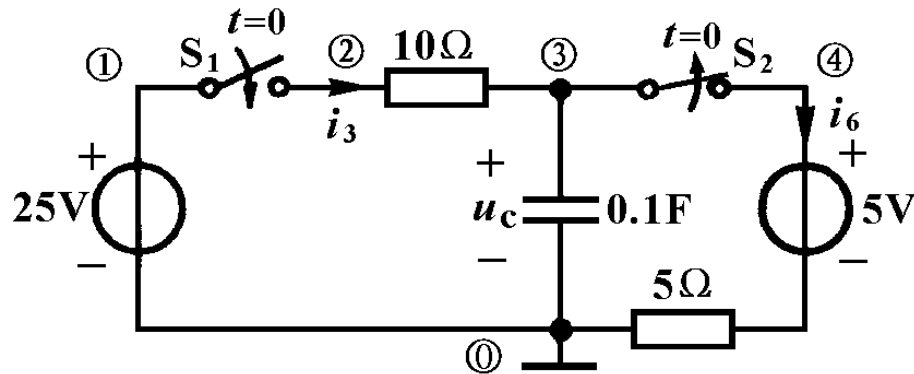


图8-45 用三要素法求直流一阶电路的响应



(a)

Example 8-18

| | | | | | |
|----|---|---|---|-----|---|
| 6 | | | | | |
| V | 1 | 1 | 0 | 25 | |
| OS | 2 | 1 | 2 | | |
| R | 3 | 2 | 3 | 10 | |
| C | 4 | 3 | 0 | 0.1 | |
| CS | 5 | 3 | 4 | | |
| VR | 6 | 4 | 0 | 5 | 5 |

(b)

解：用DCAP程序分析图(a)电路的数据文件如图(b)所示。

其中OS表示原来断开的开关 S_1 ，在 $t=0$ 时闭合；CS表示原来闭合的开关 S_2 ，在 $t=0$ 时断开。运行DCAP程序，读入上述电路数据后，选用直流一阶电路的菜单，屏幕上显示出各电压，电流的初始值 $f(0_-)$ ， $f(0_+)$ 和重新达到稳定状态后的稳态值 $f(\infty)$ 。如下所示：

----- 求 初始值 $f(0^-)$, $f(0^+)$ 和 稳态值 $f(\infty)$ -----

| | $f(0^-)$ | $f(0^+)$ | $f(\infty)$ | $f(0^-)$ | $f(0^+)$ | $f(\infty)$ | |
|---------|----------|----------|-------------|----------|----------|-------------|------|
| $u_1 =$ | 25.0 | 25.0 | 25.0 | $i_1 =$ | .000 | -2.00 | .000 |
| $u_2 =$ | 20.0 | .000 | .000 | $i_2 =$ | .000 | 2.00 | .000 |
| $u_3 =$ | .000 | 20.0 | .000 | $i_3 =$ | .000 | 2.00 | .000 |
| $u_4 =$ | 5.00 | 5.00 | 25.0 | $i_4 =$ | .000 | 2.00 | .000 |
| $u_5 =$ | .000 | .000 | 20.0 | $i_5 =$ | .000 | .000 | .000 |
| $u_6 =$ | 5.00 | 5.00 | 5.00 | $i_6 =$ | .000 | .000 | .000 |

然后用三要素公式的形式，显示出各电压、电流的表达式，如下所示：

----- 直流一阶电路分析 -----

本程序用三要素法计算含一个动态元件的直流一阶电路

时间常数 $\tau = C * R_0 = .100 * 10.0 = 1.00 \text{ s}$

----- $f(t) = f(\infty) + [f(0+) - f(\infty)] * \exp(-t / \tau)$ -----

V u 1 = 25.0 +.000 *exp(-1.00 t)

OS u 2 = .000 +.000 *exp(-1.00 t)

R u 3 = .000 +20.0 *exp(-1.00 t)

C u 4 = 25.0 -20.0 *exp(-1.00 t)

CS u 5 = 20.0 -20.0 *exp(-1.00 t)

VR u 6 = 5.00 +.000 *exp(-1.00 t)

V i 1 = .000 -2.00 *exp(-1.00 t)

OS i 2 = .000 +2.00 *exp(-1.00 t)

R i 3 = .000 +2.00 *exp(-1.00 t)

C i 4 = .000 +2.00 *exp(-1.00 t)

CS i 5 = .000 +.000 *exp(-1.00 t)

VR i 6 = .000 +.000 *exp(-1.00 t)

还可以图形方式在屏幕上画出任一响应的波形，这里以字符形式给出电容电压的波形图

$$C: \quad u_4(t) = 25.0 - 20.0 * \text{EXP}(-1.00 \cdot t)$$

时间 (s) $u_4(t)$ 最小值= 5.00 最大值= 24.8

| | | |
|-----------|-----------|---|
| 0.000E+00 | 5.000E+00 | * |
| 2.500E-01 | 9.424E+00 | * |
| 5.000E-01 | 1.287E+01 | * |
| 7.500E-01 | 1.555E+01 | * |
| 1.000E+00 | 1.764E+01 | * |
| 1.250E+00 | 1.927E+01 | * |
| 1.500E+00 | 2.054E+01 | * |
| 1.750E+00 | 2.152E+01 | * |
| 2.000E+00 | 2.229E+01 | * |
| 2.250E+00 | 2.289E+01 | * |
| 2.500E+00 | 2.336E+01 | * |
| 2.750E+00 | 2.372E+01 | * |
| 3.000E+00 | 2.400E+01 | * |
| 3.250E+00 | 2.422E+01 | * |
| 3.500E+00 | 2.440E+01 | * |
| 3.750E+00 | 2.453E+01 | * |
| 4.000E+00 | 2.463E+01 | * |
| 4.250E+00 | 2.471E+01 | * |
| 4.500E+00 | 2.478E+01 | * |
| 4.750E+00 | 2.483E+01 | * |
| 5.000E+00 | 2.487E+01 | * |

例8-19 图8-46所示电路原来已经稳定, $t=0$ 时闭合开关, 求各电压电流的响应。

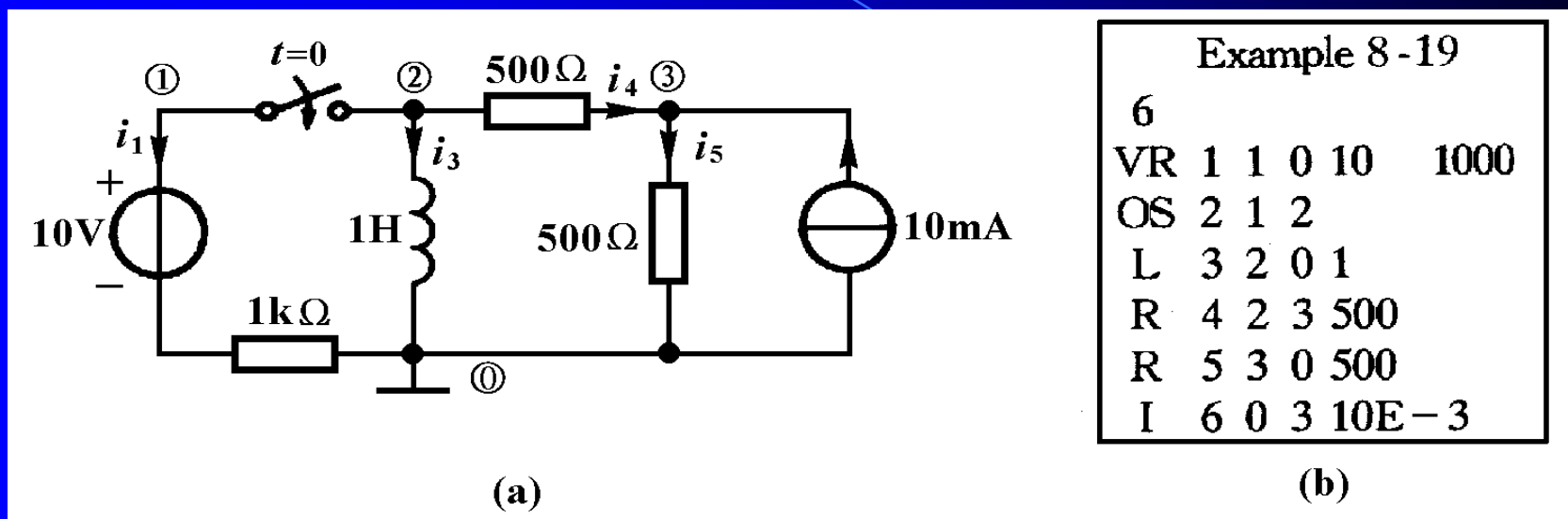


图8-46 用三要素法求直流一阶电路的响应

解: 用DCAP程序分析图(a)电路的数据文件如图(b)所示, 其中OS表示原来断开的开关 S_1 , 在 $t=0$ 时闭合。运行DCAP程序, 读入上述电路数据后, 选用直流一阶电路的菜单, 可以得到各电压, 电流响应的三要素表达式, 如下所示:

----- 直流一阶电路分析 -----

本程序用三要素法计算含一个动态元件的直流一阶电路
 时间常数 $\tau = L/R_o = 1.00 / 500. = 2.000E-03 \text{ s}$

----- $f(t) = f(\infty) + [f(0+) - f(\infty)] * \exp(-t / \tau)$ -----

| | | | | | | |
|----|-----|---|------------|------------|------------|----|
| | v 1 | = | 2.235E-07 | +5.00 | *exp(-500. | t) |
| | v 2 | = | 2.235E-07 | +5.00 | *exp(-500. | t) |
| | v 3 | = | 2.50 | +2.50 | *exp(-500. | t) |
| VR | u 1 | = | 2.235E-07 | +5.00 | *exp(-500. | t) |
| OS | u 2 | = | .000 | +.000 | *exp(-500. | t) |
| L | u 3 | = | 2.235E-07 | +5.00 | *exp(-500. | t) |
| R | u 4 | = | -2.50 | +2.50 | *exp(-500. | t) |
| R | u 5 | = | 2.50 | +2.50 | *exp(-500. | t) |
| I | u 6 | = | -2.50 | -2.50 | *exp(-500. | t) |
| VR | i 1 | = | -1.000E-02 | +5.000E-03 | *exp(-500. | t) |
| OS | i 2 | = | 1.000E-02 | -5.000E-03 | *exp(-500. | t) |
| L | i 3 | = | 1.500E-02 | -1.000E-02 | *exp(-500. | t) |
| R | i 4 | = | -5.000E-03 | +5.000E-03 | *exp(-500. | t) |
| R | i 5 | = | 5.000E-03 | +5.000E-03 | *exp(-500. | t) |
| I | i 6 | = | 1.000E-02 | +.000 | *exp(-500. | t) |

例8-20 图8-47所示含有理想运放的直流一阶电路中，已知电容电压的初始值 $u_c(0)=6V$ ，求电路中各电压电流的响应。

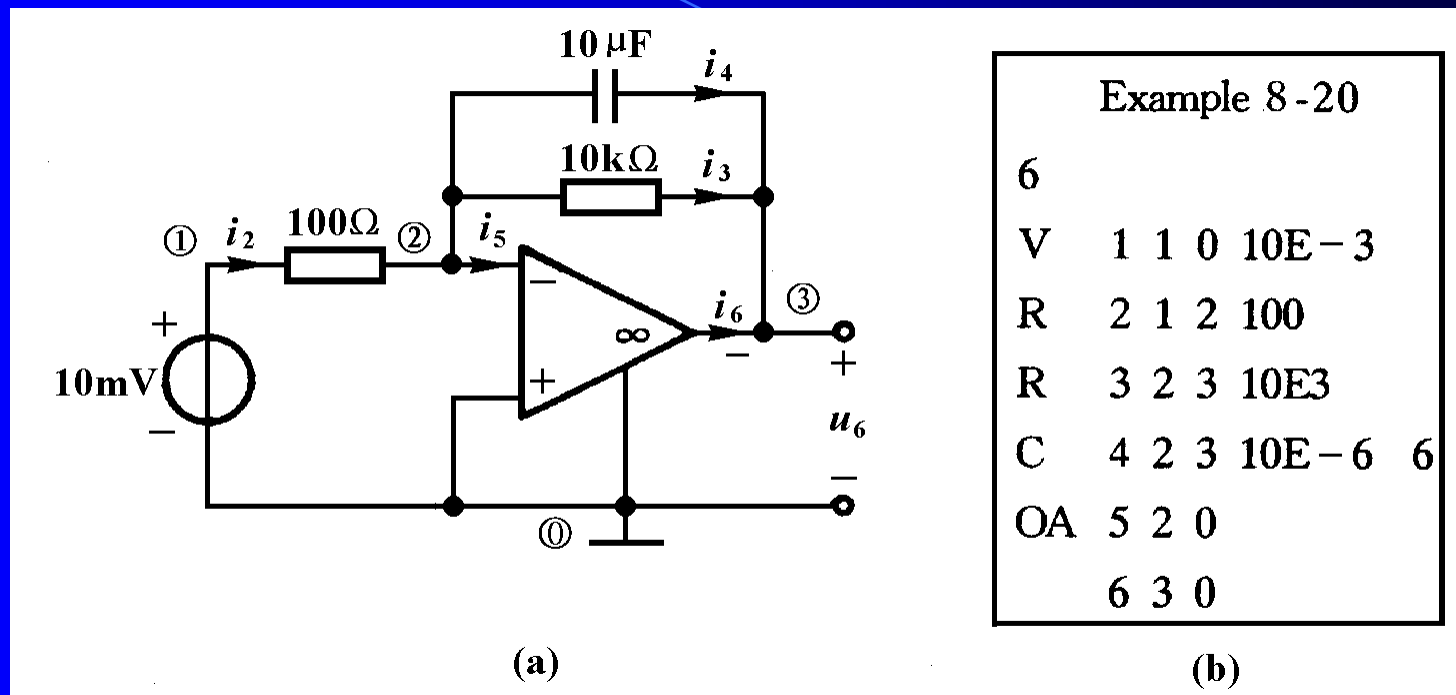


图8-47 用三要素法求直流一阶电路的响应

解：电路的数据文件如图(b)所示，电容的元件参数除了说明电容为 $10\mu F$ 外，还要说明初始电压为 $6V$ 。运行DCAP程序，读入上述电路数据后，选用直流一阶电路的菜单，可以得到各电压，电流响应的三要素表达式，如下所示：

----- 直流一阶电路分析 -----

本程序用三要素法计算含一个动态元件的直流一阶电路
时间常数 $\tau = C * R_0 = 1.000E-05 * 1.000E+04 = 1.000E-01 \text{ s}$

$$\text{-- } f(t) = f(\infty) + [f(0+) - f(\infty)] * \exp(-t / \tau) \text{ --}$$

| | | | | | | |
|----|-----|---|------------|------------|------------|----|
| | v 1 | = | 1.000E-02 | +.000 | *exp(-10.0 | t) |
| | v 2 | = | 2.910E-11 | +.000 | *exp(-10.0 | t) |
| | v 3 | = | -1.00 | -5.00 | *exp(-10.0 | t) |
| V | u 1 | = | 1.000E-02 | +.000 | *exp(-10.0 | t) |
| R | u 2 | = | 1.000E-02 | +.000 | *exp(-10.0 | t) |
| R | u 3 | = | 1.00 | +5.00 | *exp(-10.0 | t) |
| C | u 4 | = | 1.00 | +5.00 | *exp(-10.0 | t) |
| OA | u 5 | = | 2.910E-11 | +.000 | *exp(-10.0 | t) |
| | u 6 | = | -1.00 | -5.00 | *exp(-10.0 | t) |
| V | i 1 | = | -1.000E-04 | +.000 | *exp(-10.0 | t) |
| R | i 2 | = | 1.000E-04 | +.000 | *exp(-10.0 | t) |
| R | i 3 | = | 1.000E-04 | +5.000E-04 | *exp(-10.0 | t) |
| C | i 4 | = | .000 | -5.000E-04 | *exp(-10.0 | t) |
| OA | i 5 | = | .000 | +.000 | *exp(-10.0 | t) |
| | i 6 | = | 1.000E-04 | +7.276E-12 | *exp(-10.0 | t) |

例8-21 图8-48所示含有冲激电压源和阶跃电流源的电路，试求电容电压的响应。

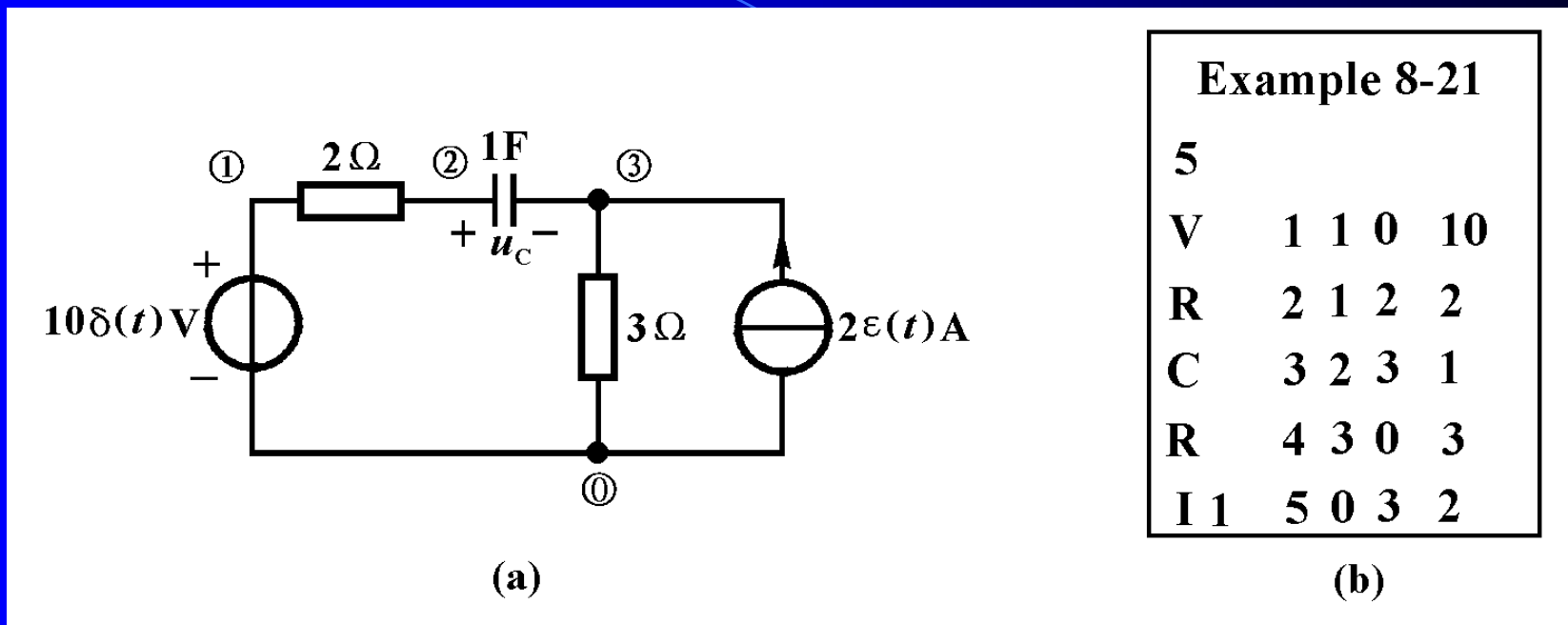


图8-48 含冲激电压源和阶跃电压源的一阶电路分析

解：动态电路分析程序DNAP可以分析含冲激电压源和阶跃电压源的 n 阶动态电路，电路的数据文件如图(b)所示，其中符号V表示冲激电压源，符号I1表示阶跃电流源。运行DNAP程序，读入上述电路数据后，选择用叠加定理的方法计算第三条支路的电容电压，可以得到以下的计算结果：

<< 冲激电源 $V_1(t) = 10.0 \delta(t)$ 单独作用 >>

$$u_3(t) = + \varepsilon(t) * (2.00 + j .000) * \exp(-.200 + j .000)t$$

<< 阶跃电源 $I_5(t) = 2.00 \varepsilon(t)$ 单独作用 >>

$$+ \varepsilon(t) * (6.00 + j .000) * \exp(-.200 + j .000)t$$

$$+ \varepsilon(t) * (-6.00 + j .000) * \exp(.000 + j .000)t$$

***** 完全响应 *****

$$u_3(t) = \varepsilon(t) * (8.00 + j .000) * \exp(-.200 + j .000)t$$

$$+ \varepsilon(t) * (-6.00 + j .000) * \exp(.000 + j .000)t$$

计算结果表明，由冲激电压源 $10\delta(t)V$ 引起电容电压的零状态响应为

$$u_C'(t) = 2e^{-0.2t} \varepsilon(t) V$$

由阶跃电流源 $2\varepsilon(t)A$ 引起电容电压的零状态响应为

$$u_C''(t) = 6(1 - e^{-0.2t}) \varepsilon(t) V$$

根据线性动态电路的叠加定理，得到由冲激电压源 $10\delta(t)V$ 和阶跃电流源 $2\varepsilon(t)A$ 共同引起电容电压的零状态响应为

$$u_C(t) = u_C'(t) + u_C''(t) = (8e^{-0.2t} - 6)\varepsilon(t) V$$

§ 8-8 正弦信号激励的一阶电路

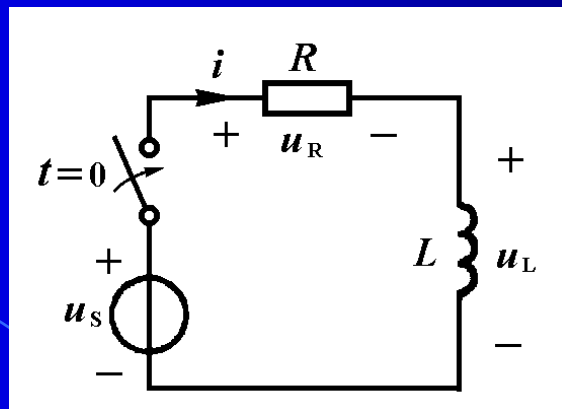


图8-49 RL 串联电路

本节讨论一阶电路在正弦信号激励下的响应。对于图8-49所示 RL 串联电路中，在电压源的正弦电压 $u_s(t) = U_{Sm} \cos(\omega t + \psi_u)$ 激励下，以电感电流 $i(t)$ 为变量的电路方程为

$$L \frac{di}{dt} + i = U_{Sm} \cos(\omega t + \psi_u) \quad (t \geq 0) \quad (8-42)$$

这是一个线性常系数非齐次一阶微分方程。它的解答由两部分组成

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) \quad (8-43)$$

$i_h(t)$ 是对应齐次微分方程的通解，其形式为

$$i_h(t) = Ke^{st} = Ke^{-\frac{R}{L}t} = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

式中 $\tau=L/R$ 是电路的时间常数， K 是待定常数，由初始条件和输入共同确定。

$i_p(t)$ 是非齐次微分方程的特解，其形式为

$$i_p(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$$

为了确定待定常数，将上式代入微分方程(8-42)中可以得到

$$-LI_m \omega \sin(\omega t + \psi_i) + RI_m \cos(\omega t + \psi_i) = U_{sm} \cos(\omega t + \psi_u)$$

由此求得 I_m 和 ψ_i

$$I_m = \frac{U_{sm}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad \psi_i = \psi_u - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

将 I_m 和 ψ_i 代入式(8-43)得到

$$\begin{aligned} i(t) &= Ke^{-\frac{R}{L}t} + I_m \cos(\omega t + \psi_i) \\ &= Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_{Sm}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t + \psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R}\right) \end{aligned}$$

假如初始条件为零, 即 $i(0_+) = 0$, 代入上式求得待定常数 K

$$K = -I_m \cos(\psi_i) = \frac{-U_{Sm}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R}\right)$$

最后得到电感电流的表达式为

$$\begin{aligned} i(t) &= -I_m \cos(\psi_i) e^{-\frac{R}{L}t} + I_m \cos(\omega t + \psi_i) \\ &= \frac{-U_{Sm}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_{Sm}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t + \psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R}\right) \end{aligned}$$

由此式可以看出，在一阶电路时间常数 $\tau > 0$ 的情况下。电感电流的第一项是一个衰减的指数函数，它经过 $(3 \sim 5)\tau$ 的时间基本衰减到零，称为暂态响应。电感电流的第二项是一个按照正弦规律变化的函数，其角频率与激励正弦电源的相同，称为正弦稳态响应。

图8-50画出电感电流的暂态响应，正弦稳态响应以及完全响应。由此曲线可以看出在经过 $(3 \sim 5)\tau$ 的时间后，暂态响应衰减到零，电感电流的全响应实际上就是按正弦规律变化的正弦稳态响应。这个结论适合于时间常数大于零的任何线性时不变一阶电路，以后还将推广到固有频率实部为负数的 n 阶线性时不变动态电路。

由图8-50所示曲线还可以看出在时间常数 τ 较大时，由于暂态响应衰减较慢，电感电流全响应的最大值可能接近 $2I_m$ ，出现过电流的现象。

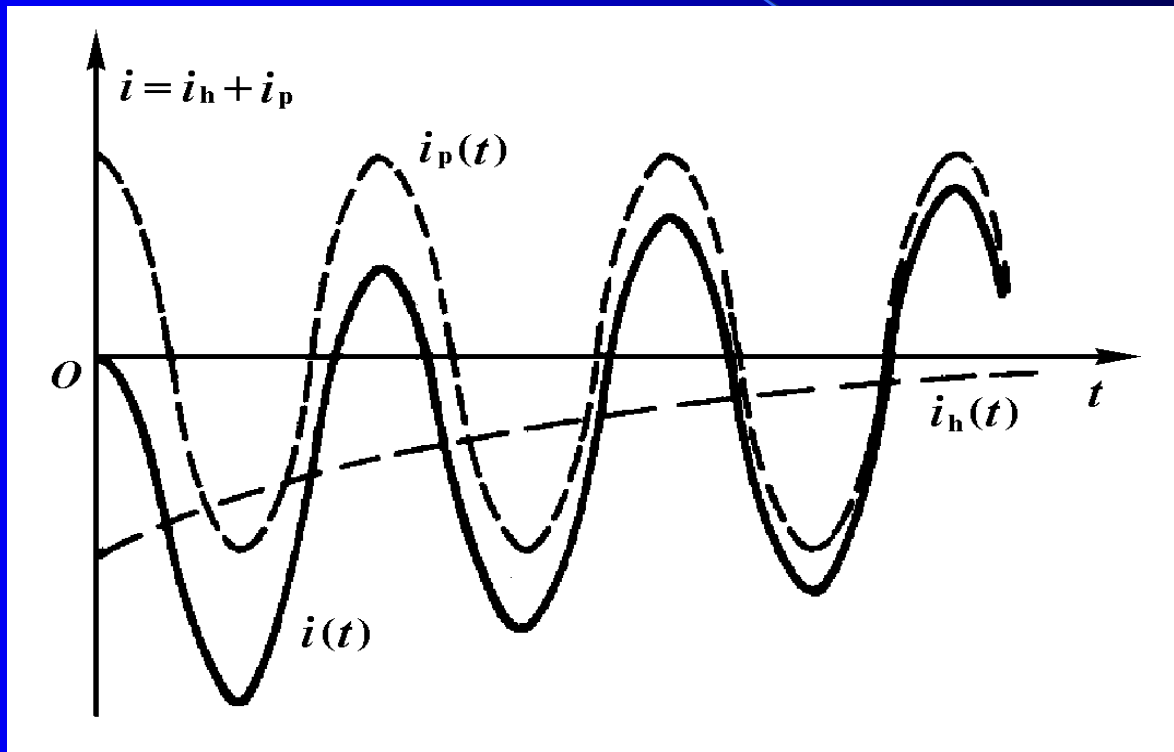


图8-50 正弦激励下电路的暂态响应，正弦稳态响应和全响应

从第十章开始，我们将专门讨论单一正弦电源激励的 n 阶线性时不变动态电路的正弦稳态响应。

摘 要

1. 动态电路的完全响应由独立电源和储能元件的初始状态共同产生。仅由初始状态引起的响应称为零输入响应；仅由独立电源引起的响应称为零状态响应。线性动态电路的全响应等于零输入响应与零状态响应之和。

2. 动态电路的电路方程是微分方程。其时域分析的基本方法是建立电路的微分方程，并利用初始条件求解。对于线性 n 阶非齐次微分方程来说，其通解为

$$f(t) = f_h(t) + f_p(t)$$

$f_h(t)$ 是对应齐次微分方程的通解，称为电路的固有响应，它与外加电源无关。 $f_p(t)$ 是非齐次微分方程的特解，其变化规律与激励信号的规律相同，称为电路的强制响应。

由一阶微分方程描述的电路称为一阶电路。对于直流激励下的一阶电路来说，其固有响应为 $f_h(t)=Ke^{st}$ 。若 $s<0$ 时，当 $t \rightarrow \infty$ 时， $f_h(t)=Ke^{st} \rightarrow 0$ ，此时 $f_p(t)=f(t)|_{t=\infty}=f(\infty)$ 。

此时固有响应 $f_h(t)$ 称为暂态响应，强制响应 $f_p(t)$ 称为稳态响应。

3. 直流激励下一阶电路中任一响应的通用表达式为

$$f(t) = [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + f(\infty) \quad (t > 0)$$

$$\text{其中} \quad \tau = R_0 C \quad \text{或} \quad \tau = L / R_0$$

只要能够计算出某个响应的初始值 $f(0_+)$ ，稳态值 $f(\infty)$ 和电路的时间常数 τ 这三个要素，利用以上通用公式，就能得到该响应的表达式，并画出波形曲线。对于仅含有一个电容或一个电感的一阶电路来说，只需要求解几个直流电阻电路，即可得到这三个要素的数值。这种计算一阶电路响应的方法，称为三要素法。

4. 三要素法还可以用来求解分段恒定信号激励的一阶电路以及含有几个开关的一阶电路。

5. 阶跃响应是电路在单位阶跃电压或电流激励下的零状态响应，一阶电路的阶跃响应可以用三要素法求得。

6. 冲激响应是电路在单位冲激电压或电流激励下的零状态响应，线性非时变电路的冲激响应可以用阶跃响应对时间求导数的方法求得。

7. 时间常数大于零的一阶电路，在正弦激励下的响应由暂态响应和正弦稳态响应两部分组成，当暂态响应衰减到零时，电路中的全响应就是正弦稳态响应，此时称电路处于正弦稳态。