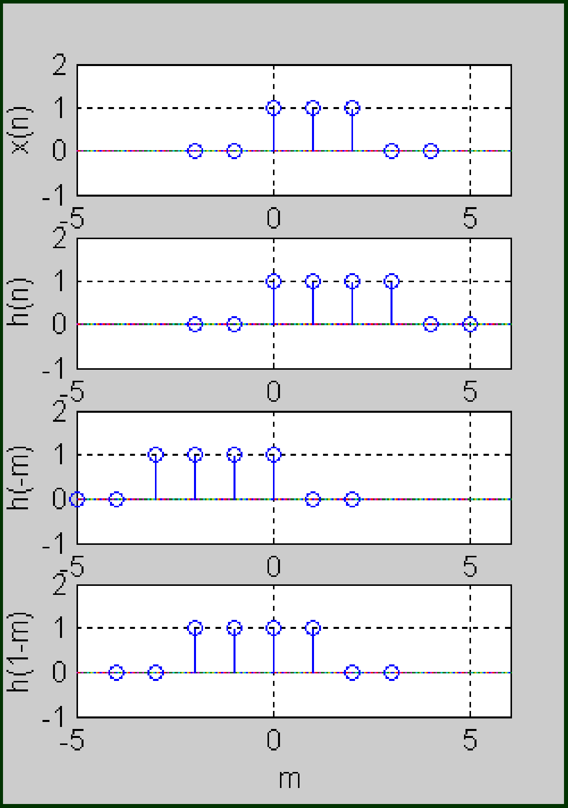
第一章习题讲解

1-2 已知线性移不变系统的输入为$x(n)$，系统的单位抽样响应为$h(n)$，试求系统的输出$y(n)$，并画图。

2）$x(n)=R_3(n)$，$h(n)=R_4(n)$

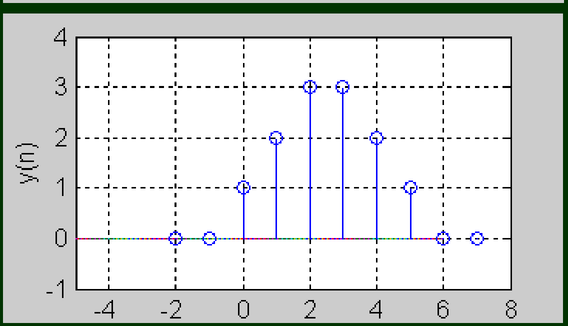
解：



$$y(n)=x(n)*h(n)=R_3(n)*R_4(n)$$

$$=\left[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)\right]*R_4(n)$$

$$=R_4(n)+R_4(n-1)+R_4(n-2)$$



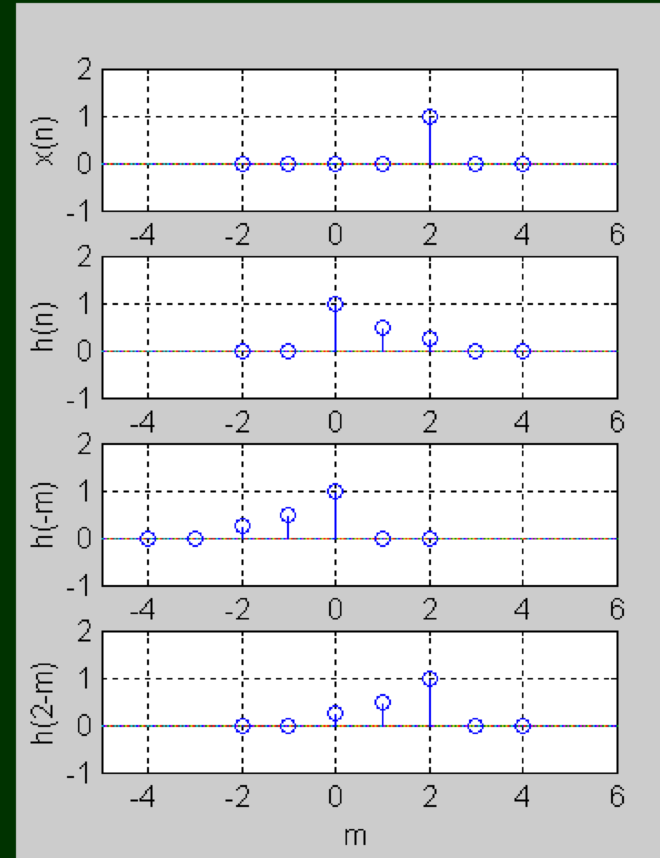
3） $x(n)=\delta(n-2)$， $h(n)=0.5^{n}R_3(n)$

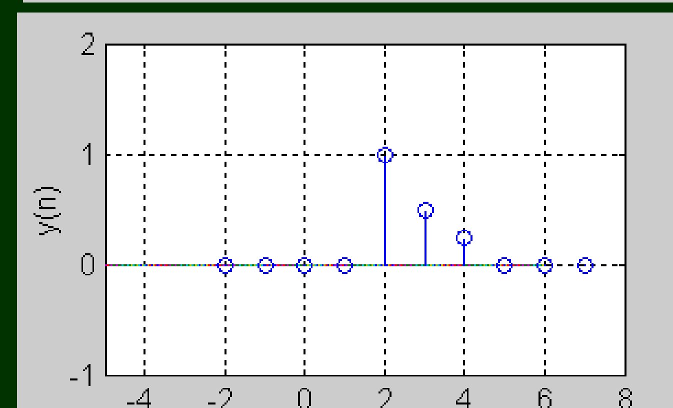
解：

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

$$=\delta(n-2)*0.5^{n}R_3(n)$$

$$=0.5^{n-2}R_3(n-2)$$





4） $x(n)=2^n u(-n-1)$， $h(n)=0.5^n u(n)$

解： $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$

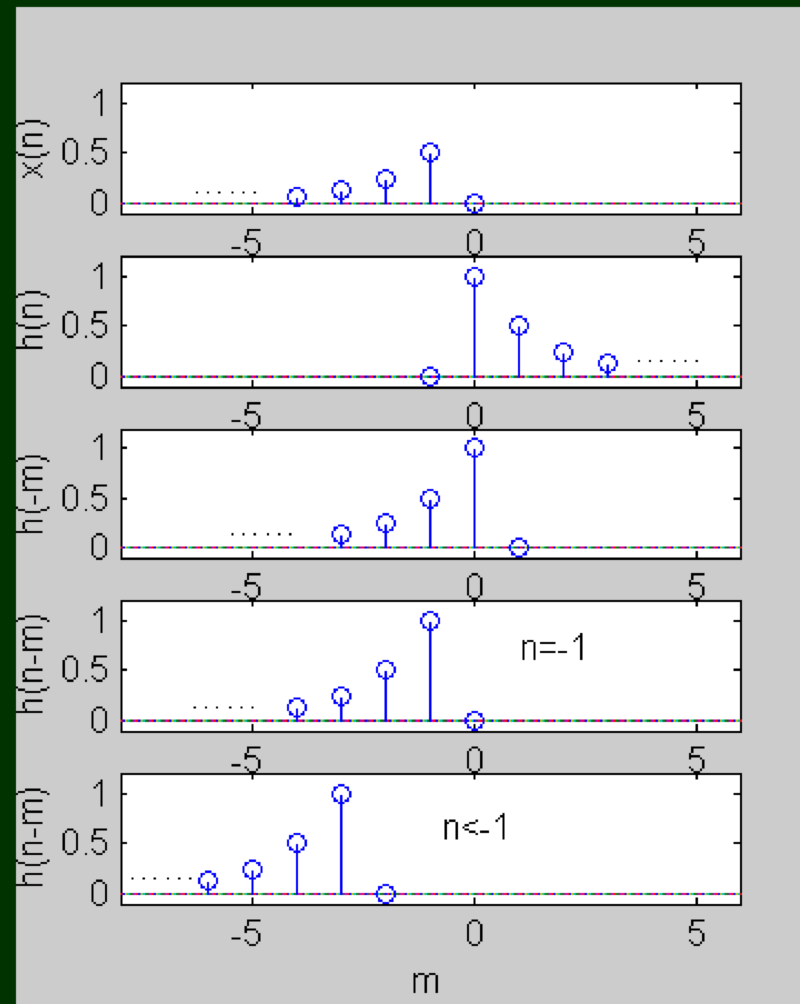
当 $n \le -1$ 时

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n} 2^m \cdot 0.5^{n-m}$$

$$=2^{-n}\sum_{m=-\infty}^{n} 4^m$$

$$=2^{-n}\sum_{m=-n}^{\infty} 4^{-m}$$

$$=2^{-n}\frac{4^n}{1-4^{-1}}=\frac{4}{3}\cdot 2^n$$



当$n \geq 0$时

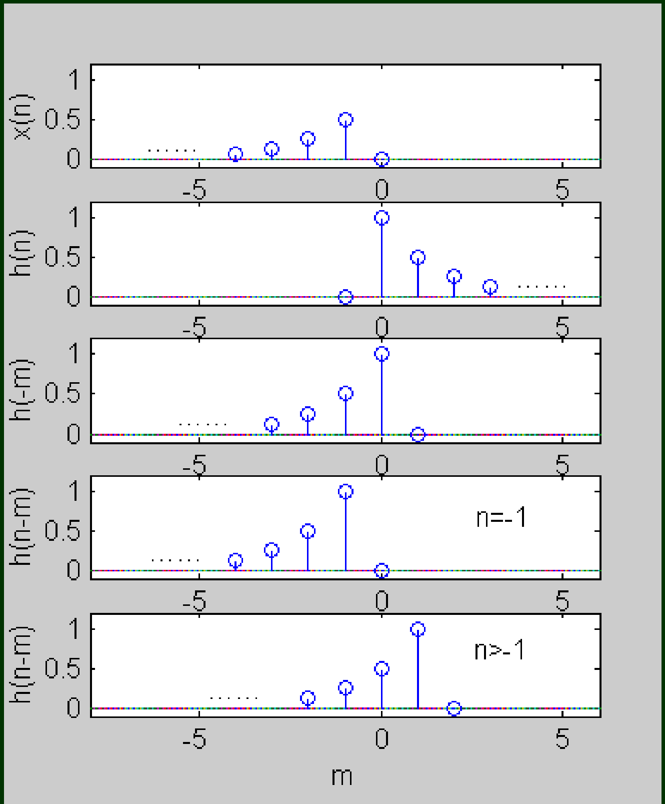
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{-1} 2^m \cdot 0.5^{n-m}$$

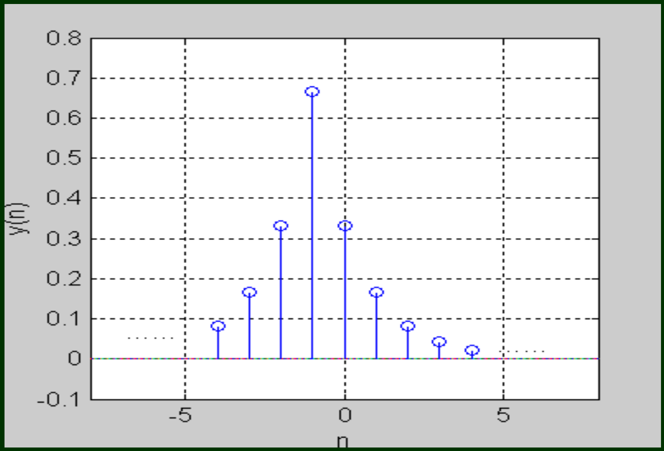
$$= 2^{-n} \sum_{m=-\infty}^{-1} 4^m$$

$$= 2^{-n} \sum_{m=1}^{\infty} 4^{-m}$$

$$= 2^{-n} \frac{4^{-1}}{1-4^{-1}} = \frac{1}{3} \cdot 2^{-n}$$

$$\therefore y(n) = \frac{4}{3} \cdot 2^n u(-n-1) + \frac{1}{3} \cdot 2^{-n} u(n)$$





1-3 已知$h(n)=a^{-n}u(-n-1),0<a<1$，通过直接计算卷积和的办法，试确定单位抽样响应为 $h(n)$的线性移不变系统的阶跃响应。

解：LSI系统的阶跃响应是指输入为阶跃序列时系统的输出，即

$$x(n)=u(n),\quad h(n)=a^{-n}u(-n-1),0<a<1$$

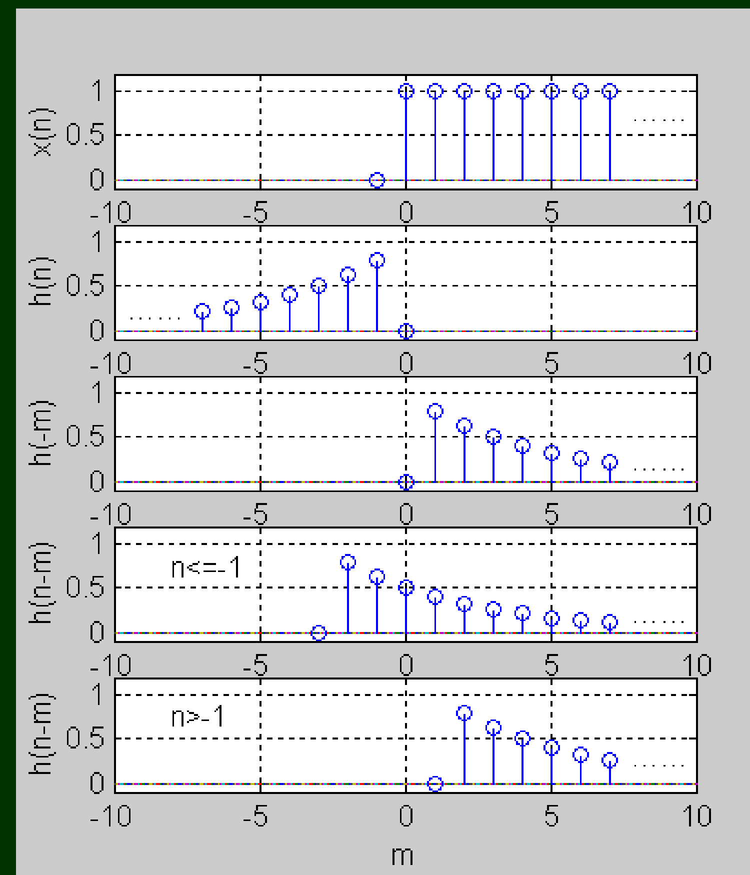
求$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$

当$n\le -1$时

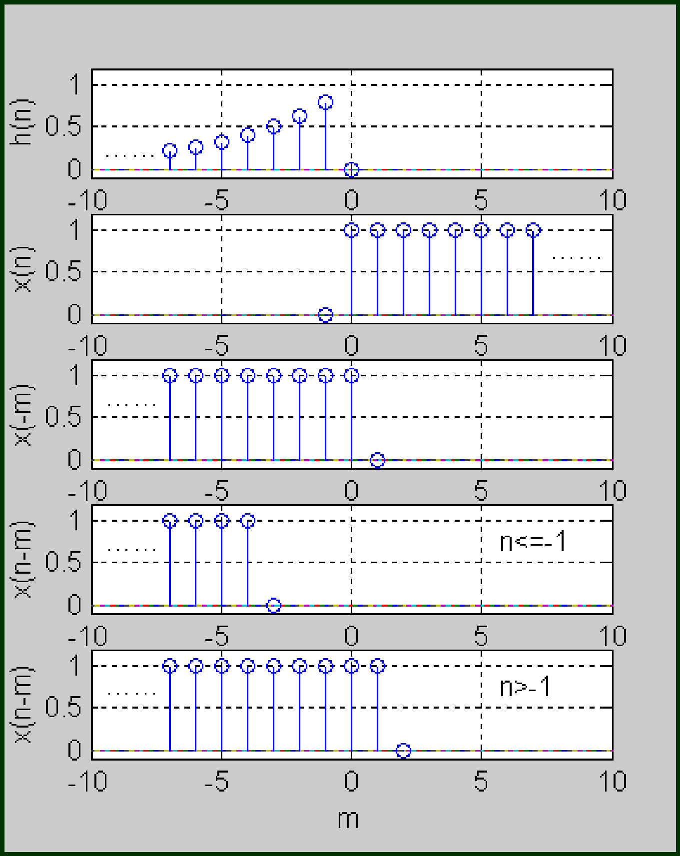
$$y(n)=\sum_{m=0}^{\infty}a^{-(n-m)}=\frac{a^{-n}}{1-a}$$

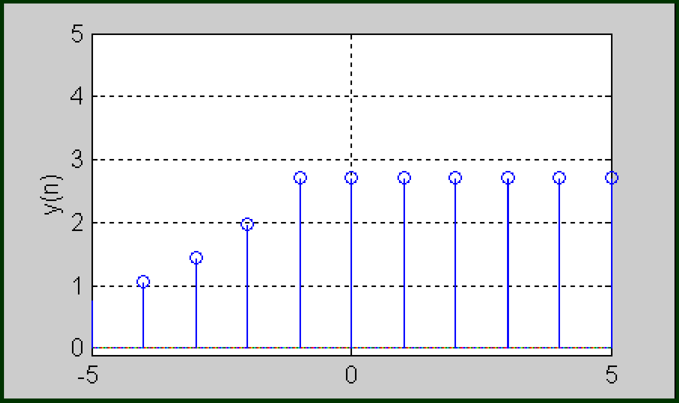
当$n\ge 0$时

$$y(n)=\sum_{m=n+1}^{\infty}a^{-(n-m)}=\frac{a}{1-a}$$



$$\therefore y(n)=\frac{a^{-n}}{1-a}u(-n-1)+\frac{a}{1-a}u(n)$$





1-4 判断下列每个序列是否是周期性的，若是周期性的，试确定其周期

（1）$x(n)=A\cos\left(\frac{3\pi}{7}n-\frac{\pi}{8}\right)$

解：$x(n)$为正弦序列 其中$\omega_0=\frac{3\pi}{7}$

$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{14}{3}$是有理数

$N=14$是满足$x(n+N)=x(n)$的最小正整数

$\therefore x(n)$为周期序列，周期为14

1-6 试判断 $y(n)=\left[x(n)\right]^2$ 是否是线性系统？并判断是否是移不变系统？

解：设 $T[x_1(n)]=[x_1(n)]^2 \quad T[x_2(n)]=[x_2(n)]^2$

$$\because T\left[x_1(n)+x_2(n)\right]=\left[x_1(n)+x_2(n)\right]^2$$

$$=\left[x_1(n)\right]^2+\left[x_2(n)\right]^2+2x_1(n)x_2(n)$$

$$\neq T\left[x_1(n)\right]+T\left[x_2(n)\right]$$ 不满足可加性

或 $T\left[ax(n)\right]=\left[ax(n)\right]^2=a^2\left[x(n)\right]^2\neq aT\left[x(n)\right]$

不满足比例性

$\therefore$ 不是线性系统

$$\because T\left[x(n-m)\right]=\left[x(n-m)\right]^2=y(n-m)=[x(n-m)]^2$$

$\therefore$ 是移不变系统

1-7 判断以下每一系统是否是（1）线性（2）移不变（3）因果（4）稳定的?

(1) $T\left[x(n)\right]=g(n)x(n)$

解：$\because T\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]=g(n)\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]$

$=ag(n)x_1(n)+bg(n)x_2(n)$

$=aT\left[x_1(n)\right]+bT\left[x_2(n)\right]$ 满足叠加原理

$\therefore$ 是线性系统

$\because T\left[x(n-m)\right]=g(n)x(n-m)$

$y(n-m)=g(n-m)x(n-m)\neq T\left[x(n-m)\right]$

$\therefore$ 不是移不变系统

$$T\left[x(n)\right]=g(n)x(n)$$

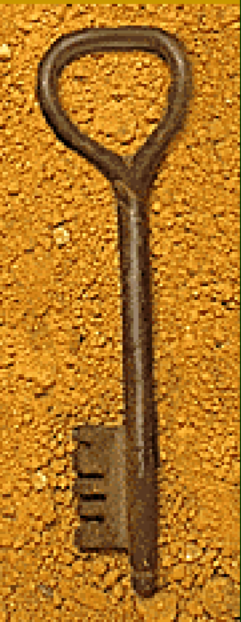
因为系统的输出只取决于当前输入，与未来输入无关。所以是因果系统

若 $x(n)$ 有界 $\left|x(n)\right|\le M<\infty$

则 $\left|T\left[x(n)\right]\right|\le\left|g(n)\right|M$

当 $\left|g(n)\right|<\infty$ 时，输出有界，系统为稳定系统

当 $\left|g(n)\right|=\infty$ 时，输出无界，系统为不稳定系统



（2）$T\left[x(n)\right]=\sum_{k=n_0}^{n}x(k)$

$$\because T\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]=\sum_{k=n_0}^{n}\left[ax_1(k)+bx_2(k)\right]$$

$$=a\sum_{k=n_0}^{n}x_1(k)+b\sum_{k=n_0}^{n}x_2(k)=aT\left[x_1(n)\right]+bT\left[x_2(n)\right]$$

满足叠加原理

$\therefore$ 是线性系统

$$\because T\left[x(n-m)\right]=\sum_{k=n_0}^{n}x(k-m)\overset{\text{令}k^{'}=k-m}{=}\sum_{k^{'}=n_0-m}^{n-m}x\left(k^{'}\right)$$

$$y(n-m)=\sum_{k=n_0}^{n-m}x(k)\neq T\left[x(n-m)\right]$$

$\therefore$ 是移变系统

$$T\left[x(n)\right]=\sum_{k=n_0}^{n}x(k)$$

当 $n \ge n_0$ 时，输出只取决于当前输入和以前的输入

而当 $n < n_0$ 时，输出还取决于未来输入

$\therefore$ 是非因果系统

当 $\left|x(n)\right| \le M < \infty$ 时，

$$\left|T\left[x(n)\right]\right|=\left|\sum_{k=n_0}^{n}x(k)\right| \le \sum_{k=n_0}^{n}\left|x(k)\right| \le \left(\left|n-n_0\right|+1\right)M \to \infty$$

当 $n \to \infty$

$\therefore$ 是不稳定系统

(3) $T\left[x(n)\right]=x(n-n_0)$

$$\because T\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]=ax_1(n-n_0)+bx_2(n-n_0)$$

$$=aT\left[x_1(n)\right]+bT\left[x_2(n)\right]$$

满足叠加原理　　$\therefore$ 是线性系统

$$\because T\left[x(n-m)\right]=x(n-m-n_0)=y(n-m)$$

$\therefore$ 是移不变系统

当 $n_0 \geq 0$ 时，输出与未来输入无关

是因果系统

当 $n_0 < 0$ 时，输出取决于未来输入

是非因果系统

$\because$ 若 $\left|x(n)\right| \leq M < \infty$　则 $\left|x(n-n_0)\right| \leq M < \infty$

$\therefore$ 是稳定系统

（4） $T\left[x(n)\right]=e^{x(n)}$

$\because T\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]=e^{\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]}=e^{ax_1(n)}\cdot e^{bx_2(n)}$

$\neq aT\left[x_1(n)\right]+bT\left[x_2(n)\right]=ae^{x_1(n)}+be^{x_2(n)}$

不满足叠加原理　　$\therefore$ 是非线性系统

$\because T\left[x(n-m)\right]=e^{x(n-m)}=y(n-m)$

$\therefore$ 是移不变系统

输出只取决于当前输入，与未来输入无关

$\therefore$ 是因果系统

$\because$ 若 $\left|x(n)\right|\le M<\infty$　　则 $\left|e^{x(n)}\right|\le e^{\left|x(n)\right|}\le e^{M}<\infty$

$\therefore$ 是稳定系统

1-8 以下序列是系统的单位抽样响应 $h(n)$ 试说明系统是否是（1）因果的（2）稳定的

（3） $3^n u(n)$

解：

$\because$ 当 $n<0$ 时 $h(n)=0$ $\quad\therefore$ 是因果的

$$\because \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty}|3^n| = \infty \qquad \therefore \text{是不稳定的}$$

（4） $3^n u(-n)$

解：

$\because$ 当$n<0$时 $h(n) \neq 0$

$\therefore$ 是非因果的

$$\because \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{0}\left|3^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|3^{-n}\right| = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} < \infty$$

$\therefore$ 是稳定的

（5） $0.3^n u(n)$

解：

$\because$ 当 $n<0$ 时 $h(n)=0$

$\therefore$ 是因果的

$$\because \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|0.3^n\right| = \frac{1}{1-0.3} = \frac{10}{7} < \infty$$

$\therefore$ 是稳定的

（6） $0.3^n u(-n-1)$

解：

$\because$ 当 $n<0$ 时 $h(n)\neq 0$

$\therefore$ 是非因果的

$$\because \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{-1}|0.3^n| = \sum_{n=1}^{\infty}|0.3^{-n}| = \infty$$

$\therefore$ 是不稳定的

（7）$\delta(n+4)$

解：

$\because$ 当$n=-4$时 $h(n)=\delta(n+4)=1\neq 0$

$\therefore$ 是非因果的

$$\because \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n+4)=1$$

$\therefore$ 是稳定的

1-10设有一系统，其输入输出关系由以下差分方程确定

$$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)$$

设系统是因果性的。

（a）求该系统的单位抽样响应

（b）由（a）的结果，利用卷积和求输入 $x(n)=e^{j\omega n}$ 的响应

（a）系统是因果性的　　$\therefore h(n)=0, n<0$

$$y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)$$

令$x(n)=\delta(n)$

则$y(n)=h(n)=\frac{1}{2}h(n-1)+x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)$

$$h(0)=\frac{1}{2}h(-1)+x(0)+\frac{1}{2}x(-1)=1$$

$$h(1)=\frac{1}{2}h(0)+x(1)+\frac{1}{2}x(0)=\frac{1}{2}(1+1)=1$$

$$h(2)=\frac{1}{2}h(1)+x(2)+\frac{1}{2}x(1)=\frac{1}{2}$$

$$h(3)=\frac{1}{2}h(2)+x(3)+\frac{1}{2}x(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$h(n)=\frac{1}{2}h(n-1)+x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\therefore$ 系统的单位抽样响应

$$h(n)=\delta(n)+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)$$

(b) $y(n)=h(n)*x(n)=\left[\delta(n)+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)\right]*e^{j\omega n}$

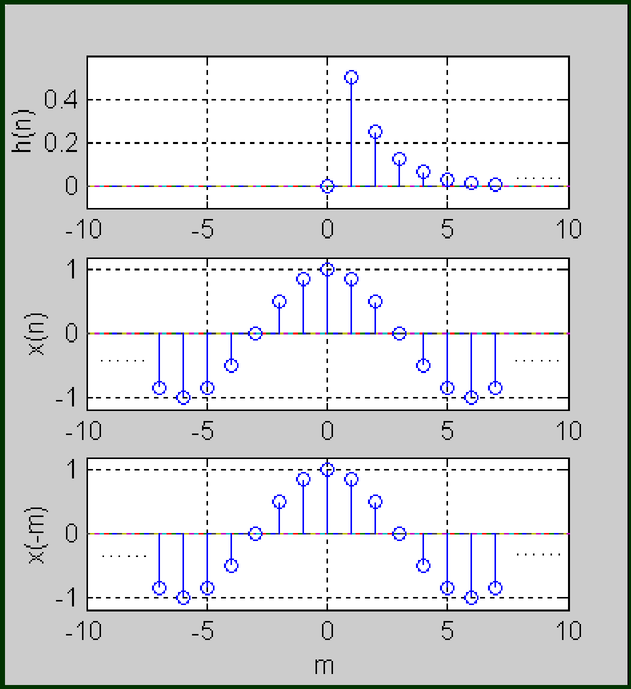
$$=e^{j\omega n}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}e^{j\omega(n-m)}$$

$$2e^{j\omega n}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m}e^{-j\omega m}$$

$$=e^{j\omega n}+2e^{j\omega n}\frac{\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$\times 2e^{j\omega}$$

$$=e^{j\omega n}+\frac{2e^{j\omega n}}{2e^{j\omega}-1}=e^{j\omega n}\frac{2e^{j\omega}+1}{2e^{j\omega}-1}$$



1-14 有一调幅信号

$$x_a(t)=\left[1+\cos\left(2\pi\times 100t\right)\right]\cos\left(2\pi\times 600t\right)$$

用DFT做频谱分析，要求能分辨 $x_a(t)$ 的所有频率分量，问

(1)抽样频率应为多少赫兹（Hz）？

(2)抽样时间间隔应为多少秒（Sec）？

(3)抽样点数应为多少点？

解:

$$x_a(t)=\left[1+\cos\left(2\pi\times 100t\right)\right]\cos\left(2\pi\times 600t\right)$$

$$=\cos\left(2\pi\times 600t\right)$$

$$+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\times 700t\right)+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\times 500t\right)$$

（1）抽样频率应为 $f_s \geq 2\times 700 = 1400Hz$

（2）抽样时间间隔应为

$$T \leq \frac{1}{f_s}=\frac{1}{1400}=0.00072Sec=0.72ms$$

（3） $x(n) = x_a(t)\big|_{t=nT}$

$$= \cos\left(2\pi \times \frac{6}{14} n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi \times \frac{7}{14} n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi \times \frac{5}{14} n\right)$$

$x(n)$为周期序列，周期$N = 14$

$\therefore$抽样点数至少为14点

或者因为频率分量分别为500、600、700Hz

得 $F_0 = 100\text{Hz}$

$$N = f_s / F_0 = 1400/100 = 14$$

$\therefore$最小记录点数$N = 14$

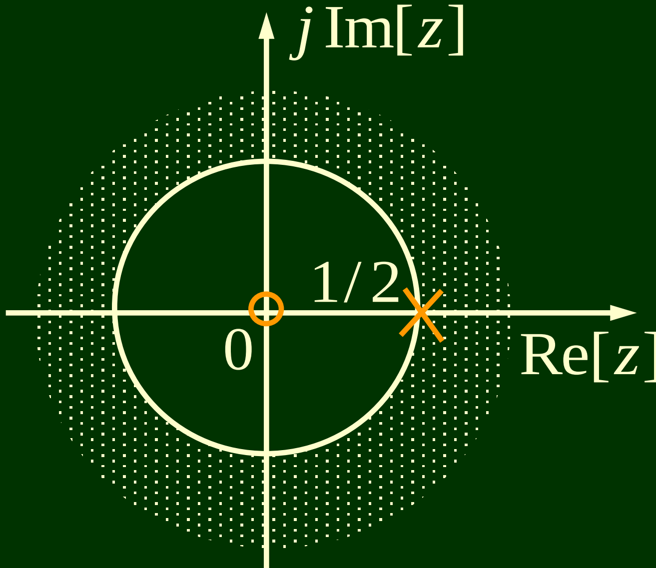
第二章习题讲解

2-1求以下序列的z 变换并画出零极点图和收敛域：

(2) $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

解：$ZT\left[x(n)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}$ $\quad \left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$



零点：$z=0$

极点：$z=\frac{1}{2}$

收敛域：$|z|>\frac{1}{2}$

（3） $x(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$

解：

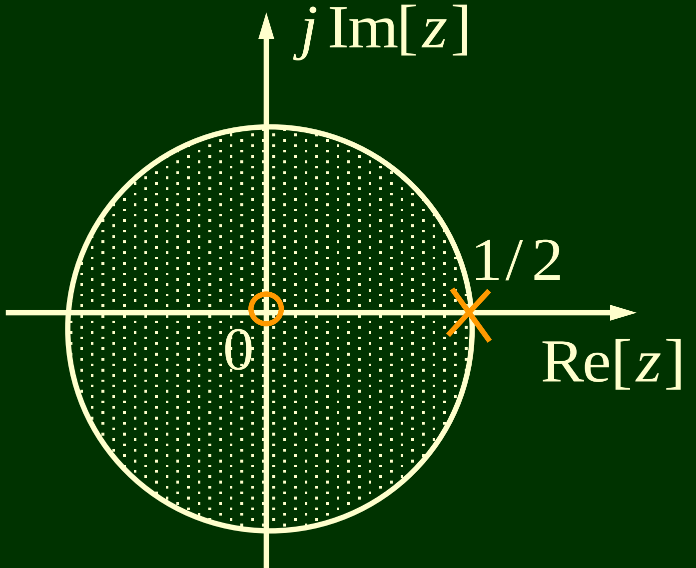
$$ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} -2^n z^n$$

$$= -\frac{2z}{1-2z} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |2z| < 1$$

零点： $z = 0$

极点： $z = \frac{1}{2}$

收敛域： $|z| < \frac{1}{2}$



2-2 假如 $x(n)$ 的z变换代数表示式是下式，问 $X(z)$ 可能有多少不同的收敛域，它们分别对应什么序列？

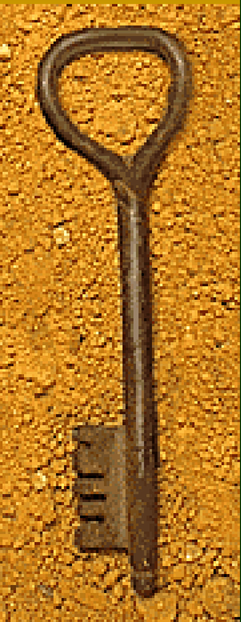
$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1+\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{8}z^{-2}\right)}$$

解：对$X(z)$的分子和分母进行因式分解，得

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1+\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{8}z^{-2}\right)}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2}jz^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}jz^{-1}\right)\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

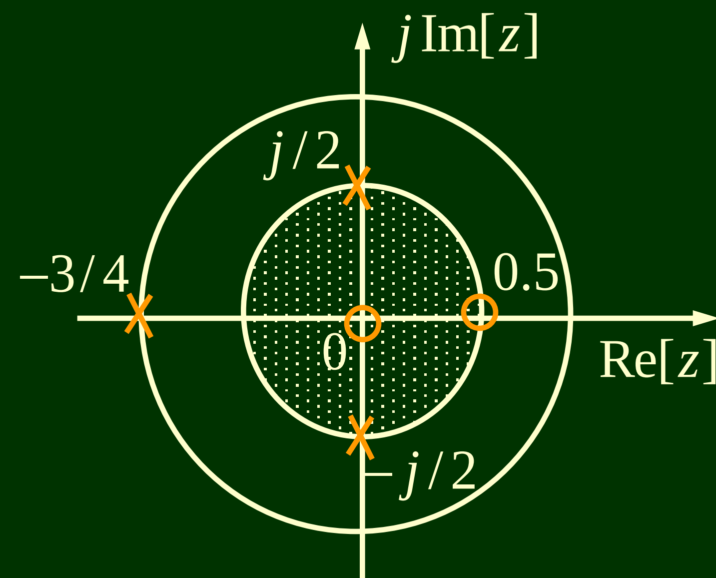


$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2}jz^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}jz^{-1}\right)\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

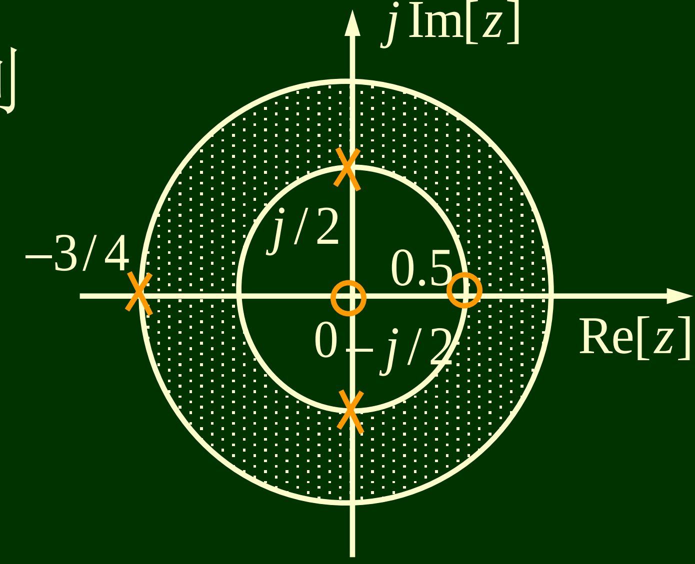
零点：$z=\frac{1}{2},\ 0$　　　　极点：$z=\frac{j}{2},\ -\frac{j}{2},\ -\frac{3}{4}$

所以$X(z)$的收敛域为：

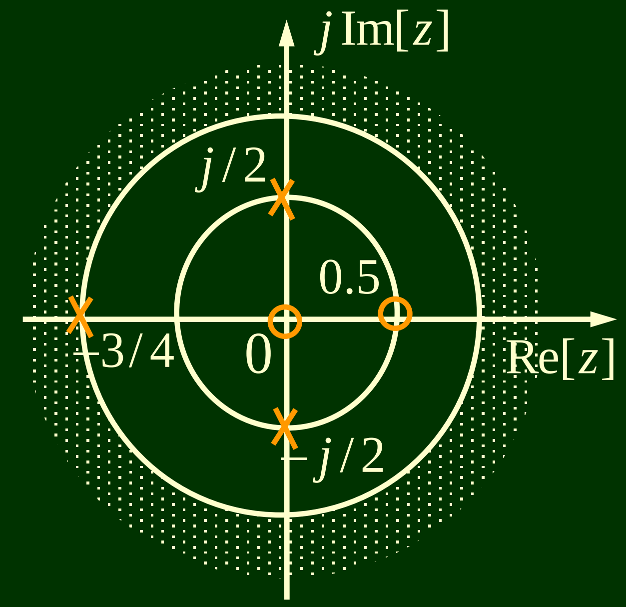
1）　$|z|<\frac{1}{2}$，为左边序列



2） $\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{4}$，为双边序列



3） $|z|>\frac{3}{4}$，为右边序列



2-3 用长除法，留数定理，部分分式法求以下 $X(z)$ 的z反变换

（1） $X(z)=\dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}$　　$|z|>\dfrac{1}{2}$

解：①长除法

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

由Roc判定$x(n)$是右边序列，用长除法展成z的负幂级数，分子分母按z的降幂排列

$$
\begin{array}{r}
1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}+\cdots \\
1+\frac{1}{2}z^{-1}\,\big)\,\overline{1\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
1+\frac{1}{2}z^{-1} \\
\hline
-\frac{1}{2}z^{-1} \\
-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{4}z^{-2} \\
\hline
\frac{1}{4}z^{-2} \\
\vdots
\end{array}
$$

$$X(z)=1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}z^{-n}$$

$$\therefore x(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)$$

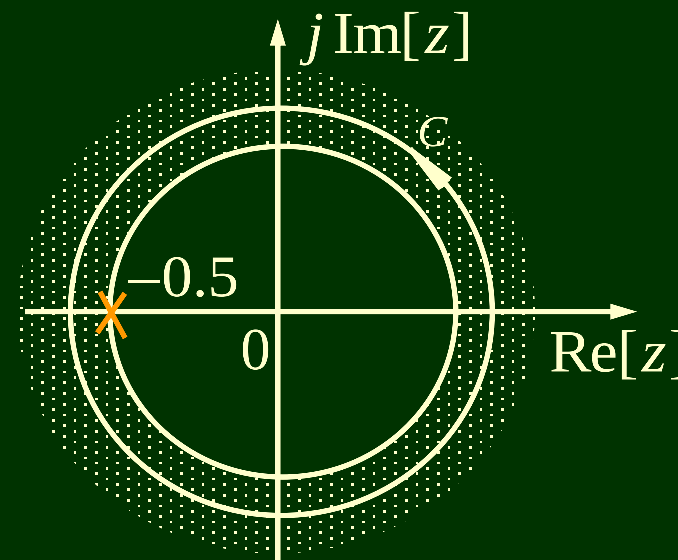
②留数法

$\because ROC: |z| > \frac{1}{2}$ 又 $\lim_{z \to \infty} X(z) = 1$ 即∞处$X(z)$收敛

$\therefore x(n)$为因果序列　即$x(n) = 0$，$n < 0$

当 $n \geq 0$ 时，$F(z) = X(z) z^{n-1} = \dfrac{z^{n-1}}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}} = \dfrac{z^n}{z + \frac{1}{2}}$

$F(z)$在围线c内只有一个单阶极点 $z = -\frac{1}{2}$



$$x(n) = \text{Res}\left[F(z)\right]_{z=-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left(z+\frac{1}{2}\right)\frac{z^n}{z+\frac{1}{2}}\right]_{z=-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

③部分分式法

$$\because X(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{1}{2}=\left|-\frac{1}{2}\right|$$

查表由 $ZT[a^n u(n)]=\frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z|>|a|$

得 $$x(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

（2） $X(z)=\dfrac{1-2z^{-1}}{1-\dfrac{1}{4}z^{-1}}\qquad |z|<\dfrac{1}{4}$

解：①长除法

$$X(z)=\frac{z-2}{z-\dfrac{1}{4}}=\frac{2-z}{\dfrac{1}{4}-z}$$

由Roc判定$x(n)$是左边序列，用长除法展成z的正幂级数，分子分母按z的升幂排列

$$\frac{1}{4}-z\,\overline{\big)\,2-z\qquad\qquad}\quad 8+7\times 4z+7\times 4^{2}z^{2}+\cdots$$

$$\begin{array}{r}
2-8z \\
\hline
7z \\
7z-7\times 4z^{2} \\
\hline
7\times 4z^{2} \\
7\times 4z^{2}-7\times 4^{2}z^{3} \\
\hline
7\times 4^{2}z^{3} \\
\vdots
\end{array}$$

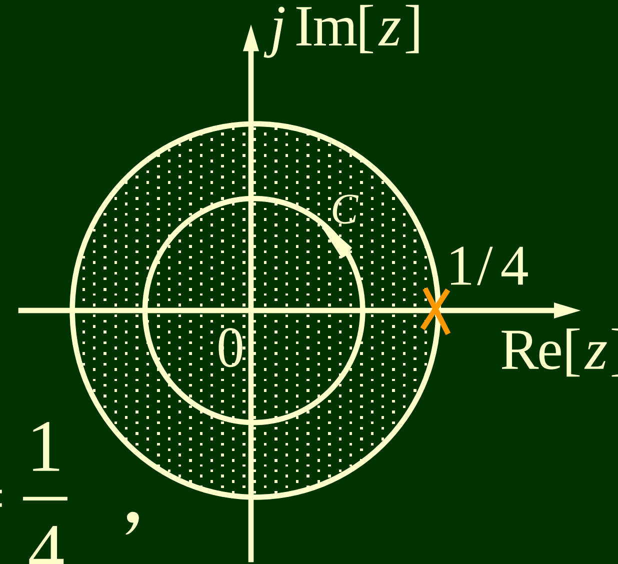
$$X(z)=8+7\times 4z+7\times 4^{2}z^{2}+\cdots$$

$$=8+7\sum_{n=1}^{\infty}4^{n}z^{n}=8+7\sum_{n=-\infty}^{-1}4^{-n}z^{-n}$$

$$\therefore x(n)=8\delta(n)+7\times 4^{-n}u(-n-1)$$

②留数法

$$F(z)=X(z)z^{n-1}=\frac{(z-2)z^{n-1}}{z-1/4}$$



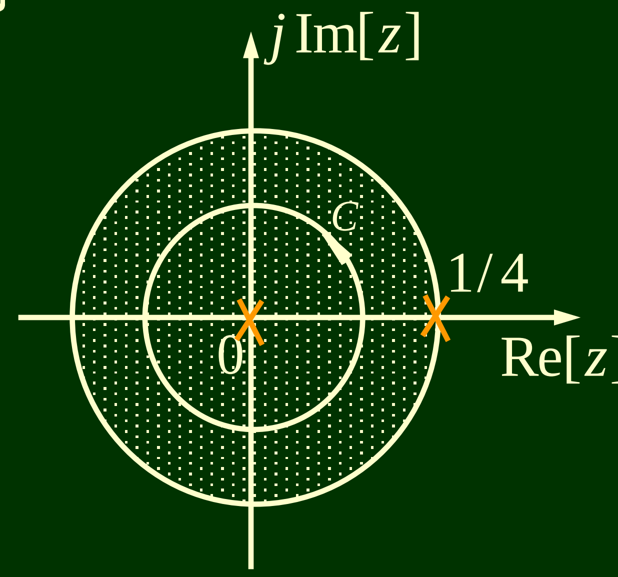
当 $n\geq 1$ 时，$F(z)$ 只有极点 $z=\frac{1}{4}$ ，

围线c内无极点。故 $x(n)=0$

当 $n=0$ 时，$F(z)$在围线c内有一单阶极点 $z=0$

$$\therefore x(n)=\mathrm{Res}\left[F(z)\right]_{z=0}$$

$$=\left[z\frac{(z-2)z^{n-1}}{z-1/4}\right]_{z=0}=8$$



当 $n \le -1$ 时，

$F(z)$在围线c内有一 $-(n-1)$阶极点 $z=0$

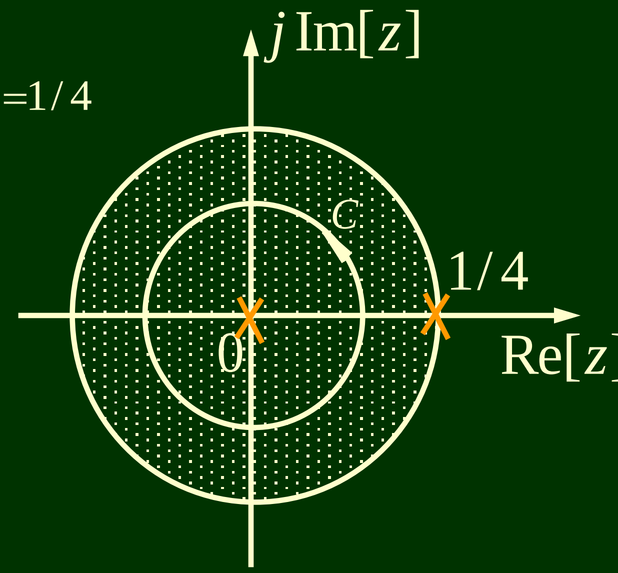
在围线c外有单阶极点 $z=1/4$,

且分母阶次高于分子阶次二阶以上

$$x(n) = -\mathrm{Res}\left[F(z)\right]_{z=1/4}$$

$$= -\left[\left(z-1/4\right)\frac{(z-2)z^{n-1}}{z-1/4}\right]_{z=1/4}$$

$$= \frac{7}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 7\times 4^{-n}$$



$$\therefore x(n) = 8\delta(n) + 7\times 4^{-n}u(-n-1)$$

③部分分式法

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z-2}{\left(z-\frac{1}{4}\right)z}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-\frac{1}{4}}$$

$$A=\operatorname{Res}\left[\frac{X(z)}{z}\right]_{z=0}=8 \quad B=\operatorname{Res}\left[\frac{X(z)}{z}\right]_{z=\frac{1}{4}}=-7$$

$$\therefore X(z)=8+\frac{-7z}{z-\frac{1}{4}}$$

查表由 $ZT[a^n u(-n-1)]=\frac{-1}{1-az^{-1}} \quad |z|<|a|$

得 $x(n)=8\delta(n)+7\times 4^{-n}u(-n-1)$

2-6 有一个信号 $y(n)$，它与另两个信号 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的关系是

$$y(n) = x_1(n+3) * x_2(-n-1)$$

其中 $x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n), \quad x_2(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

已知 $ZT\left[a^n u(n)\right] = \frac{1}{1-az^{-1}}, \ |z| > |a|$

利用 z 变换性质求 $y(n)$ 的 z 变换 $Y(z)$

解：由$x_1(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

得 $X_1(z)=ZT[x_1(n)]=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$

由$x_2(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

得 $X_2(z)=ZT[x_2(n)]=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{1}{3}$

由序列的移位性质，得

$$ZT\left[x_1(n+3)\right]=z^3X_1\left(z\right)=\frac{z^3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

求 $ZT\left[x_2(-n-1)\right]$

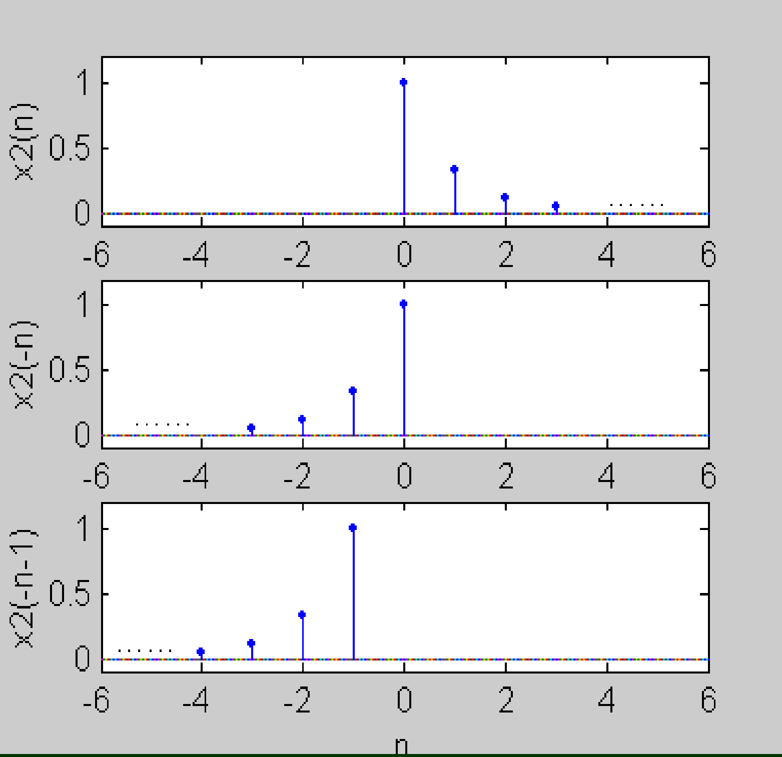
$$x_2(n) \xrightarrow{\text{翻褶}} x_2(-n) \xrightarrow{\text{左移一位}} x_2(-n-1)$$

$$ZT\left[x_2(-n)\right] = X_2\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \left|\frac{1}{z}\right| > \frac{1}{3} \Rightarrow |z| < 3$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}z}$$

$$ZT\left[x_2(-n-1)\right] = z \cdot X_2\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$= z \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}z}$$

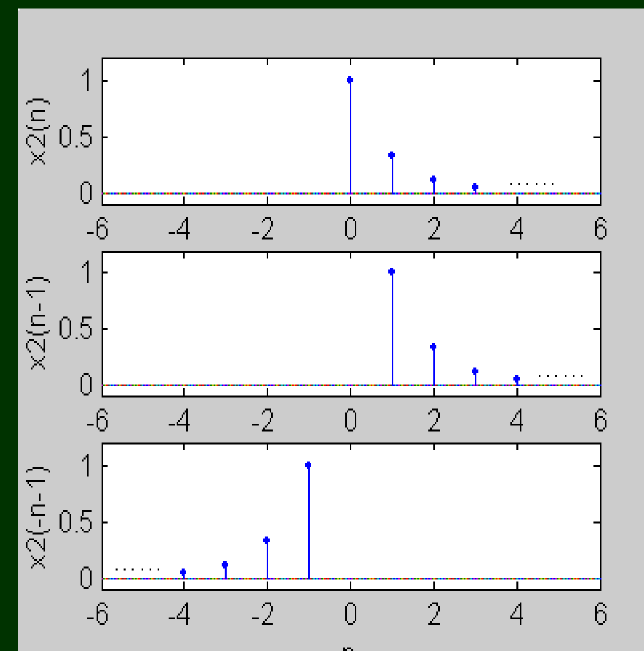


或 $x_2(n) \xrightarrow{\text{右移一位}} x_2(n-1) \xrightarrow{\text{翻褶}} x_2(-n-1)$

$$ZT\left[x_2(n-1)\right] = z^{-1}X_2(z) = \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = X_2'(z) \qquad |z| > \frac{1}{3}$$

$$ZT\left[x_2(-n-1)\right] = X_2'\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$= \frac{z}{1-\frac{1}{3}z} \qquad \left|\frac{1}{z}\right| > \frac{1}{3} \Rightarrow |z| < 3$$



$$Y(z) = ZT\left[x_1(n+3)\right] \cdot ZT\left[x_2(-n-1)\right]$$

$$= \frac{z^3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{z}{1-\frac{1}{3}z} = \frac{3z^5}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(3-z)} \qquad \frac{1}{2} < |z| < 3$$

2-7 求以下序列 $x(n)$的频谱$X(e^{j\omega})$:

（1）$\delta(n-n_0)$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-n_0)e^{-j\omega n}$$

$$=e^{-j\omega n_0}$$

（3） $e^{-(\alpha+j\omega_0)n}u(n)$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(\alpha+j\omega_0)n}e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-[\alpha+j(\omega_0+\omega)]n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{-\alpha}\cdot e^{-j(\omega_0+\omega)}\right]^n$$

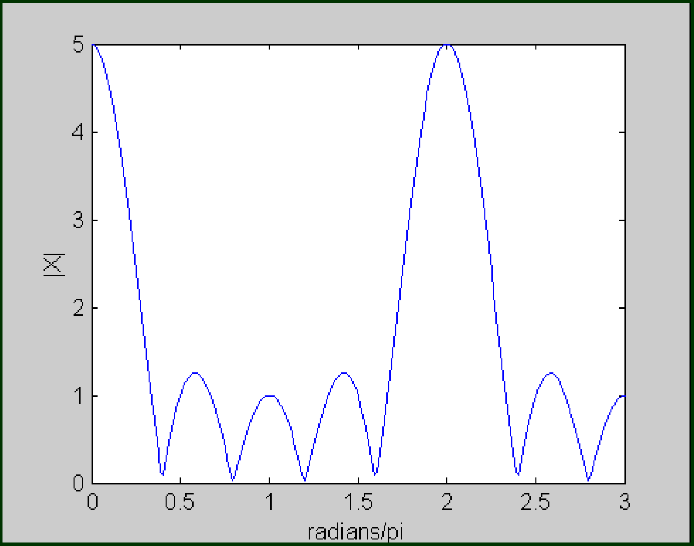
$$=\frac{1}{1-e^{-\alpha}\cdot e^{-j(\omega_0+\omega)}}$$ 当 $\left|e^{-\alpha}\right|<1\Rightarrow\alpha>0$

2-9 求 $x(n)=R_5(n)$ 的傅里叶变换

解：

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{4}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j\omega 5}}{1-e^{-j\omega}}$$

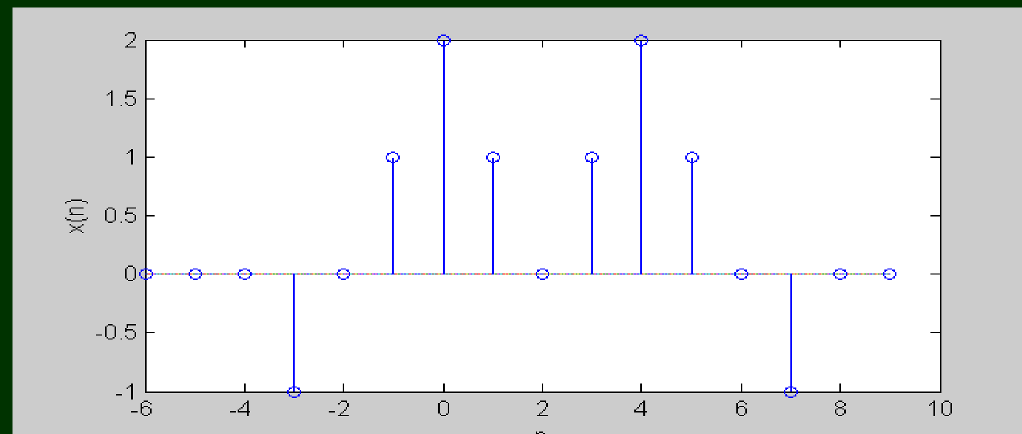
$$=\frac{e^{-j\frac{5}{2}\omega}\left(e^{j\frac{5\omega}{2}}-e^{-j\frac{5\omega}{2}}\right)}{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)}$$



$$=\begin{cases} e^{-j2\omega}\dfrac{\sin\frac{5}{2}\omega}{\sin\frac{\omega}{2}} & \omega\neq 2\pi k \\ 5 & \omega=2\pi k \end{cases}$$

k为整数

2-10 设$X\left(e^{j\omega}\right)$是如图所示的$x(n)$信号的傅里叶变换，不必求出$X\left(e^{j\omega}\right)$，试完成下列计算：



(1) $X\left(e^{j0}\right)$

解：由序列的傅里叶变换公式

$$X(e^{j\omega}) = DTFT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

得 $X\left(e^{j0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j0\cdot n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = 6$

（2） $\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) d\omega$

解：由序列的傅里叶反变换公式

$$x(n) = DTFT^{-1}[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

得 $\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega \cdot 0} d\omega = 2\pi x(0) = 4\pi$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$

解：由Parseval公式 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$

得 $\int_{-\pi}^{\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|^2 = 28\pi$

2-11 已知 $x(n)$有傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$，用 $X(e^{j\omega})$ 表示下列信号的傅里叶变换

（a） $x_1(n) = x(1-n) + x(-1-n)$

解： $X_1(e^{j\omega}) = DTFT\left[x(1-n) + x(-1-n)\right]$

$$= DTFT\left[x(1-n)\right] + DTFT\left[x(-1-n)\right]$$

$$= e^{-j\omega} X(e^{-j\omega}) + e^{j\omega} X(e^{-j\omega})$$

$$= 2\cos\omega \cdot X(e^{-j\omega})$$

$$DTFT\left(x(-n)\right) = X(e^{-j\omega})$$

$$DTFT\left(x(n-m)\right) = e^{-j\omega m} X(e^{j\omega})$$

（b） $$x_3(n)=\frac{x^*(-n)+x(n)}{2}$$

$$DTFT\left(x\left(-n\right)\right)=X\left(e^{-j\omega}\right)$$

$$DTFT\left(x^*\left(n\right)\right)=X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$

$$X_3(e^{j\omega})=\frac{1}{2}\left[X^*(e^{j\omega})+X\left(e^{j\omega}\right)\right]$$

$$=\mathrm{Re}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]$$

2-13 研究一个输入为$x(n)$和输出为$y(n)$的时域线性离散移不变系统，已知它满足

$$y(n-1)-\frac{10}{3}y(n)+y(n+1)=x(n)$$

并已知系统是稳定的。试求其单位抽样响应。

$$y(n-1)-\frac{10}{3}y(n)+y(n+1)=x(n)$$

解：对差分方程两边取z变换

$$z^{-1}Y(z)-\frac{10}{3}Y(z)+zY(z)=X(z)$$

得系统函数：$H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{1}{z^{-1}-\frac{10}{3}+z}$

$$=\frac{z}{z^2-\frac{10}{3}z+1}=\frac{z}{\left(z-\frac{1}{3}\right)(z-3)}$$

零点：$z=0,\ \infty$

极点：$z=\dfrac{1}{3},\ \ 3$

$\because$ 系统稳定 $\therefore Roc:\dfrac{1}{3}<|z|<3$

由$H(z)=\dfrac{z}{\left(z-\dfrac{1}{3}\right)(z-3)}$ $\quad Roc:\dfrac{1}{3}<|z|<3\quad$ 求$h(n)$

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{1}{\left(z-\dfrac{1}{3}\right)(z-3)}=\frac{A_1}{\left(z-\dfrac{1}{3}\right)}+\frac{A_2}{(z-3)}$$

$$A_1=\mathrm{Res}\left(\frac{H(z)}{z}\right)_{z=1/3}=-\frac{3}{8}\qquad A_2=\mathrm{Res}\left(\frac{H(z)}{z}\right)_{z=3}=\frac{3}{8}$$

$$H(z)=\frac{-\dfrac{3}{8}z}{z-\dfrac{1}{3}}+\frac{\dfrac{3}{8}z}{z-3}$$

$$H(z)=\frac{-\frac{3}{8}z}{z-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{3}{8}z}{z-3} \qquad Roc:\frac{1}{3}<|z|<3$$

$$ZT[a^n u(n)]=\frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z|>|a|$$

$$ZT[a^n u(-n-1)]=\frac{-1}{1-az^{-1}} \quad |z|<|a|$$

$$\frac{z}{z-\frac{1}{3}} \xrightarrow{|z|>1/3} \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \qquad \frac{-z}{z-3} \xrightarrow{|z|<3} 3^n u(-n-1)$$

$$\therefore h(n)=-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)-\frac{3}{8}\times 3^n u(-n-1)$$

2-14 研究一个满足下列差分方程的线性移不变系统，该系统不限定因果、稳定系统，利用方程的零极点图，试求系统单位抽样响应的三种可能选择方案。

$$y(n-1)-\frac{5}{2}y(n)+y(n+1)=x(n)$$

解：对差分方程两边取z变换

$$z^{-1}Y(z)-\frac{5}{2}Y(z)+zY(z)=X(z)$$

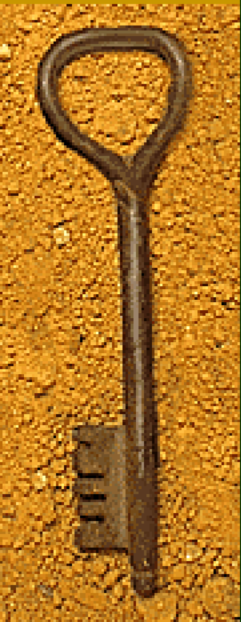
得系统函数

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{z^{-1}-\frac{5}{2}+z}=\frac{z}{z^{2}-\frac{5}{2}z+1}=\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}$$

零点：$z=0,\infty$　　　极点：$z=\frac{1}{2},\ \ 2$

可能有的收敛域：

$$|z|<\frac{1}{2}\qquad \frac{1}{2}<|z|<2\qquad |z|>2$$



对$H(z)=\dfrac{z}{\left(z-\dfrac{1}{2}\right)(z-2)}$部分分式分解

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{1}{\left(z-\dfrac{1}{2}\right)(z-2)}=\frac{A_1}{\left(z-\dfrac{1}{2}\right)}+\frac{A_2}{(z-2)}$$

$$A_1=\mathrm{Res}\left(\frac{H(z)}{z}\right)_{z=1/2}=-\frac{2}{3}\quad A_2=\mathrm{Res}\left(\frac{H(z)}{z}\right)_{z=2}=\frac{2}{3}$$

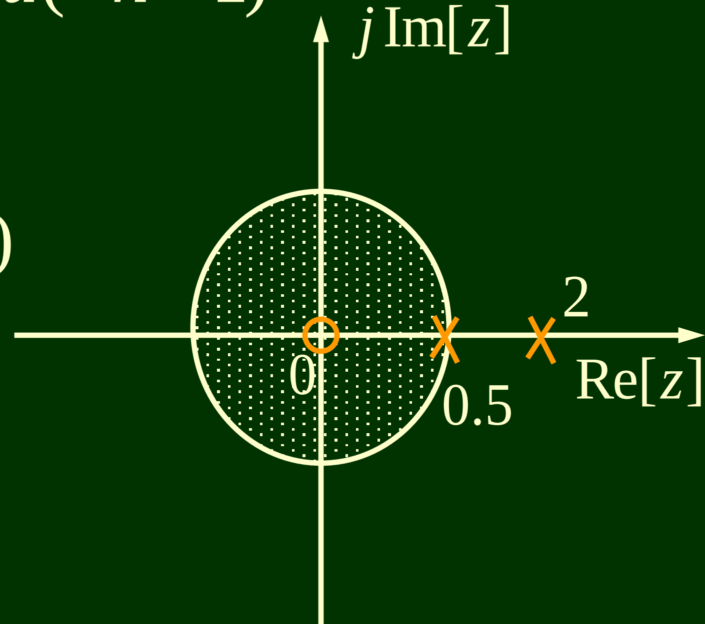
$$H(z)=\frac{-\dfrac{2}{3}z}{z-\dfrac{1}{2}}+\frac{\dfrac{2}{3}z}{z-2}$$

$$H(z)=\frac{-\frac{2}{3}z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{2}{3}z}{z-2}$$

（1）当 $|z|<\frac{1}{2}$时，系统非因果不稳定

$$h(n)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(-n-1)-\frac{2}{3}2^{n}u(-n-1)$$

$$=\frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-2^{n}\right]u(-n-1)$$



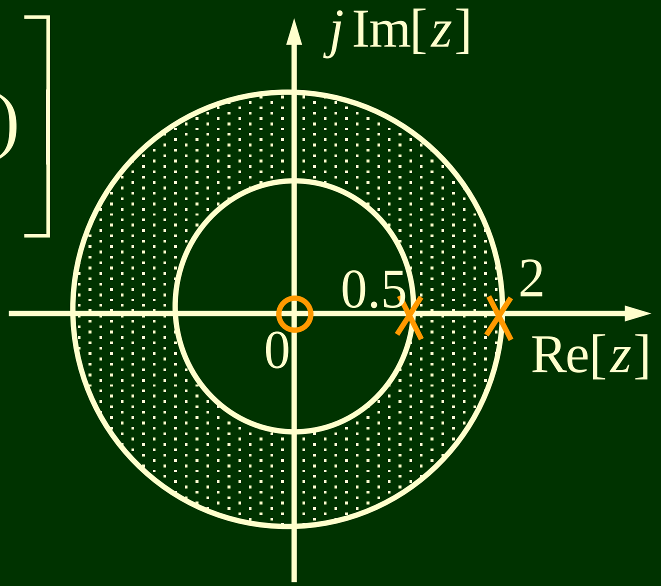
$$ZT[a^{n}u(-n-1)]=\frac{-z}{z-a}\quad |z|<|a|$$

$$H(z)=\frac{-\frac{2}{3}z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{2}{3}z}{z-2}$$

（2）当 $\frac{1}{2}<|z|<2$ 时，系统稳定，非因果

$$h(n)=-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)-\frac{2}{3}\cdot 2^{n}u(-n-1)$$

$$=-\frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)+2^{n}u(-n-1)\right]$$



$$ZT[a^{n}u(n)]=\frac{z}{z-a}\quad |z|>|a|$$

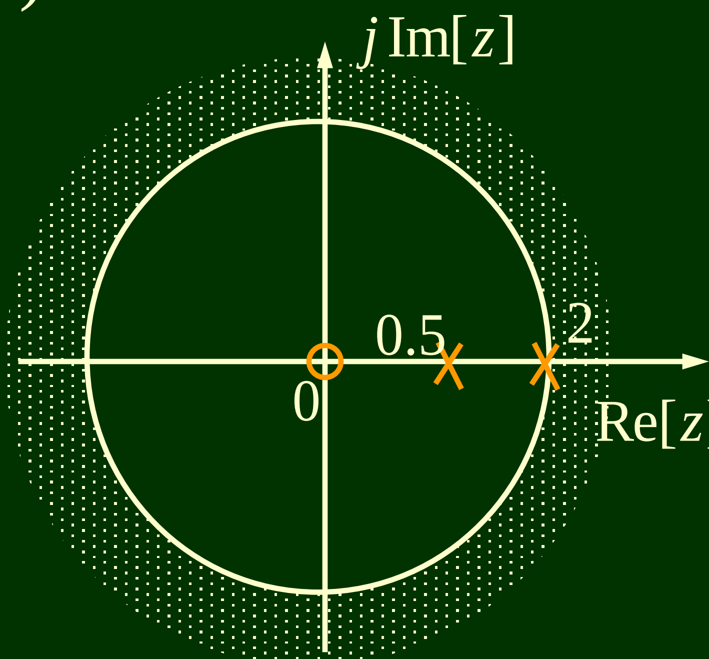
$$ZT[a^{n}u(-n-1)]=\frac{-z}{z-a}\quad |z|<|a|$$

$$H(z)=\frac{-\frac{2}{3}z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{2}{3}z}{z-2}$$

（3）当 $|z|>2$时，系统因果，不稳定

$$h(n)=-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)+\frac{2}{3}\cdot 2^{n}u(n)$$

$$=-\frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-2^{n}\right]u(n)$$



$$ZT[a^{n}u(n)]=\frac{z}{z-a}\quad |z|>|a|$$

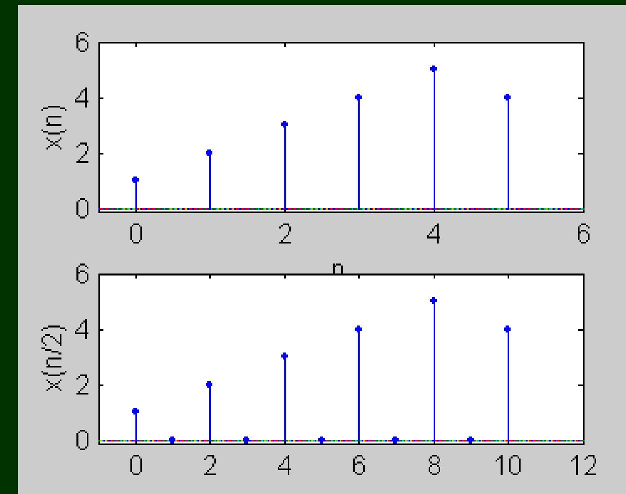
2-17 设$x(n)$是一离散时间信号，其z变换为$X(z)$。利用$X(z)$求下列信号的z变换：

（1）$x_1(n)=\nabla x(n)$，这里∇记作一次后向差分算子，定义为：$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$

解：$ZT\left[\nabla x(n)\right]=ZT\left[x(n)\right]-ZT\left[x(n-1)\right]$

$$=X(z)-z^{-1}X(z)=\left(1-z^{-1}\right)X(z)$$

(2) $x_2(n)=\begin{cases} x\left(\dfrac{n}{2}\right) & n\text{为偶数} \\ 0 & n\text{为奇数} \end{cases}$



解：$ZT\left[x_2(n)\right]=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x_2(n)z^{-n}=\sum\limits_{n\text{为偶数}}x\left(\dfrac{n}{2}\right)z^{-n}$

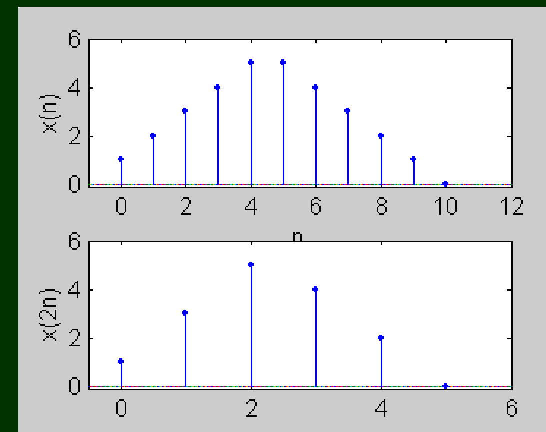
$$=\sum_{n=2m}x\left(\frac{n}{2}\right)z^{-n}\text{，}\ m\text{为整数}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)z^{-2m}=X\left(z^2\right)$$

(3) $x_3(n)=x(2n)$

解： $ZT\left[x_3(n)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_3(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(2n)z^{-n}$

$$=\sum_{m=2n}x(m)z^{-\frac{m}{2}},\quad n\text{为整数}$$



令 $x(m)=\frac{1}{2}\left[1+(-1)^m\right]x(m)$

$$ZT\left[x_3(n)\right]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\left[1+(-1)^m\right]x(m)\cdot z^{-\frac{m}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)z^{-\frac{m}{2}}+\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\cdot\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)^{-m}$$

$$=\frac{1}{2}\left[X\left(z^{\frac{1}{2}}\right)+X\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

第三章习题讲解

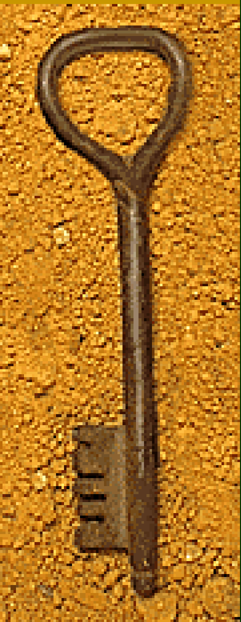
3． 设 $x(n)=\begin{cases} n+1, & 0\le n\le 4 \\ 0, & 其他n \end{cases}$ $\qquad h(n)=R_4(n-2)$

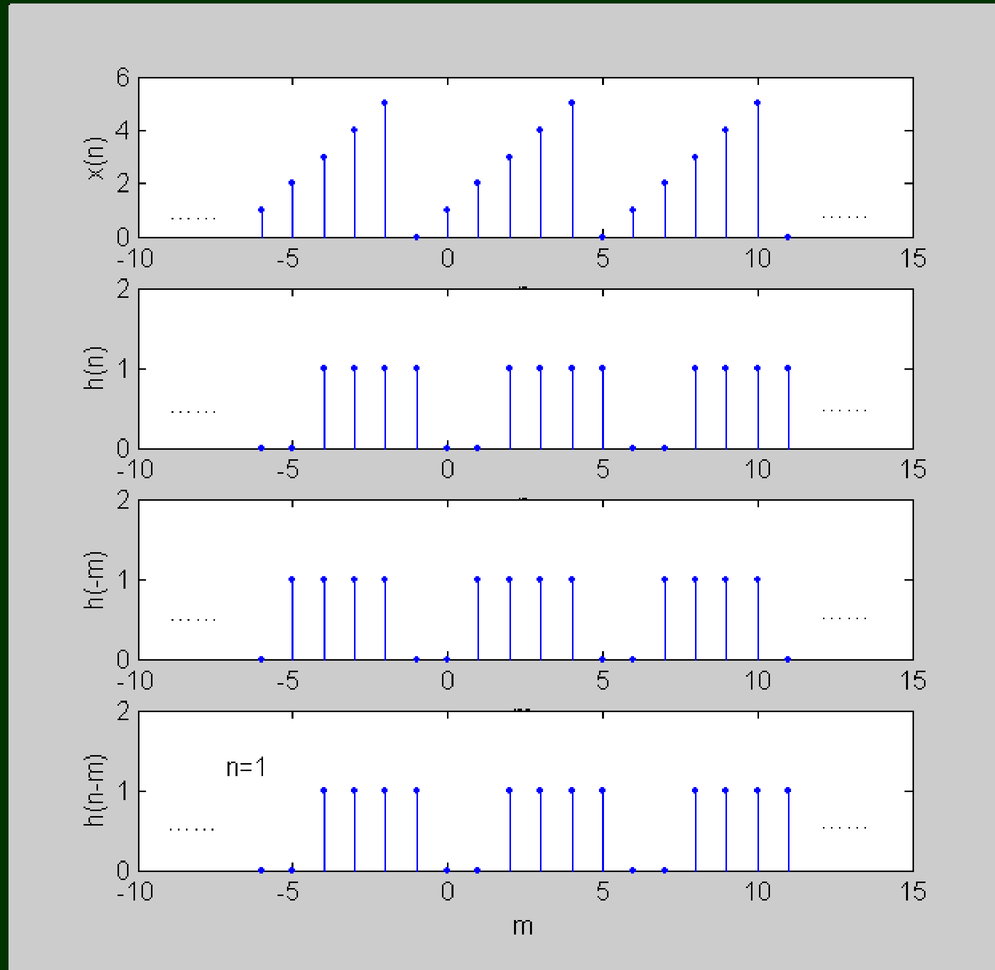
令 $\tilde{x}(n)=x((n))_6$ ，$\tilde{h}(n)=h((n))_6$ ，

试求 $\tilde{x}(n)$ 与 $\tilde{h}(n)$ 的周期卷积并作图。

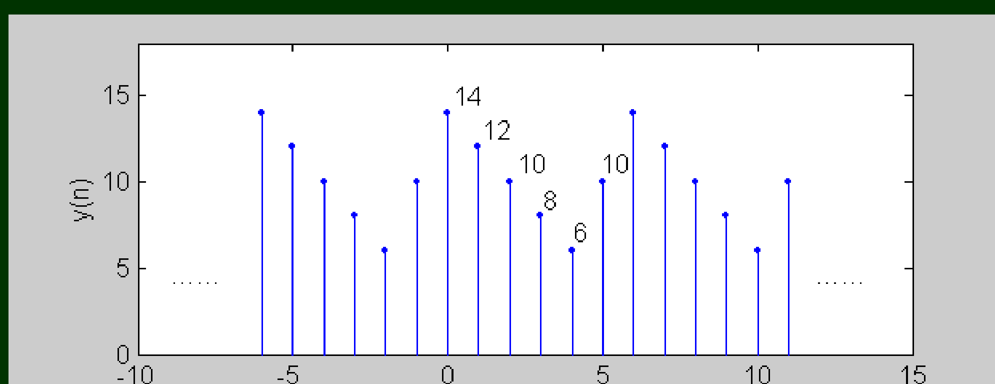
解：

$$\tilde{y}(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}(m)\tilde{h}(n-m)$$





x(n)
h(n)
h(-m)
h(n-m)
n=1
m



y(n)
14
12
10
8
6
10

n/m	…-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7 …	
$\tilde{x}(n/m)$	… 3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2 …	
$\tilde{h}(n/m)$	… 1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0 …	$\tilde{y}(n)$
$\tilde{h}(-m)$	… 1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1 …	14
$\tilde{h}(1-m)$	… 1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0 …	12
$\tilde{h}(2-m)$	… 0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0 …	10
$\tilde{h}(3-m)$	… 0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1 …	8
$\tilde{h}(4-m)$	… 1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1 …	6
$\tilde{h}(5-m)$	… 1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1 …	10

4. 已知 $x(n)$ 如图P3-4（a）所示，为 $\{1,1,3,2\}$，试画出 $x((-n))_5$，$x((-n))_6 R_6(n)$，$x((n))_3 R_3(n)$，$x((n))_6$，$x((n-3))_5 R_5(n)$，$x((n))_7 R_7(n)$ 等各序列。

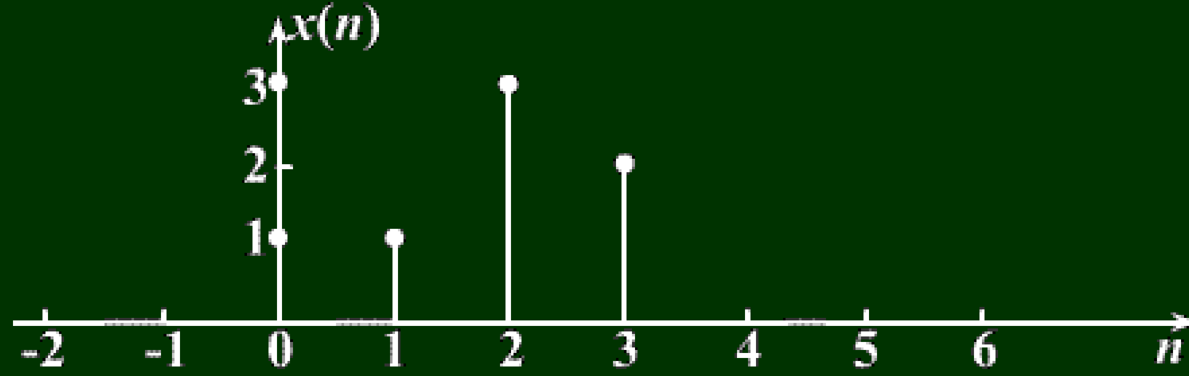
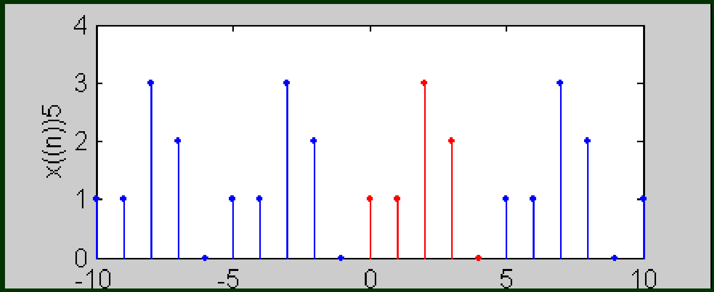
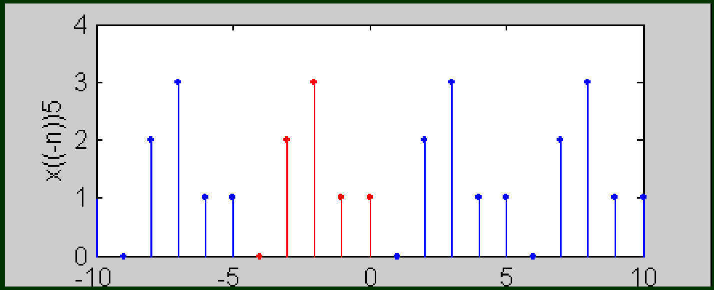
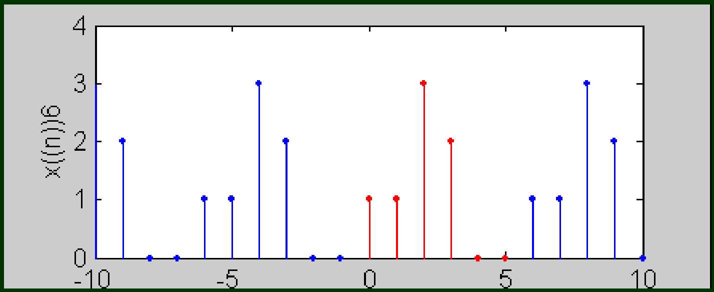


图 P3-4(a)

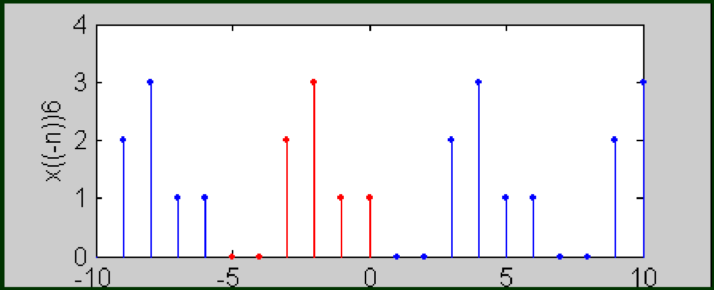


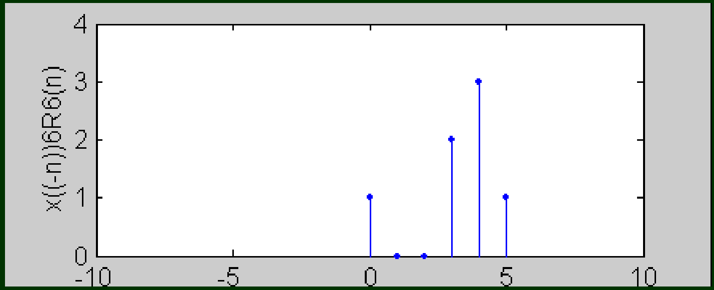


$$x((-n))_5$$

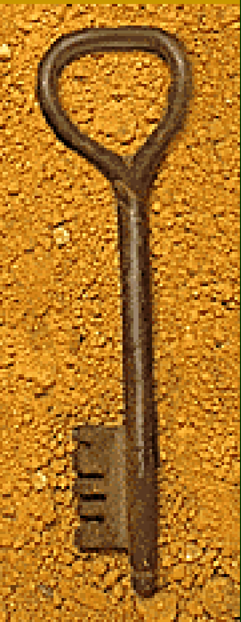


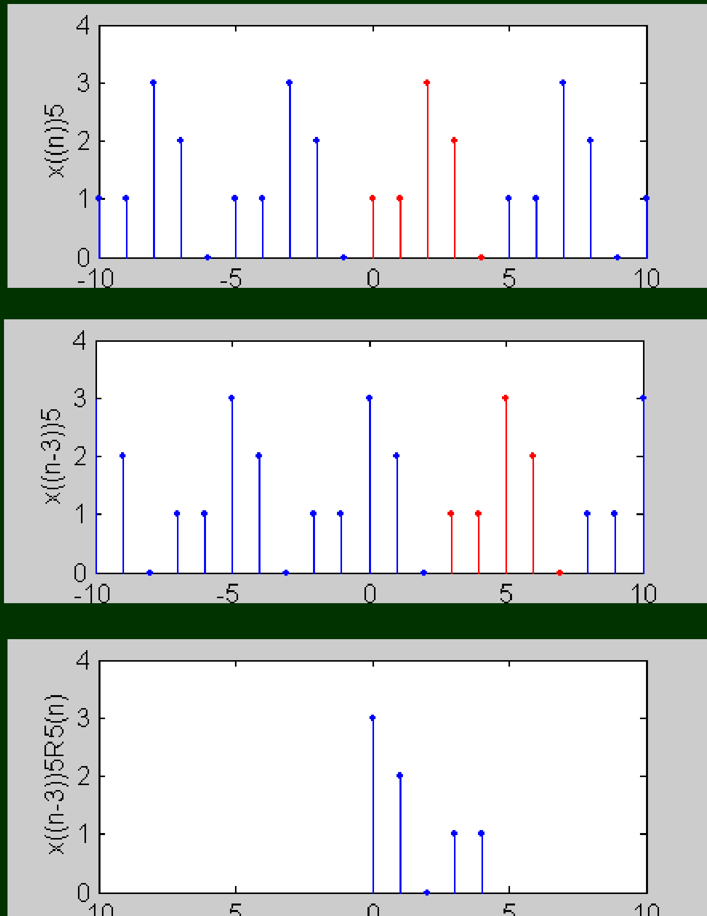
$$x((n))_6$$



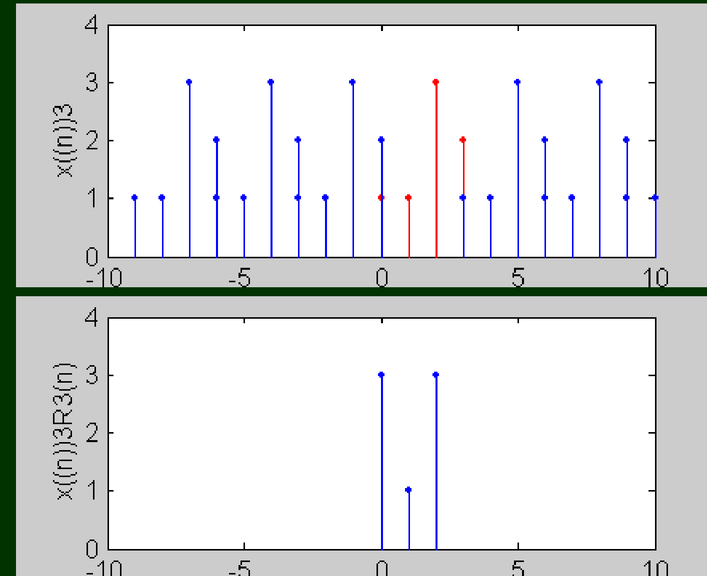


$$x((-n))_6 R_6(n)$$

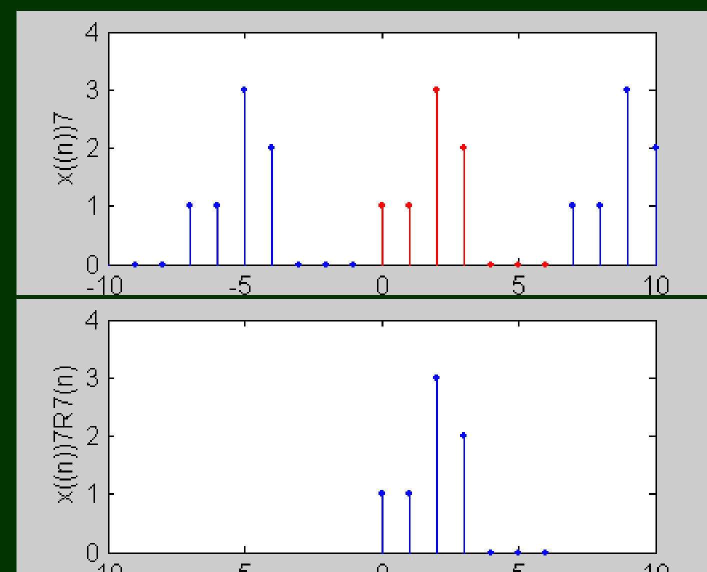




$$x((n-3))_5 R_5(n)$$



$$x((n))_3 R_3(n)$$



$$x((n))_7 R_7(n)$$

5. 试求以下有限长序列的N 点DFT（闭合形式表达式）：

(1) $x(n)=a\cos(\omega_0 n)R_N(n)$

解：$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}R_N(k)$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}a\cos(\omega_0 n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}R_N(k)$$

$$=\frac{1}{2}a\left[\sum_{n=0}^{N-1}(e^{-j\omega_0 n}+e^{j\omega_0 n})e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\right]R_N(k)$$

$$=\frac{1}{2}a\left[\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j(\frac{2\pi}{N}k+\omega_0)n}+\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0)n}\right]R_N(k)$$

$$=\frac{1}{2}a\left[\frac{1-e^{-j\omega_0 N}}{1-e^{-j(\frac{2\pi}{N}k+\omega_0)}}+\frac{1-e^{-j\omega_0 N}}{1-e^{-j(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0)}}\right]R_N(k)$$

$$=\frac{1}{2}a\left[\frac{e^{-j\frac{\omega_0 N}{2}}(e^{j\frac{\omega_0 N}{2}}-e^{-j\frac{\omega_0 N}{2}})}{e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k+\omega_0)}(e^{j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k+\omega_0)}-e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k+\omega_0)})}\right.$$

$$\left.-\frac{e^{-j\frac{\omega_0 N}{2}}(e^{j\frac{\omega_0 N}{2}}-e^{-j\frac{\omega_0 N}{2}})}{e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0)}(e^{j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0)}-e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0)})}\right]R_N(k)$$

$$=\frac{1}{2}a\left[\frac{\sin(\frac{\omega_0 N}{2})}{\sin(\frac{\pi}{N}k+\frac{1}{2}\omega_0)}e^{j\frac{\pi}{N}k-j\frac{N-1}{2}\omega_0}-\frac{\sin(\frac{\omega_0 N}{2})}{\sin(\frac{\pi}{N}k-\frac{1}{2}\omega_0)}e^{j\frac{\pi}{N}k+j\frac{N-1}{2}\omega_0}\right]R_N(k)$$

(2) $x(n)=a^{n}R_{N}(n)$

解： $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_{N}^{nk}R_{N}(k)$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}a^{n}e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}R_{N}(k)$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\left(ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)^{n}R_{N}(k)$$

$$=\frac{1-a^{N}}{1-ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}}R_{N}(k)$$

(3) $x(n)=\delta(n-n_0) \qquad 0<n_0<N$

解：$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}R_N(k)$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}R_N(k)$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} \delta(n-n_0)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}R_N(k)$$

$$=e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0 k}R_N(k)$$

6. 如图P3-6（a）画出了几个周期序列 $\tilde{x}(n)$，这些序列可以表示成傅里叶级数

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j(2\pi/N)nk}$$

（1）哪些序列能够通过选择时间原点使所有的 $\tilde{X}(k)$ 成为实数？

（2）哪些序列能够通过选择时间原点使所有的 $\tilde{X}(k)$（除 $\tilde{X}(0)$ 外）成为虚数？

（3）哪些序列能做到 $\tilde{X}(k)=0$，$k=\pm 2,\pm 4,\pm 6,\ldots$

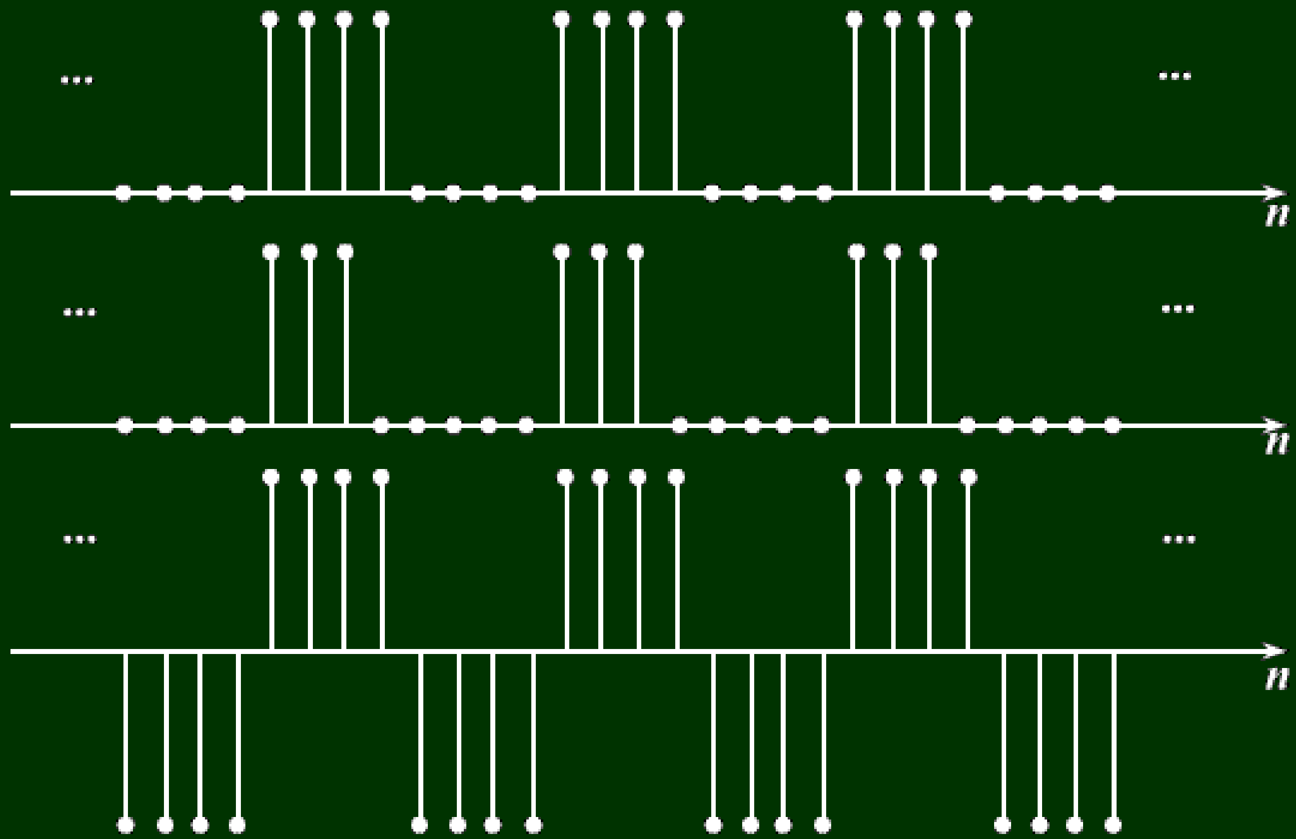


图 $P3\text{-}6(a)$

解:（1）要使 $\tilde{X}(k)$ 为实数，根据DFT的性质:

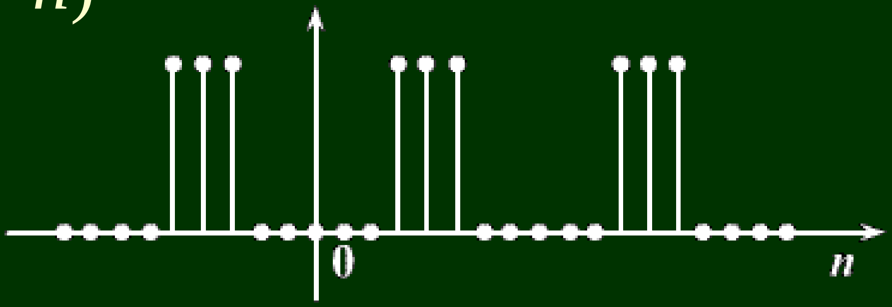
$$\tilde{x}(n)=\tilde{x}_e(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}[\tilde{X}(k)]$$

$$\tilde{x}_o(n)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad j\,\mathrm{Im}[\tilde{X}(k)]=0$$

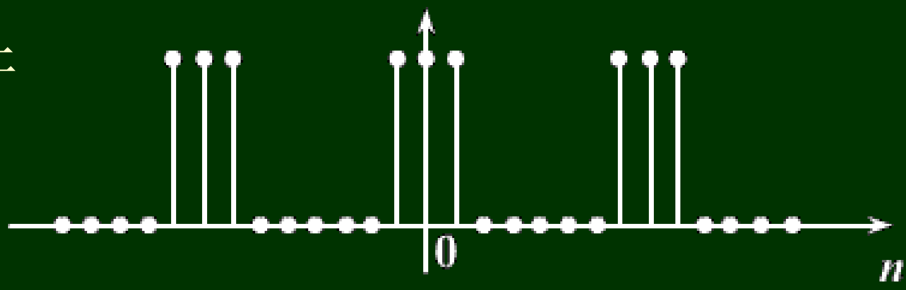
$\tilde{x}(n)$为共轭对称序列，即满足实部偶对称，虚部奇对称（以 $n=0$ 为轴）。

又由图知，$\tilde{x}(n)$为实序列，虚部为零，故 $\tilde{x}(n)$应满足偶对称：$\tilde{x}(n)=\tilde{x}(-n)$

即 $\tilde{x}(n)$是以 $n=0$ 为对称轴的偶对称



故第二个序列满足这个条件



（2）要使 $\tilde{X}(k)$ 为虚数，根据DFT的性质:

$$\tilde{x}_e(n)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}[\tilde{X}(k)]=0$$

$$\tilde{x}(n)=\tilde{x}_o(n) \quad \Longleftrightarrow \quad j\,\mathrm{Im}[\tilde{X}(k)]$$

$\tilde{x}(n)$为共轭反对称序列，即满足实部奇对称，虚部偶对称（以 $n=0$ 为轴）。

又由图知，$\tilde{x}(n)$为实序列，虚部为零，故 $\tilde{x}(n)$应满足奇对称：$\tilde{x}(n)=-\tilde{x}(-n)$

即 $\tilde{x}(n)$是以 $n=0$ 对称轴的奇对称

故这三个序列都不满足这个条件

（3）由于是8点周期序列，其DFS:

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{7}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}$$

序列1:

$$\tilde{X}_1(k)=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}=\frac{1-e^{-j\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}}=\frac{1-(-1)^k}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}}$$

当 $k=\pm2,\pm4,\pm6,\ldots$ 时，$\tilde{X}_1(k)=0$

序列2:

$$\tilde{X}_2(k)=\sum_{n=0}^{2}e^{-j\frac{\pi}{4}nk}=\frac{1-e^{-j\frac{3}{4}\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}}$$

当 $k=\pm2,\pm4,\pm6,\ldots$ 时，$\tilde{X}_1(k)\neq0$

序列3:

$$\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) - \tilde{x}_1(n+4)$$

根据序列移位性质可知

$$\tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k) - e^{-j\pi k}\tilde{X}_1(k) = (1-e^{-j\pi k})\frac{1-(-1)^k}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}}$$

当 $k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$ 时，$\tilde{X}_3(k) = 0$

综上所得，第一个和第三个序列满足

$$\tilde{X}(k) = 0 \qquad k = \pm 2, \pm 4, \ldots$$

9. 设有两个序列

$$x(n)=\begin{cases} x(n), & 0\le n\le 5 \\ 0, & \text{其他}n \end{cases}$$

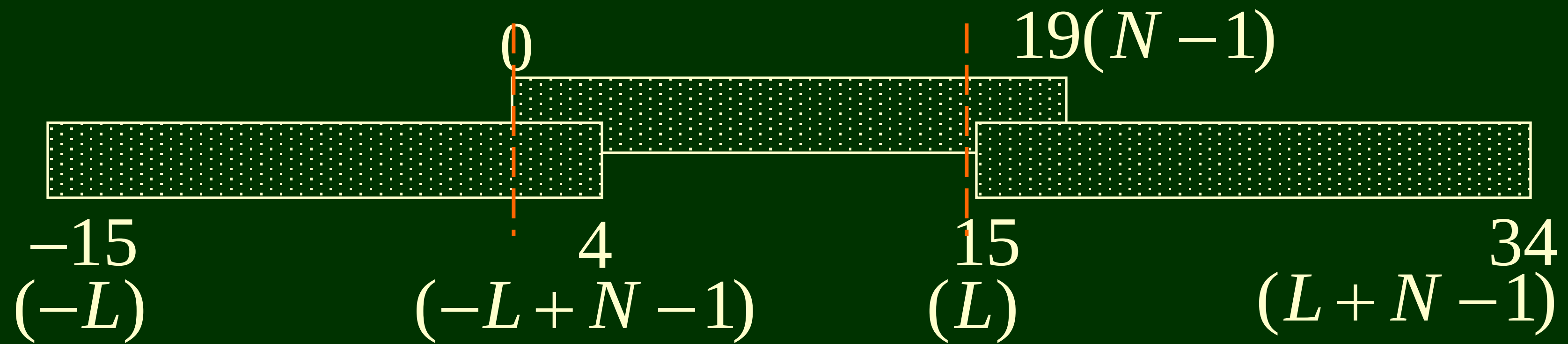
$$y(n)=\begin{cases} y(n), & 0\le n\le 14 \\ 0, & \text{其他}n \end{cases}$$

各作15点的DFT，然后将两个DFT相乘，再求乘积的IDFT，设所得结果为 $f(n)$，问 $f(n)$ 的哪些点（用序号 n 表示）对应于 $x(n)*y(n)$ 应该得到的点。

解：序列 $x(n)$ 的点数为 $N_1=6$，$y(n)$ 的点数为 $N_2=15$，故 $x(n)*y(n)$ 的点数应为

$$N=N_1+N_2-1=20$$

又 $f(n)$ 为 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的15点的圆周卷积，即L＝15。是线性卷积以15为周期周期延拓后取主值序列



混叠点数为N－L＝20－15＝5

$$n=0 \sim n=4(=N-L-1)$$

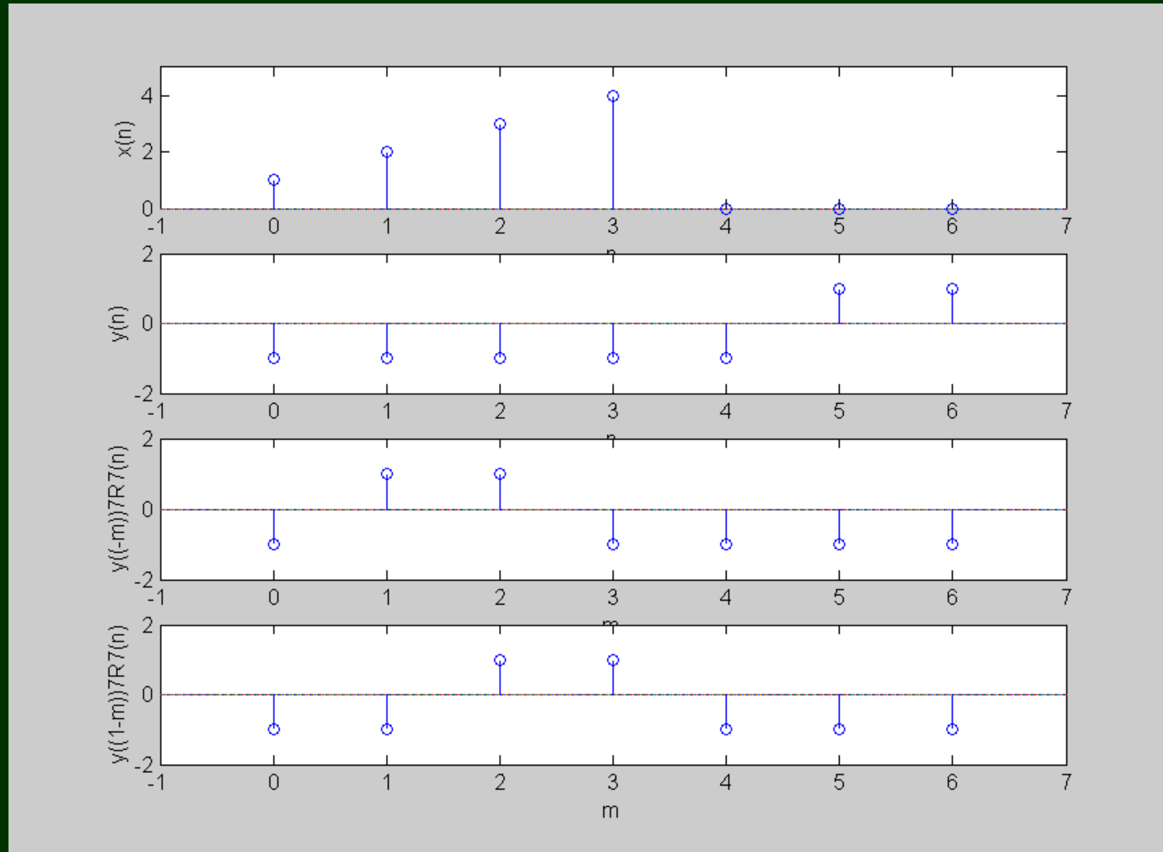
故 $f(n)$ 中只有 $n=5$ 到 $n=14$ 的点对应于 $x(n)*y(n)$ 应该得到的点。

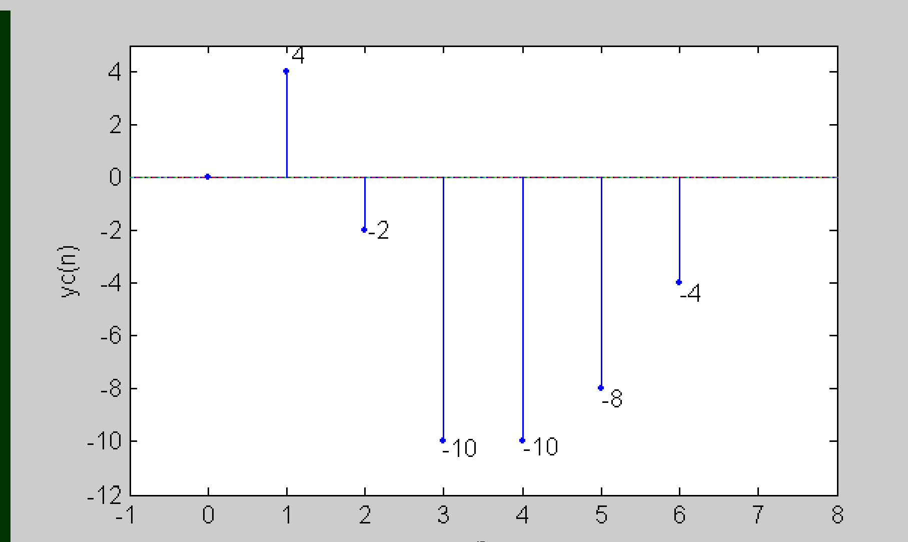
10. 已知两个有限长序列为

$$x(n)=\begin{cases} n+1, & 0\le n\le 3 \\ 0, & 4\le n\le 6 \end{cases}$$

$$y(n)=\begin{cases} -1, & 0\le n\le 4 \\ 1, & 5\le n\le 6 \end{cases}$$

试用作图表示 $x(n)$，$y(n)$ 以及 $f(n)=x(n)$ ⑦ $y(n)$。


x(n)
y(n)
y((-m))7R7(n)
y((1-m))7R7(n)
m


yc(n)
n
4
-2
-10
-10
-8
-4

n/m	…-3 -2 -1	0 1 2 3 4 5 6	7 8	
$x(n/m)$		1 2 3 4 0 0 0		
$y(n/m)$		-1 -1 -1 -1 -1 1 1		
$y((m))_7$	…-1 1 1	-1 -1 -1 -1 -1 1 1	-1 -1	
$y((-m))_7$	…-1 -1 -1	-1 1 1 -1 -1 -1 -1	-1 1	$f(n)$
$y((-m))_7 R_7(n)$		-1 1 1 -1 -1 -1 -1		0
$y((1-m))_7 R_7(n)$		-1 -1 1 1 -1 -1 -1		4
$y((2-m))_7 R_7(n)$		-1 -1 -1 1 1 -1 -1		-2
$y((3-m))_7 R_7(n)$		-1 -1 -1 -1 1 1 -1		-10
$y((4-m))_7 R_7(n)$		-1 -1 -1 -1 -1 1 1		-10
$y((5-m))_7 R_7(n)$		1 -1 -1 -1 -1 -1 1		-8
$y((6-m))_7 R_7(n)$		1 1 -1 -1 -1 -1 -1		-4

11.已知 $x(n)$ 是N点有限长序列，$X(k)=DFT\left[x(n)\right]$。现将长度变成$rN$点的有限长序列 $y(n)$

$$y(n)=\begin{cases} x(n), & 0\le n\le N-1 \\ 0, & N\le n\le rN-1 \end{cases}$$

试求rN点 $DFT\left[y(n)\right]$与 $X(k)$ 的关系。

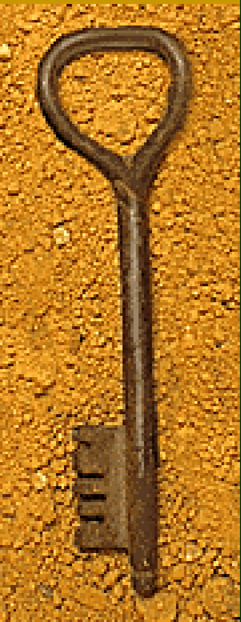
解：由 $X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, 0\le k\le N-1$

得

$$Y(k)=DFT[y(n)]=\sum_{n=0}^{rN-1}y(n)W_{rN}^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_{rN}^{nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{rN}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}n\frac{k}{r}}=X\left(\frac{k}{r}\right)$$

$$k=lr,\ l=0,1,\dots,N-1$$

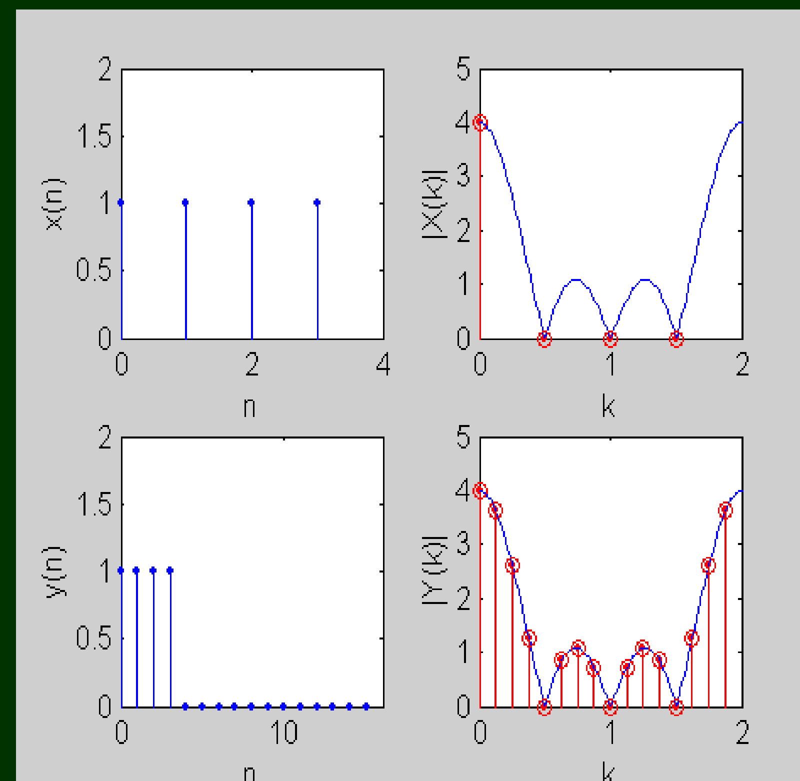


$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\qquad 0\le k\le N-1$$

$$Y(k)=X\left(\frac{k}{r}\right)\qquad k=lr,\ l=0,1,\ldots,N-1$$

相当于频域插值

在一个周期内，$Y(k)$的抽样点数是$X(k)$的r倍($Y(k)$的周期为Nr)，相当于在$X(k)$的每两个值之间插入r-1个其他值（不一定为零），而当k为r的整数l倍时，$Y(k)$与$X(k/r)$相等。



12. 已知$x(n)$是N点的有限长序列，$X(k)=DFT[x(n)]$，现将$x(n)$的每两点之间补进$r-1$个零值点，得到一个rN点的有限长序列$y(n)$

$$y(n)=\begin{cases} x(n/r), & n=ir, i=0,1,\ldots,N-1 \\ 0, & \text{其他}n \end{cases}$$

试求rN点$DFT[y(n)]$与$X(k)$的关系。

解：由 $X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}, 0\le k\le N-1$

得

$$Y(k)=DFT[y(n)]=\sum_{n=0}^{rN-1}y(n)W_{rN}^{nk}$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1}x(ir/r)W_{rN}^{irk}=\sum_{i=0}^{N-1}x(i)W_N^{ik}$$

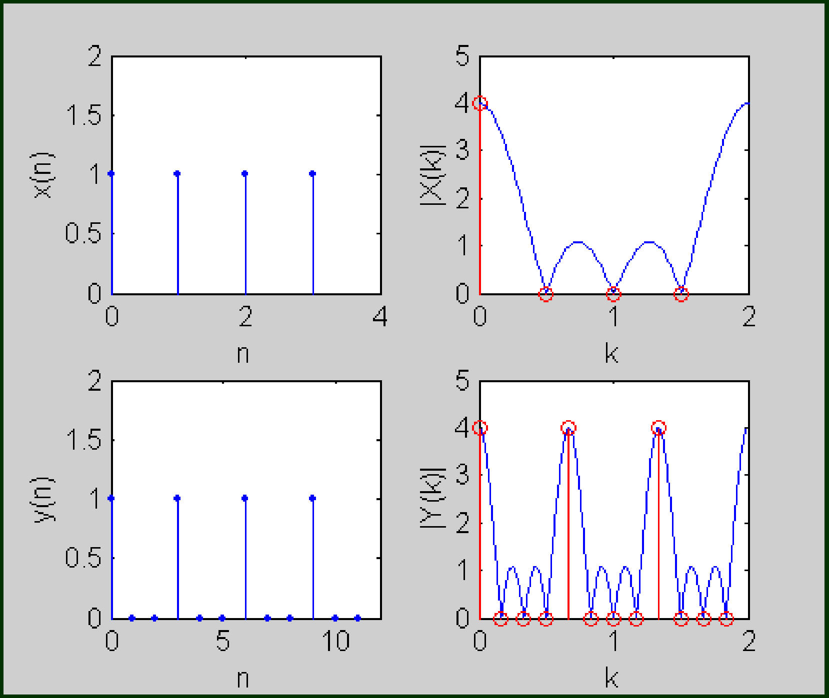
$$0\le k\le rN-1$$

$$\because X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}\qquad 0\le k\le N-1$$

$$Y(k)=\sum_{i=0}^{N-1}x(i)W_N^{ik}\qquad 0\le k\le rN-1$$

故 $Y(k)=X((k))_N R_{rN}(k)$

离散时域每两点间插入 r -1个零值点，相当于频域以N为周期延拓r次，即$Y(k)$周期为rN。



14.设有一谱分析用的信号处理器，抽样点数必须为2的整数幂，假定没有采用任何特殊数据处理措施，要求频率分辨力 $\le 10Hz$ ，如果采用的抽样时间间隔为0.1ms，试确定：（1）最小记录长度；（2）所允许处理的信号的最高频率；（3）在一个记录中的最少点数。

解：（1）因为$T_0 = \dfrac{1}{F_0}$，而$F_0 \le 10Hz$，所以 $T_0 \ge \dfrac{1}{10} s$

即最小记录长度为0.1s。

（2）因为 $f_s = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{0.1} \times 10^3 = 10kHz$，而 $f_s > 2 f_h$

$$f_h < \frac{1}{2} f_s = 5kHz$$

即允许处理的信号的最高频率为 $5kHz$ 。

（3） $N \ge \dfrac{T_0}{T} = \dfrac{0.1}{0.1} \times 10^3 = 1000$

又因N必须为2的整数幂，所以一个记录中的最少点数为 $N = 2^{10} = 1024$

19. 复数有限长序列$f(n)$是由两个实有限长序列$x(n)$和$y(n)\left(0\le n\le N-1\right)$ 组成的，$f(n)=x(n)+jy(n)$且已知$F(k)=DFT\left[f(n)\right]$有以下两种表达式：

$$(1)F(k)=\frac{1-a^N}{1-aW_N^k}+j\frac{1-b^N}{1-bW_N^k}$$

$$(2)F(k)=1+jN$$

其中 a,b 为实数。试用 $F(k)$ 求 $X(k)=DFT\left[x(n)\right]$，$Y(k)=DFT\left[y(n)\right], x(n), y(n)$

$$(1)\ F(k)=\frac{1-a^N}{1-aW_N^k}+j\frac{1-b^N}{1-bW_N^k}$$

解： 由DFT的线性性

$$F(k)=DFT[f(n)]=DFT[x(n)+jy(n)]$$

$$=DFT[x(n)]+jDFT[y(n)]=X(k)+jY(k)$$

由共轭对称性得

$$X(k)=DFT[x(n)]=DFT\{\mathrm{Re}[f(n)]\}$$

$$=F_{ep}(k)\ =\frac{1}{2}\left[F(k)+F^*((N-k))_N\right]R_N(k)$$

$$X(k)=\frac{1}{2}\left[F(k)+F^{*}((N-k))_{N}\right]R_N(k)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1-a^N}{1-aW_N^k}+j\frac{1-b^N}{1-bW_N^k}+\left(\frac{1-a^N}{1-aW_N^{N-k}}+j\frac{1-b^N}{1-bW_N^{N-k}}\right)^{*}\right]R_N(k)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1-a^N}{1-aW_N^k}+j\frac{1-b^N}{1-bW_N^k}+\frac{1-a^N}{1-a\left(W_N^{-k}\right)^{*}}-j\frac{1-b^N}{1-b\left(W_N^{-k}\right)^{*}}\right]R_N(k)$$

$$=\frac{1-a^N}{1-aW_N^k}R_N(k)$$

$$=\frac{1-\left(aW_N^k\right)^N}{1-aW_N^k}R_N(k)=\sum_{n=0}^{N-1}a^nW_N^{kn}R_N(k)$$

$$\therefore x(n)=a^nR_N(n)$$

$$Y(k) = DFT[y(n)] = DFT\{\mathrm{Im}[f(n)]\}$$

$$= \frac{1}{j} F_{op}(k) = \frac{1}{2j}\left[F(k) - F^*((N-k))_N \right] R_N(k)$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1-a^N}{1-aW_N^k} + j\frac{1-b^N}{1-bW_N^k} - \left(\frac{1-a^N}{1-aW_N^{N-k}} + j\frac{1-b^N}{1-bW_N^{N-k}} \right)^* \right] R_N(k)$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1-a^N}{1-aW_N^k} + j\frac{1-b^N}{1-bW_N^k} - \frac{1-a^N}{1-a\left(W_N^{-k}\right)^*} + j\frac{1-b^N}{1-b\left(W_N^{-k}\right)^*} \right] R_N(k)$$

$$= \frac{1-b^N}{1-bW_N^k} R_N(k)$$

$$= \frac{1-\left(bW_N^k\right)^N}{1-bW_N^k} R_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} b^n W_N^{kn} R_N(k)$$

$$\therefore y(n) = b^n R_N(n)$$

$$(2)F(k)=1+jN$$

$$X(k)=DFT[x(n)]=DFT\{\mathrm{Re}[f(n)]\}$$

$$=F_{ep}(k)\ =\frac{1}{2}\left[F(k)+F^{*}((N-k))_{N}\right]R_{N}(k)$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+jN+\left(1+jN\right)^{*}\right]R_{N}(k)$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+jN+1-jN\right]R_{N}(k)$$

$$=R_{N}(k)$$

$$\therefore x(n)=\delta(n)$$

$$Y(k) = DFT[y(n)] = DFT\{\mathrm{Im}[f(n)]\}$$

$$= \frac{1}{j} F_{op}(k) = \frac{1}{2}\left[F(k) - F^{*}((N-k))_N\right] R_N(k)$$

$$= \frac{1}{2j}\left[1 + jN - \left(1 + jN\right)^{*}\right] R_N(k)$$

$$= \frac{1}{2j}\left[1 + jN - 1 + jN\right] R_N(k)$$

$$= N R_N(k)$$

$$\therefore y(n) = N\delta(n)$$