第二章 z变换

- 时域分析方法
- 变换域分析方法：

  连续时间信号与系统

  Laplace变换

  Fourier变换

  离散时间信号与系统

  z变换

  Fourier变换

一、z变换的定义及收敛域

1、z变换的定义

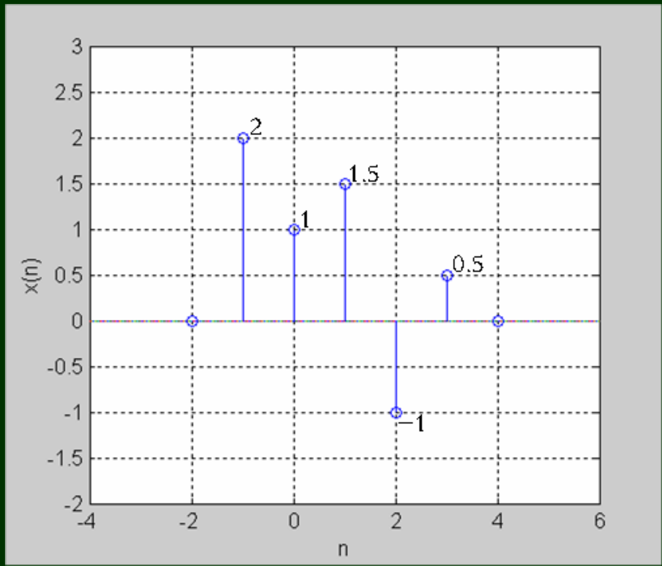
序列x(n)的z变换定义为：

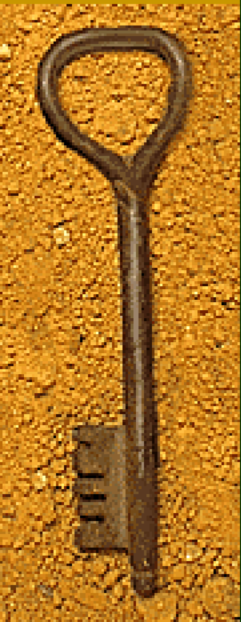
$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

z 是复变量，所在的复平面称为z平面

例：

$$X(z) = 2z + 1 + 1.5z^{-1} - z^{-2} + 0.5z^{-3}$$





2、z变换的收敛域与零极点

- 对于任意给定序列x(n)，使其z变换X(z)收敛的所有z值的集合称为X(z)的收敛域。

- 级数收敛的充要条件是满足绝对可和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)z^{-n}\right| = M < \infty$$

令$X(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$

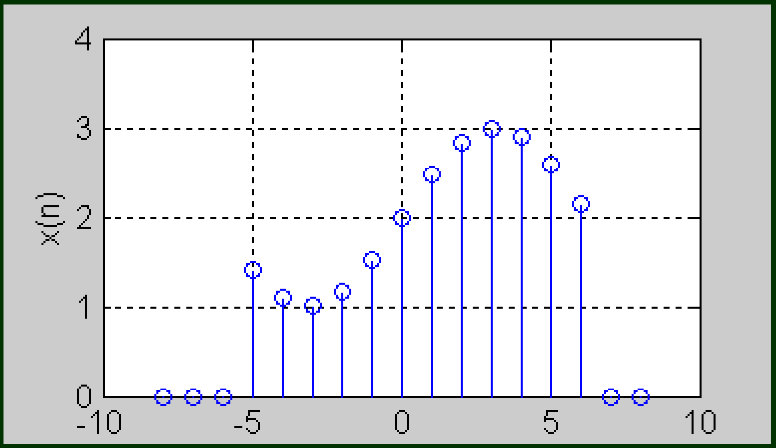
则X(z)的零点：使X(z)=0的点，

即$P(z)=0$和当$Q(z)$阶次高于$P(z)$时 $Q(z)\to\infty$

X(z)的极点：使X(z) $\to\infty$的点，

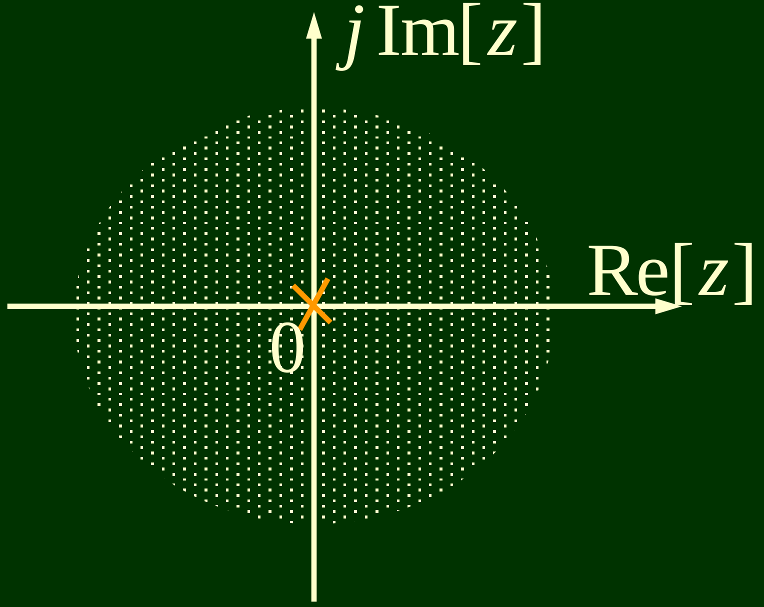
即$Q(z)=0$和当$P(z)$阶次高于$Q(z)$时$P(z)\to\infty$

1）有限长序列



$$x(n)=\begin{cases} x(n) & n_1 \le n \le n_2 \\ 0 & \text{其它}n \end{cases}$$

其Z变换：$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n}$



Roc至少为： $0<|z|<\infty$

$n_1 \le 0 \le n_2$

$$X(z) = x(n_1)z^{-n_1} + x(n_1+1)z^{-(n_1+1)} + \cdots + x(-1)z^{1}$$

$$+x(0)z^{0} + x(1)z^{-1} + \cdots + x(n_2-1)z^{-(n_2-1)} + x(n_2)z^{-n_2}$$

$$\because \quad 0^{-n_2} \to \infty \quad \infty^{-n_1} \to \infty$$

$$\therefore \quad Roc: \quad 0 < |z| < \infty$$

$0 \le n_1 \le n_2$

$$\because \quad 0^{-n} \to \infty \quad \infty^{-n} \to 0$$

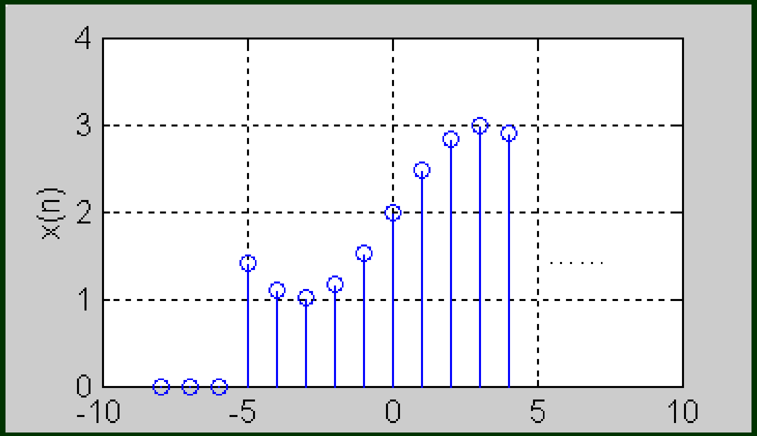
$$\therefore \quad Roc: \quad 0 < |z| \le \infty$$

$n_1 \le n_2 \le 0$

$$\because \quad 0^{-n} \to 0 \quad \infty^{-n} \to \infty$$

$$\therefore \quad Roc: \quad 0 \le |z| < \infty$$

2）右边序列



$$x(n)=\begin{cases} x(n) & n\ge n_1 \\ 0 & n<n_1 \end{cases}$$

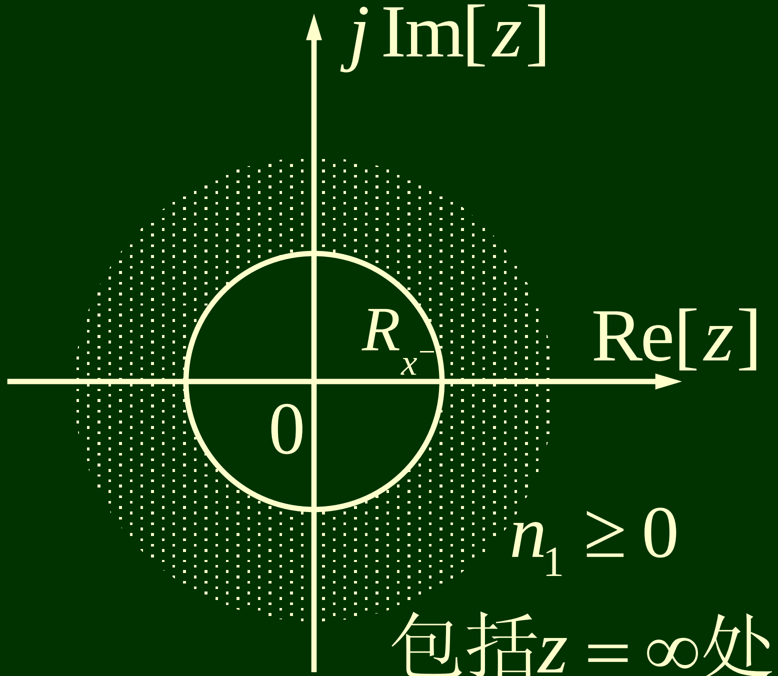
其Z变换：$X(z)=\sum_{n=n_1}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$

前式Roc: $0\le |z| < \infty$

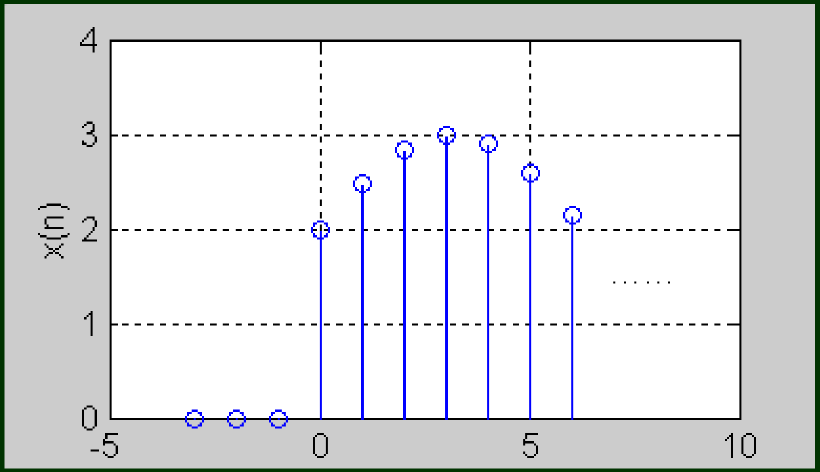
后式Roc: $R_{x^-} < |z| \le \infty$

$\therefore$ 当$n_1 \ge 0$时，$Roc: R_{x^-} < |z| \le \infty$

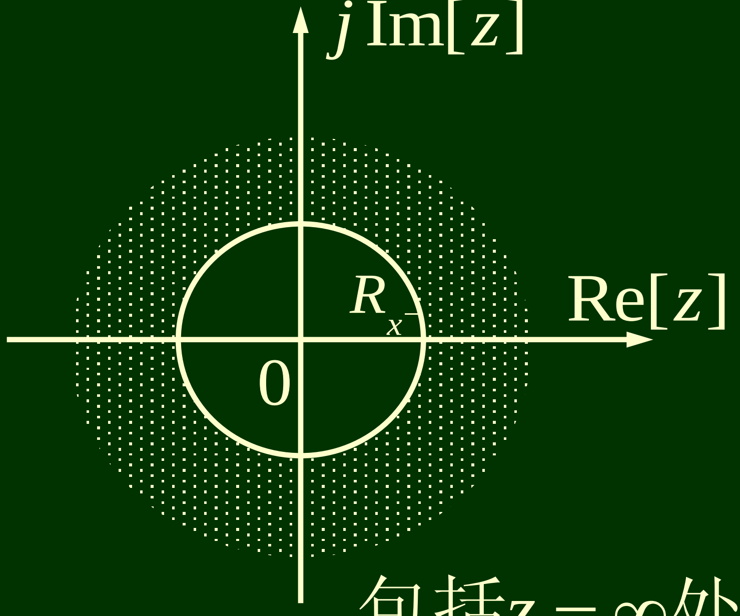
当$n_1 < 0$时，$Roc: R_{x^-} < |z| < \infty$



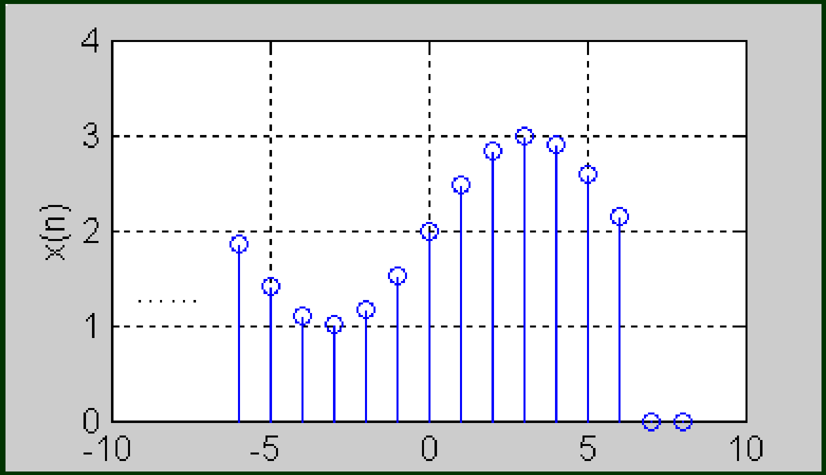
因果序列



- $n_1 \le 0$ 的右边序列，
- Roc: $R_{x^-} < |z| \le \infty$
- 因果序列的z变换必在∞处收敛
- 在∞处收敛的z变换，其序列必为因果序列



3）左边序列



$$x(n)=\begin{cases}0 & n>n_2\\ x(n) & n\le n_2\end{cases}$$

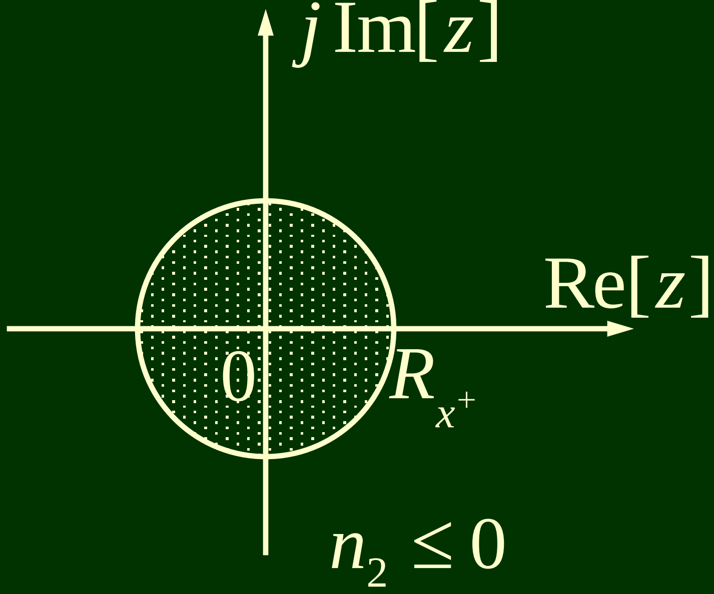
其z变换：$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{n_2}x(n)z^{-n}$

前式Roc: $0\le|z|<R_{x^+}$

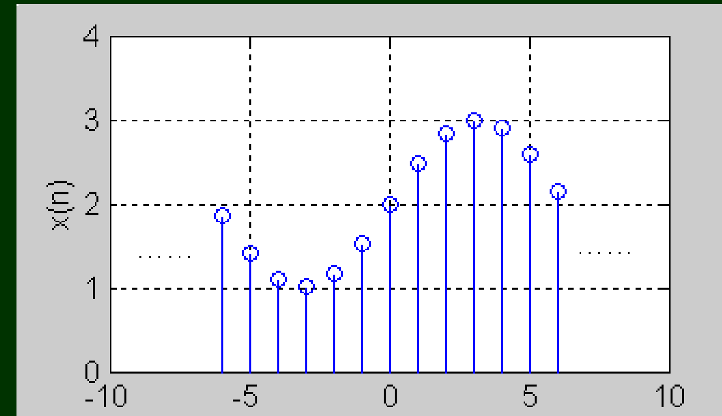
后式Roc: $0<|z|\le\infty$

$\therefore$ 当$n_2\le 0$时，$Roc:0\le|z|<R_{x^+}$

当$n_2>0$时，$Roc:0<|z|<R_{x^+}$



4）双边序列

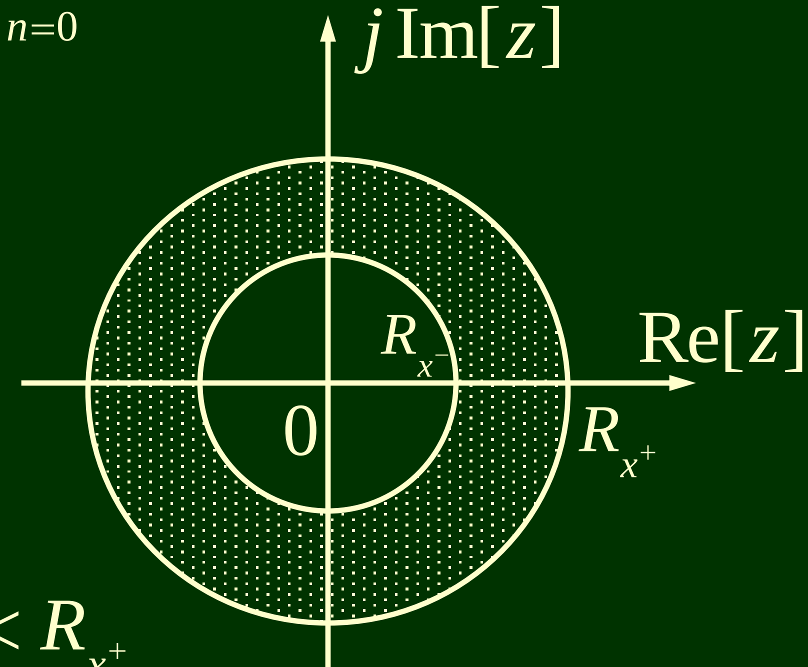


n为任意值时皆有值

其z变换：$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$

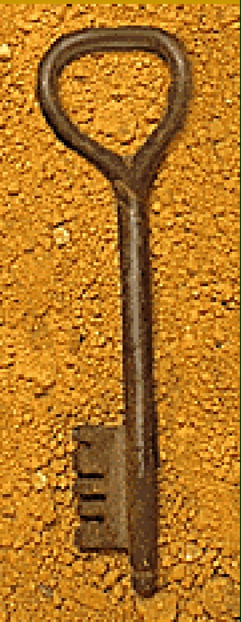
前式Roc: $0\le|z|<R_{x^+}$

后式Roc: $R_{x^-}<|z|\le\infty$



$\therefore$ 当$R_{x^-}\ge R_{x^+}$时，$Roc:\varnothing$

当$R_{x^-}<R_{x^+}$时，$Roc: R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$



例1：求$x(n)=R_N(n)$的z变换及其收敛域

解：$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n)z^{-n}$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} z^{-n}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

$$=\frac{z^N-1}{z^{N-1}(z-1)}$$

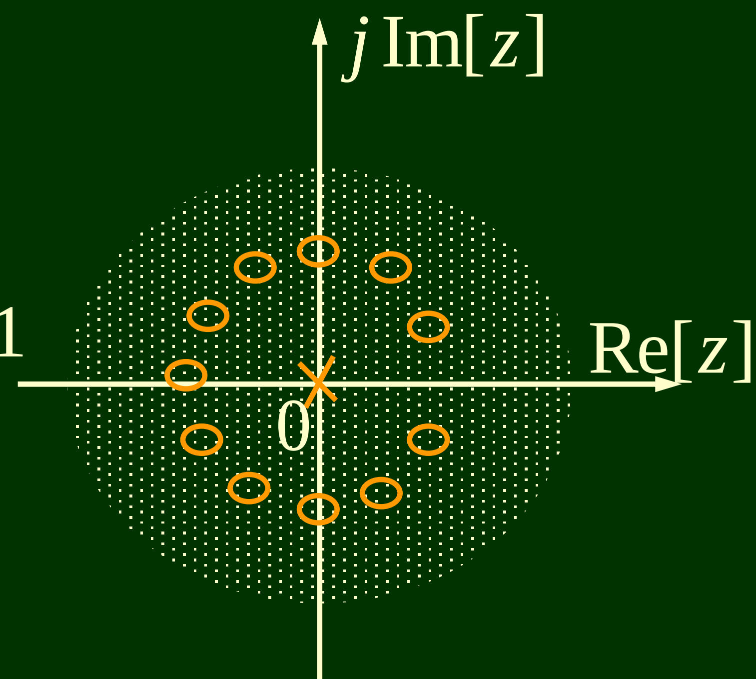
$$\sum_{n=n_1}^{n_2} q^n=\frac{q^{n_1}-q^{n_2+1}}{1-q}$$

$n_2\to\infty$时须满足$|q|<1$

零点：$z=e^{j\frac{2\pi r}{N}}\quad r=1,\dots,N-1$

极点：$z=0$ （$N-1$）阶

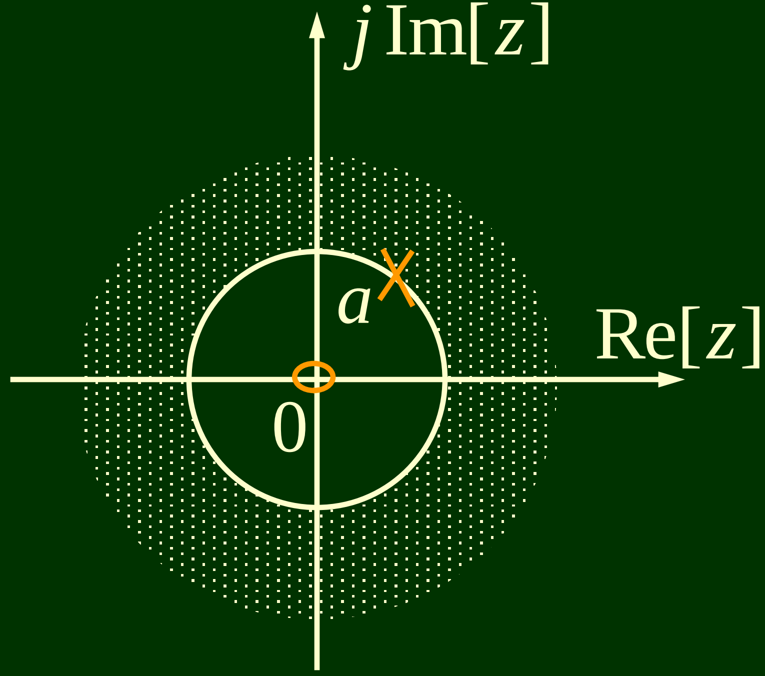
Roc：$0<z\le\infty$



例2：求$x(n)=a^n u(n)$的z变换及其收敛域

解：$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$

$$=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad \text{当}\left|az^{-1}\right|<1\text{时}$$



$Roc: \quad |z|>|a|$

零点：$z=0$

极点：$z=a$

例3: 求$x(n)=-a^{n}u(-n-1)$的z变换及其收敛域

解：$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}-a^{n}u(-n-1)z^{-n}$

$$=\sum_{n=-1}^{-\infty}-a^{n}z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}-a^{-n}z^{n}$$

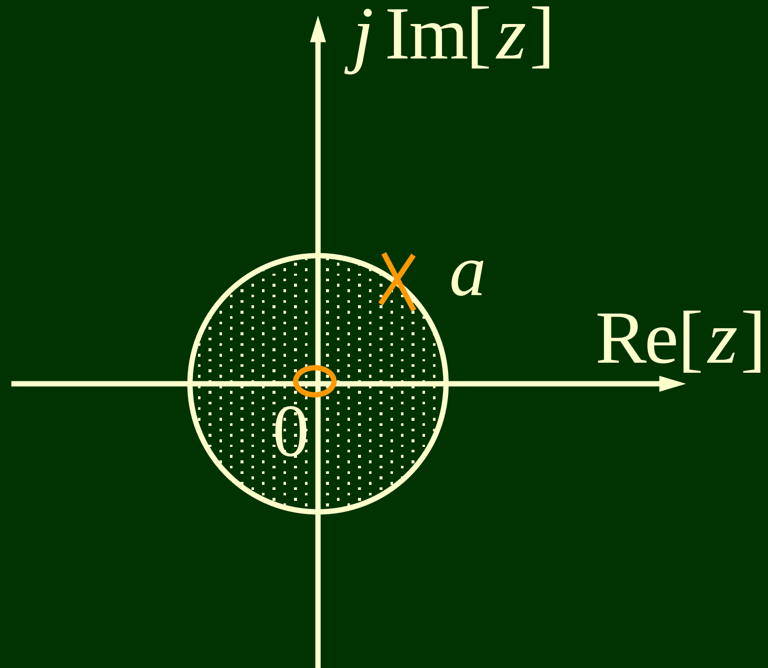
当$\left|a^{-1}z\right|<1$时

$$=\frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z}=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$Roc:\quad |z|<|a|$

零点：$z=0$

极点：$z=a$



例4：求$x(n)=a^{|n|}$，a为实数，求其z变换及其收敛域

解：$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{|n|}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a^{n}z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}$$

$$\because\sum_{n=1}^{\infty}a^{n}z^{n}=\frac{az}{1-az}\qquad |az|<1\Rightarrow|z|<1/|a|$$

$$\because\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}}\qquad |az^{-1}|<1\Rightarrow|z|>|a|$$

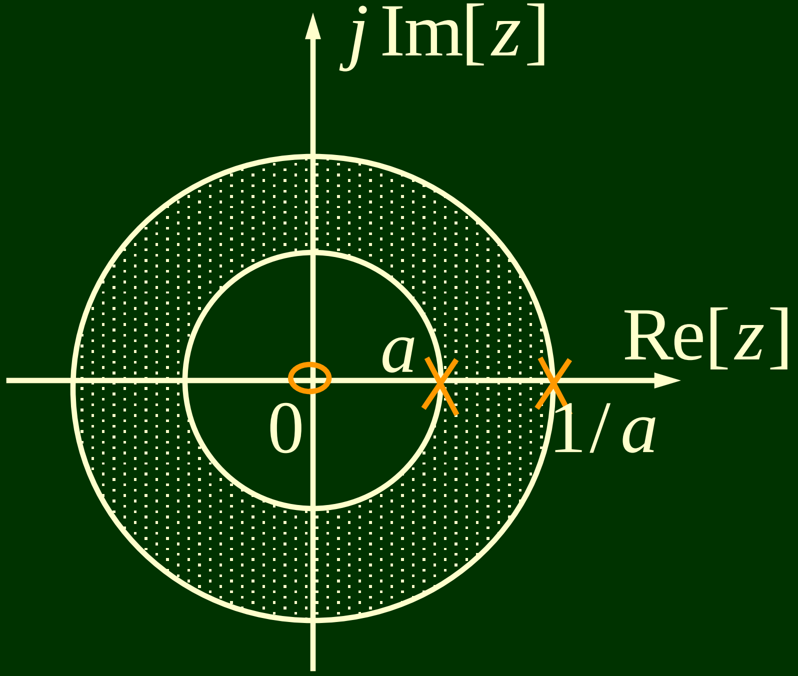
$\therefore$当$|a|\geq 1$时，无公共收敛域，X(z)不存在

当$|a|<1$时，$X(z)=\dfrac{az}{1-az}+\dfrac{1}{1-az^{-1}}=\dfrac{z(1-a^2)}{(1-az)(z-a)}$

$Roc:\ |a|<|z|<1/|a|$

零点：$z=0,\infty$

极点：$z=a,a^{-1}$

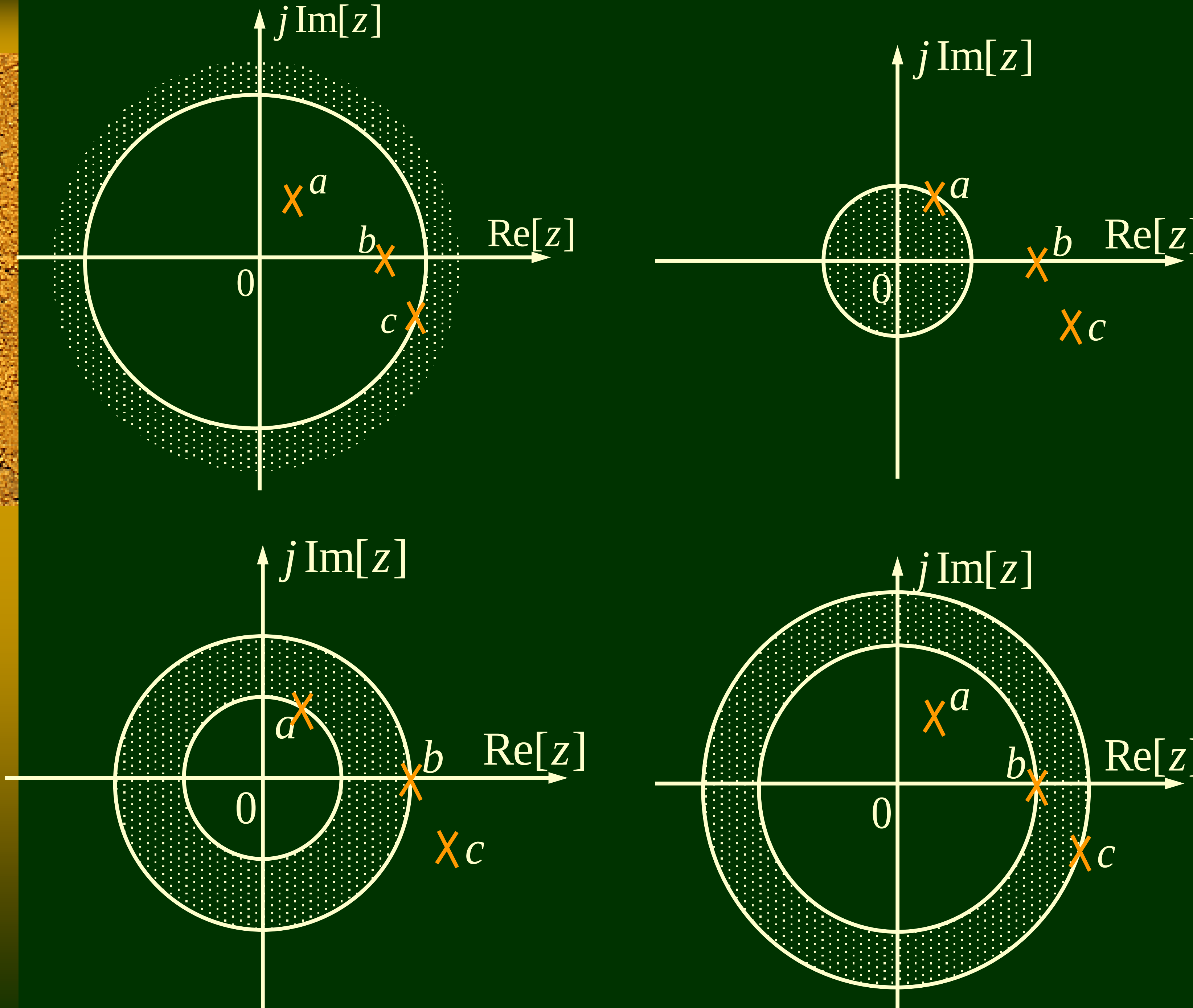


- 给定z变换X(z)不能唯一地确定一个序列，只有同时给出收敛域才能唯一确定。

- X(z)在收敛域内解析，不能有极点，故：

  – **右边序列**的z变换收敛域一定在模最**大**的有限极点所在圆**之外**

  – **左边序列**的z变换收敛域一定在模最**小**的有限极点所在圆**之内**



j Im[z]
Re[z]
0
a
b
c
j Im[z]
Re[z]
0
a
b
c
j Im[z]
Re[z]
0
a
b
c
j Im[z]
Re[z]
0
a
b
c

二、z反变换

z反变换: 从X(z)中还原出原序列x(n)

$$x(n)=IZT[X(z)]$$

$$X(z)=ZT[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

实质：求X(z)幂级数展开式

z反变换的求解方法:

围线积分法（留数法）

部分分式法

长除法

1、围线积分法（留数法）

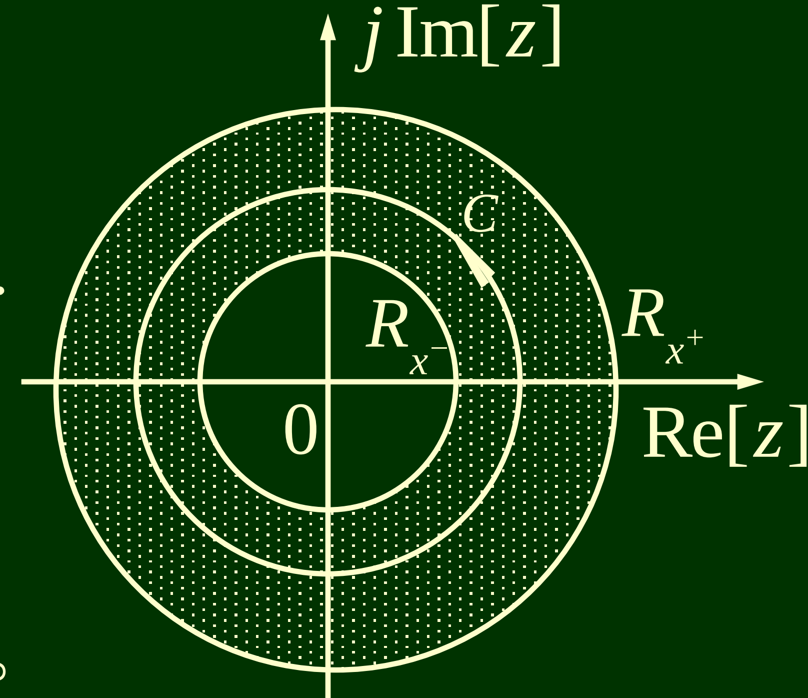
根据复变函数理论，若函数X(z)在环状区域 $R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$，（$R_{x^-} \ge 0, R_{x^+} \le \infty$）内是解析的，则在此区域内X(z)可展开成罗朗级数，即

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^{-n} \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$

而

$$C_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$



其中围线c是在X(z)的环状收敛域内环绕原点的一条反时针方向的闭合单围线。

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}X(z)z^{n-1}dz \quad c\in(R_{x^-},R_{x^+})$$

利用留数定理求围线积分，令

$$F(z)=X(z)z^{n-1}$$

若F(z)在围线c上连续，在c内有K个极点z_k，则：

$$x(n)=\sum_{k}\mathrm{Re}\,s[F(z)]_{z=z_k}$$

若F(z)在c外M个极点z_m，且分母多项式z的阶次比分子多项式高二阶或二阶以上，则：

$$x(n)=-\sum_{m}\mathrm{Re}\,s[F(z)]_{z=z_m}$$

留数的计算公式

单阶极点的留数：

$$\operatorname{Res}[F(z)]_{z=z_r}=[(z-z_r)F(z)]_{z=z_r}$$

例1：$X(z)=\dfrac{z^2}{(4-z)(z-1/4)}$，$1/4<|z|<4$，求其z反变换

解：$x(n)=\dfrac{1}{2\pi j}\oint_c \dfrac{z^2}{(4-z)(z-1/4)}z^{n-1}dz \quad c\in(R_{x^-},R_{x^+})$

其中：$F(z)=\dfrac{z^2}{(4-z)(z-1/4)}z^{n-1}=\dfrac{z^{n+1}}{(4-z)(z-1/4)}$

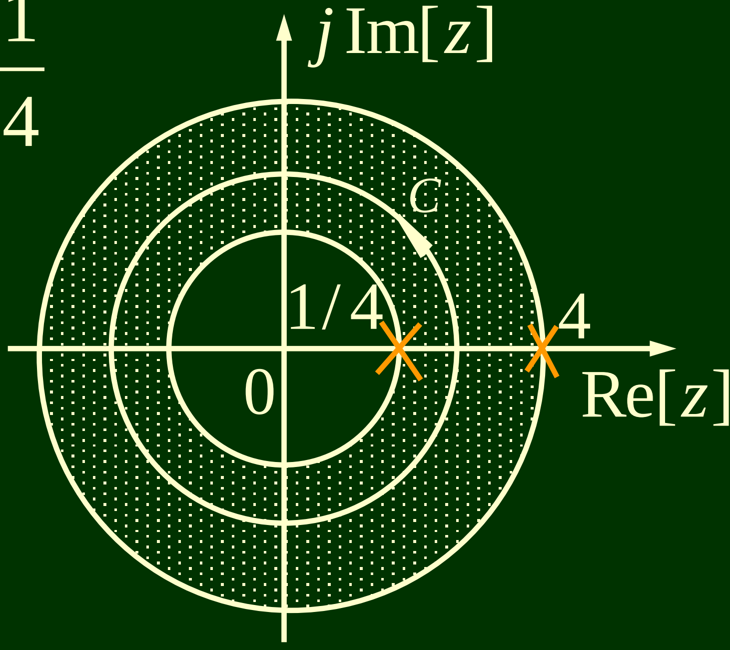
当$n\geq -1$时

$F(z)$在围线c内只有一阶极点$z=\dfrac{1}{4}$

$x(n)=\mathrm{Res}[F(z)]_{z=\frac{1}{4}}$

$=\left[(z-\dfrac{1}{4})\dfrac{z^{n+1}}{(4-z)(z-1/4)}\right]_{z=\frac{1}{4}}$

$=\dfrac{4^{-n}}{15}$



当$n<-1$时

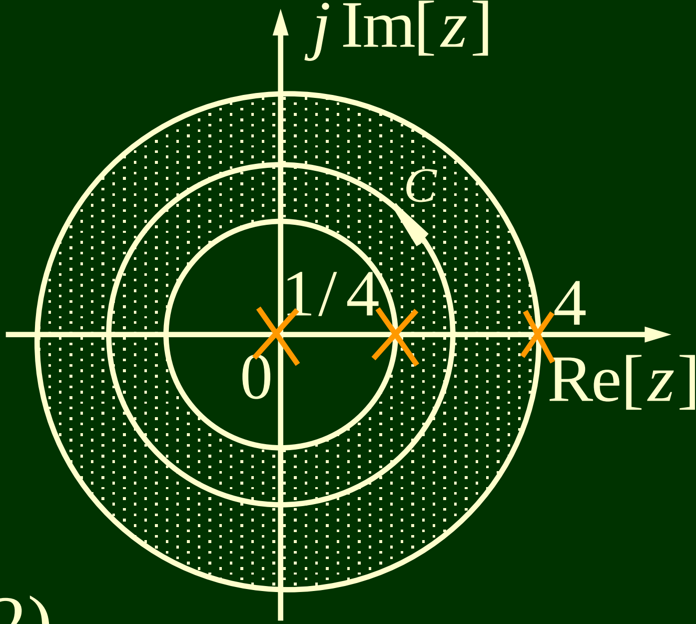
$F(z)$在围线c内有一阶极点$z=\dfrac{1}{4}$和$-(n+1)$阶极点$z=0$

而围线c外只有一阶极点z=4，且F(z)的分母多项式阶次高于分子多项式阶次两次以上

$$x(n)=-\operatorname{Res}[F(z)]_{z=4}$$

$$=-\left[(z-4)\frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-1/4)}\right]_{z=4}$$

$$=\frac{4^{n+2}}{15}$$

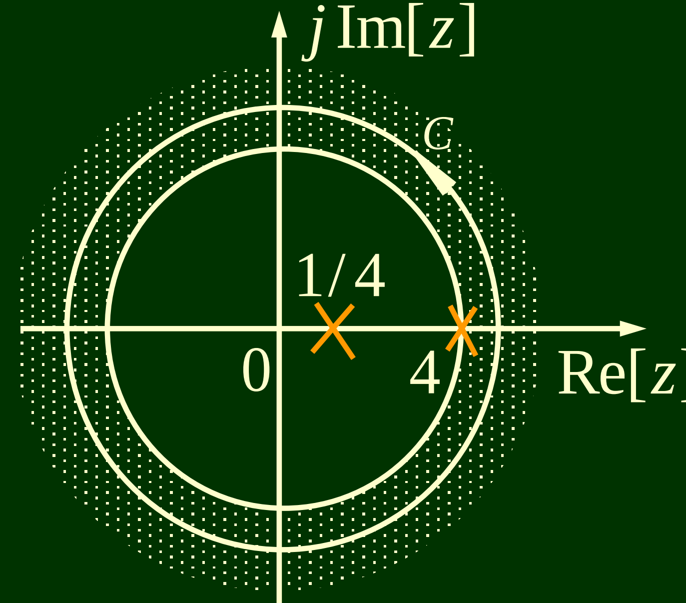


$$\therefore x(n)=\frac{4^{-n}}{15}u(n+1)+\frac{4^{n+2}}{15}u(-n-2)$$

例2：$X(z)=\dfrac{z^2}{(4-z)(z-1/4)}$，$|z|>4$，求其z反变换

解：$\because$ 收敛域是圆的外部

$\therefore x(n)$是右边序列



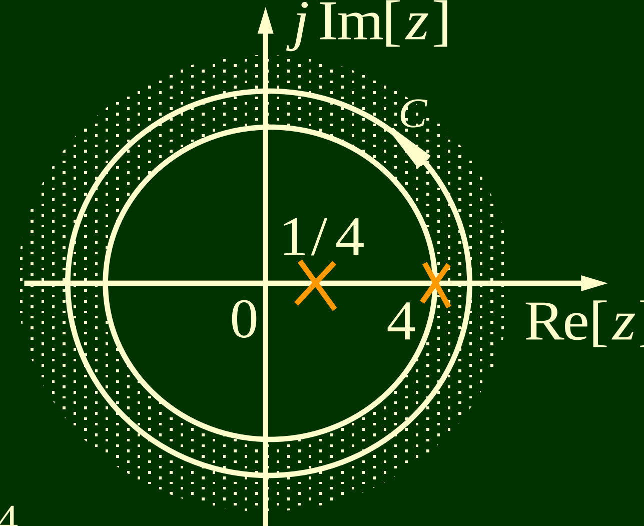
又 $\lim\limits_{z\to\infty} X(z)=-1$，

即X(z)在z=∞处收敛

$\therefore x(n)$是一个因果序列，即$x(n)=0$，$n<0$

同样当$n<0$时，由$F(z)=\dfrac{z^{n+1}}{(4-z)(z-1/4)}$在c外无极点，且分母阶次比分子阶次高两阶以上，由围线外极点留数为0可得$x(n)=0$

当$n \ge 0$时 $F(z) = \dfrac{z^{n+1}}{(4-z)(z-1/4)}$



在围线c内有一阶极点$z = 4,\ \dfrac{1}{4}$

$$x(n) = \mathrm{Res}[F(z)]_{z=4} + \mathrm{Res}[F(z)]_{z=1/4}$$

$$= \left[(z-4)\frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-\frac{1}{4})}\right]_{z=4} + \left[(z-\frac{1}{4})\frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-\frac{1}{4})}\right]_{z=\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{15}(4^{-n} - 4^{n+2})$$

$$\therefore x(n) = \frac{1}{15}(4^{-n} - 4^{n+2})u(n)$$

思考：n=0,1时，F(z)在围线c外也无极点，为何 $x(n) \ne 0$

例3：$X(z)=\dfrac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}$, $|a|<1$，求z反变换

解：$x(n)=\dfrac{1}{2\pi j}\oint_c \dfrac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}z^{n-1}dz$

其中：$F(z)=\dfrac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}z^{n-1}=\dfrac{(a^2-1)z^n}{a(z-a^{-1})(z-a)}$

c为X(z)收敛域内闭合围线

而题中未给出收敛域，根据$X(z)$的极点$z=a,a^{-1}$

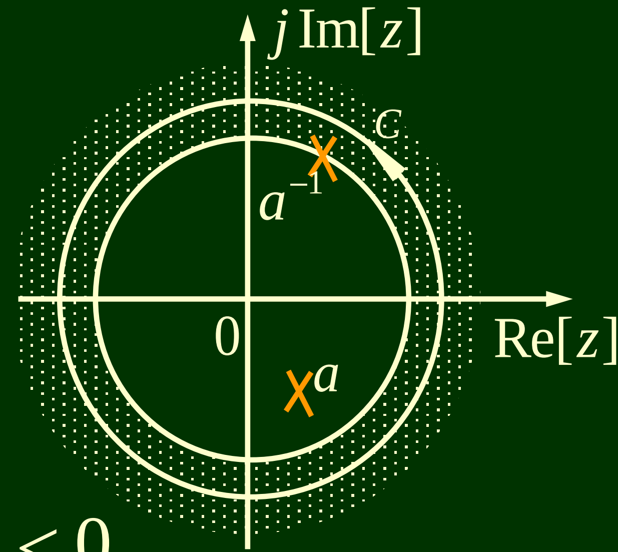
有三种可能的收敛域：

1) $|z|>|a^{-1}|$

2) $|z|<|a|$

3) $|a|<|z|<|a^{-1}|$

1) $|z|>|a^{-1}|$



$\because$ 收敛域是圆的外部

又 $\lim\limits_{z\to\infty} X(z)=0,$

$\therefore x(n)$是因果序列，即$x(n)=0$，$n<0$

当$n\ge 0$时　$F(z)$在围线c内有一阶极点$z=a$，a^{-1}

$$x(n)=\mathrm{Re}\,s[F(z)]_{z=a}+\mathrm{Re}\,s[F(z)]_{z=a^{-1}}$$

$$=\left[(z-a)\frac{(a^2-1)z^n}{a(z-a^{-1})(z-a)}\right]_{z=a}+\left[(z-a^{-1})\frac{(a^2-1)z^n}{a(z-a^{-1})(z-a)}\right]_{z=a^{-1}}$$

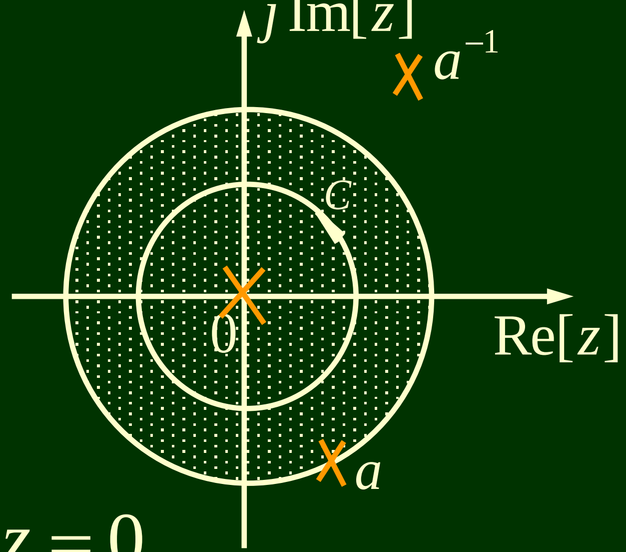
$$=a^n-a^{-n}$$

$$\therefore x(n)=(a^n-a^{-n})u(n)$$

2) $|z|<|a|$

当$n \geq 0$时 $F(z)$在围线c内无极点

故$x(n)=0$



当$n<0$时 $F(z)$在c内有$-n$阶极点$z=0$

在c外有一阶极点$z=a, a^{-1}$,

且分母阶次比分子高两阶以上

$$x(n)=-\mathrm{Res}[F(z)]_{z=a}-\mathrm{Res}[F(z)]_{z=a^{-1}}$$

$$=-a^{n}-(-a^{-n})=a^{-n}-a^{n}$$

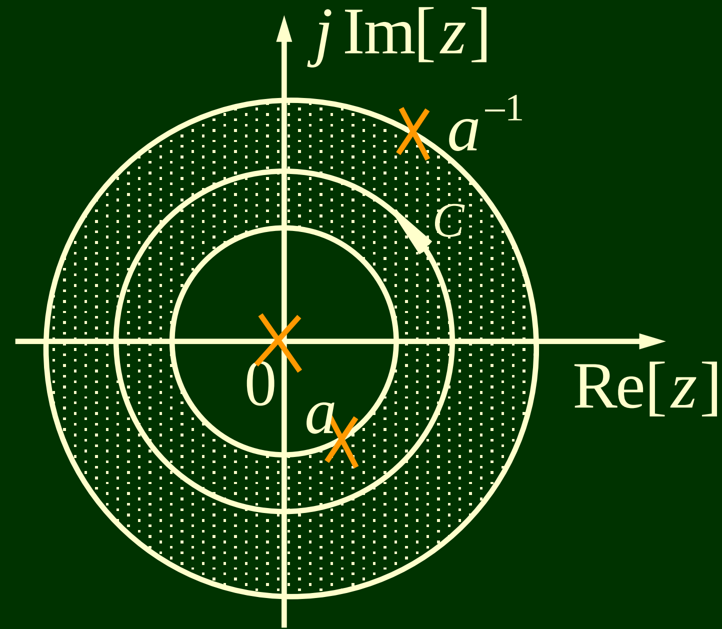
$$\therefore x(n)=(a^{-n}-a^{n})u(-n-1)$$

3) $|a|<|z|<|a^{-1}|$

当$n \ge 0$时

$F(z)$在c内有一阶极点$z=a$

$$x(n)=\mathrm{Res}[F(z)]_{z=a}=a^{n}$$



当$n<0$时

$F(z)$在c内有一阶极点$z=a$和$-n$阶极点$z=0$

在c外有一阶极点$z=a^{-1}$,

且分母阶次比分子高两阶以上

$$x(n)=-\mathrm{Res}[F(z)]_{z=a^{-1}}=a^{-n}$$

$$\therefore x(n)=a^{n}u(n)+a^{-n}u(-n-1)=a^{|n|}$$

2、部分分式展开法

X(z)是z的有理分式，可分解成部分分式：

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=X_1(z)+X_2(z)+\cdots+X_K(z)$$

对各部分分式求z反变换：

$$x(n)=IZT[X(z)]$$

$$=IZT[X_1(z)]+IZT[X_2(z)]+\cdots+IZT[X_K(z)]$$

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}}$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{M-N} B_n z^{-n}+\sum_{k=1}^{N-r}\frac{A_k}{1-z_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{r}\frac{C_k}{[1-z_i z^{-1}]^k}$$

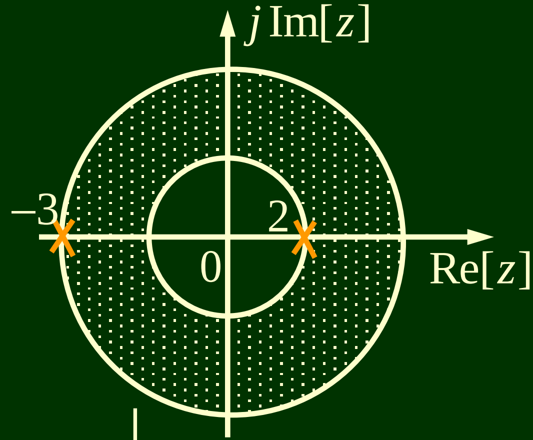
用留数定理求系数：

$$A_k=\mathrm{Res}\left[\frac{X(z)}{z}\right]_{z=z_k}\qquad k=1,2,\cdots,N-r$$

例：$X(z)=\dfrac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}$，$2<|z|<3$，求z反变换

解：$X(z)=\dfrac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}=\dfrac{5z}{z^2+z-6}=\dfrac{5z}{(z-2)(z+3)}$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{5}{(z-2)(z+3)}=\frac{A_1}{z-2}+\frac{A_2}{z+3}$$



$$A_1=Res\left[\frac{X(z)}{z}\right]_{z=2}=(z-2)\frac{5}{(z-2)(z+3)}\bigg|_{z=2}=1$$

$$A_2=Res\left[\frac{X(z)}{z}\right]_{z=-3}=(z+3)\frac{5}{(z-2)(z+3)}\bigg|_{z=-3}=-1$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{z-2}+\frac{-1}{z+3}$$

$$X(z)=\frac{z}{z-2}+\frac{-z}{z+3}=\frac{1}{1-2z^{-1}}+\frac{-1}{1+3z^{-1}}$$

$$\because 2<|z|<3$$

$$ZT[a^n u(n)]=\frac{1}{1-az^{-1}}\quad |z|>|a|$$

$$ZT[a^n u(-n-1)]=\frac{-1}{1-az^{-1}}\quad |z|<|a|$$

$$\frac{1}{1-2z^{-1}}\xrightarrow{|z|>2}2^n u(n)$$

$$\frac{-1}{1+3z^{-1}}\xrightarrow{|z|<3}(-3)^n u(-n-1)$$

$$\therefore x(n)=2^n u(n)+(-3)^n u(-n-1)$$

3、幂级数展开法（长除法）

把X(z)展开成幂级数

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$=\cdots+x(-1)z^{1}+x(0)z^{0}+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$

级数的系数就是序列x(n)

根据收敛域判断x(n)的性质，在展开成相应的z的幂级数

	x(n)	将X(z)展成z的	X(z)的分子分母按z的
$\lvert z\rvert > R_{x^-}$	因果序列	负幂级数	降幂排列
$\lvert z\rvert < R_{x^+}$	左边序列	正幂级数	升幂排列

例：$X(z)=\dfrac{1}{(1-az^{-1})}$，$|z|>|a|$，求z反变换

解： 由Roc判定x(n)是因果序列，用长除法展成z的负幂级数

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & 1+az^{-1}+a^2z^{-2}+a^3z^{-3}+\cdots \\
1-az^{-1} \big) & 1 \\
 & \underline{1-az^{-1}} \\
 & \quad az^{-1} \\
 & \quad \underline{az^{-1}-a^2z^{-2}} \\
 & \qquad a^2z^{-2} \\
 & \qquad \underline{a^2z^{-2}-a^3z^{-3}} \\
 & \qquad\qquad a^3z^{-3} \\
 & \qquad\qquad \vdots
\end{array}
$$

$$X(z)=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+a^3z^{-3}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}$$

$$\therefore x(n)=a^n u(n)$$

例：$X(z)=\dfrac{1}{(1-az^{-1})}$, $|z|<|a|$，求z反变换

解：由Roc判定
x(n)是左边序列，
用长除法展成z
的正幂级数

$$
\begin{array}{r}
-a^{-1}z-a^{-2}z^{2}-a^{-3}z^{3}-\cdots \\
-az^{-1}+1\overline{\smash{)}\,1\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\underline{1-a^{-1}z\qquad\qquad\qquad} \\
a^{-1}z\qquad\qquad\qquad \\
\underline{a^{-1}z-a^{-2}z^{2}\qquad} \\
a^{-2}z^{2}\qquad \\
\vdots\qquad\quad
\end{array}
$$

$$X(z)=-[a^{-1}z+a^{-2}z^{2}+a^{-3}z^{3}+\cdots]$$

$$=-\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{n}z^{-n}$$

$$\therefore x(n)=-a^{n}u(-n-1)$$

例：$X(z)=\dfrac{z^2}{(4-z)(z-1/4)}$, $1/4<|z|<4$，求z反变换

解：X(z)的Roc为环状，故x(n)是双边序列

极点z=1/4对应右边序列，极点z=4对应左边序列

先把X(z)展成部分分式

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z}{(4-z)(z-1/4)}=\frac{\frac{16}{15}}{4-z}+\frac{\frac{1}{15}}{z-1/4}$$

$$X(z)=\frac{1}{15}\left(\frac{16z}{4-z}+\frac{z}{z-1/4}\right)$$

$$\begin{array}{r@{}l} & 4z+z^2+\frac{1}{4}z^3+\cdots \\ 4-z\,\big) & 16z \\ & \underline{16z-4z^2} \\ & \qquad 4z^2 \\ & \qquad \underline{4z^2-z^3} \\ & \qquad\qquad z^3 \\ & \qquad\qquad \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{r@{}l} & 1+\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2}+\cdots \\ z-\frac{1}{4}\,\big) & z \\ & \underline{z-\frac{1}{4}} \\ & \quad \frac{1}{4} \\ & \quad \underline{\frac{1}{4}-\frac{1}{16}z^{-1}} \\ & \qquad \frac{1}{16}z^{-1} \\ & \qquad \vdots \end{array}$$

$$X(z) = \frac{1}{15}\left(\cdots + \frac{1}{16} z^{-2} + \frac{1}{4} z^{-1} + 1 + 4z + z^{2} + \frac{1}{4} z^{3} + \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{15}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} z^{-n} + \sum_{n=-1}^{-\infty} 4^{n+2} z^{-n} \right]$$

$$\therefore x(n) = \frac{4^{-n}}{15} u(n) + \frac{4^{n+2}}{15} u(-n-1)$$

三、z变换的基本性质与定理

1、线性

若 $ZT[x(n)] = X(z) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

$ZT[y(n)] = Y(z) \quad R_{y^-} < |z| < R_{y^+}$

则 $ZT[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z)$

a，b为任意常数

$\max(R_{x^-}, R_{y^-}) = R_- < |z| < R_+ = \min(R_{x^+}, R_{y^+})$

2、序列的移位

若 $ZT[x(n)] = X(z) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

则 $ZT[x(n-m)] = z^{-m} X(z) \quad m$为任意整数

$$R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$

例：$x(n)=u(n)-u(n-3)$，求$X(z)$

解：$X(z)=ZT[u(n)-u(n-3)]$

$$=ZT[u(n)]-ZT[u(n-3)]$$

$$=\frac{z}{z-1}-z^{-3}\frac{z}{z-1}\quad |z|>1$$

$$=\frac{z^3-1}{z^2(z-1)}$$

$$=\frac{z^2+z+1}{z^2}\quad |z|>0$$

3、乘以指数序列

若 $ZT[x(n)] = X(z) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

则 $ZT[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right) \qquad a$为任意常数

$$|a|R_{x^-} < |z| < |a|R_{x^+}$$

证：$ZT[a^n x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$R_{x^-} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x^+} \Rightarrow |a|R_{x^-} < |z| < |a|R_{x^+}$$

4、序列的线性加权（z域求导数）

若 $ZT[x(n)] = X(z) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

则 $ZT[nx(n)] = -z \cdot \dfrac{d}{dz} X(z) \qquad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

同理：$ZT[n^2 x(n)] = ZT[n \cdot nx(n)]$

$$= -z \frac{d}{dz}\{ZT[nx(n)]\}$$

$$= -z \frac{d}{dz}\left[-z \frac{dX(z)}{dz}\right]$$

证：$X(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$

$$\frac{dX(z)}{dz}=\frac{d}{dz}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\frac{d}{dz}(z^{-n})$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(-n)z^{-n-1}=-z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx(n)z^{-n}$$

$$=-z^{-1}ZT[nx(n)]$$

$$\therefore \quad ZT[nx(n)]=-z\frac{dX(z)}{dz} \qquad R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$$

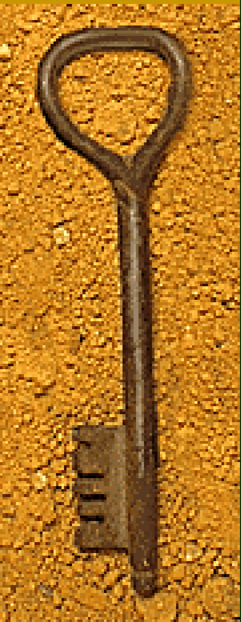
5、共轭序列

若 $ZT[x(n)] = X(z) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

则 $ZT[x^*(n)] = X^*(z^*) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

证：$$ZT[x^*(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)(z^*)^{-n}]^*$$

$$= X^*(z^*) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$



6、翻褶序列

若 $ZT[x(n)] = X(z) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

则 $ZT[x(-n)] = X\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \frac{1}{R_{x^+}} < |z| < \frac{1}{R_{x^-}}$

证：$ZT[x(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{n}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^{-1})^{-n} = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$R_{x^-} < \left|\frac{1}{z}\right| < R_{x^+} \Rightarrow \frac{1}{R_{x^+}} < |z| < \frac{1}{R_{x^-}}$$

7、初值定理

对于因果序列$x(n)$，有

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x(0)$$

证：因为x(n)为因果序列

$$\therefore \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$= x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots$$

$$\therefore \quad \lim_{z\to\infty} X(z) = x(0)$$

8、终值定理

设x(n)为因果序列，且X(z)=ZT[x(n)]的极点处于单位圆以内（单位圆上最多在z=1处可有一阶极点），则：

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$$

$$x(\infty) = \lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)] = \mathrm{Re}\, s[X(z)]_{z=1}$$

证：利用序列的移位，得

$$ZT[x(n+1)-x(n)]=(z-1)X(z)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n+1)-x(n)]z^{-n}=\sum_{n=-1}^{\infty}[x(n+1)-x(n)]z^{-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=-1}^{n}[x(m+1)-x(m)]z^{-m}$$

$$\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=-1}^{n}[x(m+1)-x(m)]\cdot 1^{-m}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{[x(0)-0]+[x(1)-x(0)]+[x(2)-x(1)]+\cdots$$

$$+[x(n+1)-x(n)]\}=\lim_{n\to\infty}[x(n+1)]=\lim_{n\to\infty}x(n)$$

$$\therefore\quad x(\infty)=\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]=\mathrm{Re}\,s[X(z)]_{z=1}$$

9、有限项累加特性

设x(n)为因果序列，即x(n)=0，n<0

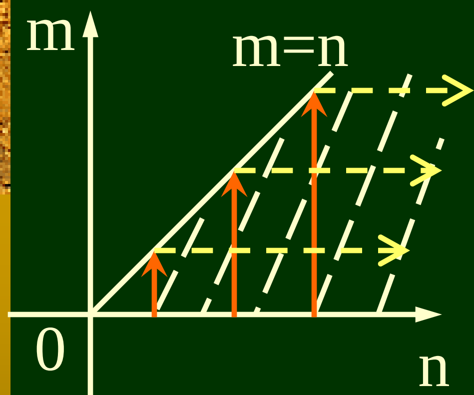
$$ZT[x(n)] = X(z) \quad |z| > R_{x^-}$$

则

$$ZT\left[\sum_{m=0}^{n} x(m)\right] = \frac{z}{z-1} X(z) \quad |z| > \max\left(R_{x^-}, 1\right)$$

证：　$\because x(n)$为因果序列

$$\therefore \quad ZT\left[\sum_{m=0}^{n} x(m)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{n} x(m)\right] z^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) \sum_{n=m}^{\infty} z^{-n}$$



$$= \sum_{m=0}^{\infty} x(m) \frac{z^{-m}}{1-z^{-1}} \qquad \left|z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}} \sum_{m=0}^{\infty} x(m) z^{-m}$$

$$= \frac{z}{z-1} X(z) \qquad |z| > R_{x^-}$$

$$|z| > \max\left(R_{x^-}, 1\right)$$

10、序列的卷积和（时域卷积和）

设y(n)为x(n)与h(n)的卷积和：

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

且

$$X(z)=ZT[x(n)]\quad R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$$

$$H(z)=ZT[h(n)]\quad R_{h^-}<|z|<R_{h^+}$$

则 $Y(z)=ZT[y(n)]=X(z)\cdot H(z)$

$$\max(R_{x^-},R_{h^-})<|z|<\min(R_{x^+},R_{h^+})$$

证：$ZT[x(n)*h(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)*h(n)]z^{-n}$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)z^{-n}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)[\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n-m)z^{-n}]$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)z^{-m}H(z)$$

$$=H(z)X(z)$$

$$\max\left(R_{x^-},R_{h^-}\right)<|z|<\min\left(R_{x^+},R_{h^+}\right)$$

例：已知LSI系统的单位抽样响应：

$$h(n)=b^n u(n)-ab^{n-1}u(n-1),$$

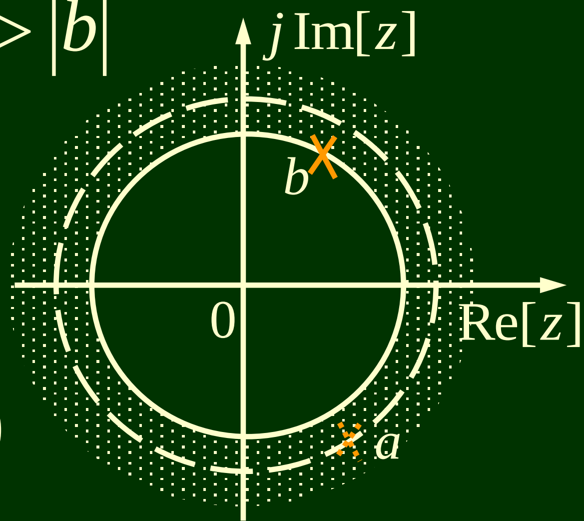
求系统输入$x(n)=a^n u(n)$的响应。

解：$X(z)=ZT[x(n)]=ZT[a^n u(n)]=\dfrac{z}{z-a}\qquad |z|>|a|$

$$H(z)=ZT[h(n)]=ZT[b^n u(n)-ab^{n-1}u(n-1)]$$

$$=ZT[b^n u(n)]-aZT[b^{n-1}u(n-1)]$$

$$=\frac{z}{z-b}-az^{-1}\frac{z}{z-b}=\frac{z-a}{z-b}\qquad |z|>|b|$$



$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{z}{z-b}\qquad |z|>|b|$$

$$y(n)=x(n)*h(n)=IZT[Y(z)]=b^n u(n)$$

四、序列的z变换与连续时间信号的Laplace变换、Fourier变换的关系

序列的z变换：$x(n) \to X(z)$

连续时间信号的Laplace变换：$x_a(t) \to X_a(s)$

连续时间信号的Fourier变换：$x_a(t) \to X_a(j\Omega)$

1、序列的z变换&理想抽样信号的Laplace变换

理想抽样信号： $\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT)$

其Laplace变换：

$$\hat{X}_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(nT)e^{-st}\delta(t-nT)dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)e^{-snT}$$

抽样序列： $x(n)=x_a(nT)$

其z变换： $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)z^{-n}$

比较理想抽样信号的Laplace变换：

$$\hat{X}_a(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)e^{-snT}$$

得：

$$\text{当}z=e^{sT}\text{时，}X(z)=\hat{X}_a(s)$$

当$z = e^{sT}$时

抽样序列的z变换=理想抽样信号的Laplace变换

即：

$$X(z)\Big|_{z=e^{sT}} = X(e^{sT}) = \hat{X}_a(s)$$

是复平面s平面到z平面的映射：

s平面：$s = \sigma + j\Omega$

(直角坐标）

$$e^{sT} = e^{(\sigma + j\Omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$$

$$z = re^{j\omega}$$

z平面：$z = re^{j\omega}$

（极坐标）

$$\therefore \quad r = e^{\sigma T} \qquad \omega = \Omega T$$

$r = e^{\sigma T}$

	S平面		Z平面
$\sigma = 0$	虚轴	$r = 1$	单位圆
$\sigma < 0$	左半平面	$r < 1$	单位圆内部
$\sigma > 0$	右半平面	$r > 1$	单位圆外部

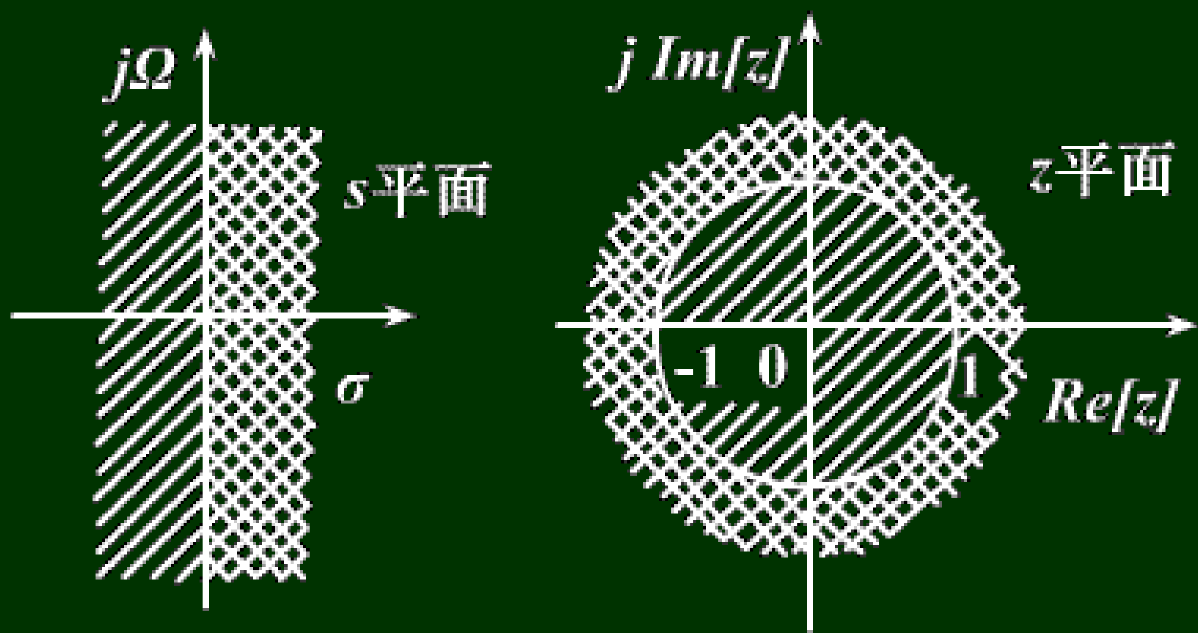


图 2-17 $\sigma \gtreqless 0$分别映射成$r \gtreqless 1$

$\omega = \Omega T$

S平面		Z平面	
$\Omega = 0$	实轴	$\omega = 0$	正实轴
$\Omega = \Omega_0$	平行直线	$\omega = \Omega_0 T$	辐射线
$\Omega: -\pi/T \to \pi/T$		$\omega: -\pi \to \pi$	
$\Omega: -3\pi/T \to -\pi/T$		$\omega: -\pi \to \pi$	
$\pi/T \to 3\pi/T$			

s平面到z平面的映射是**多值映射**。

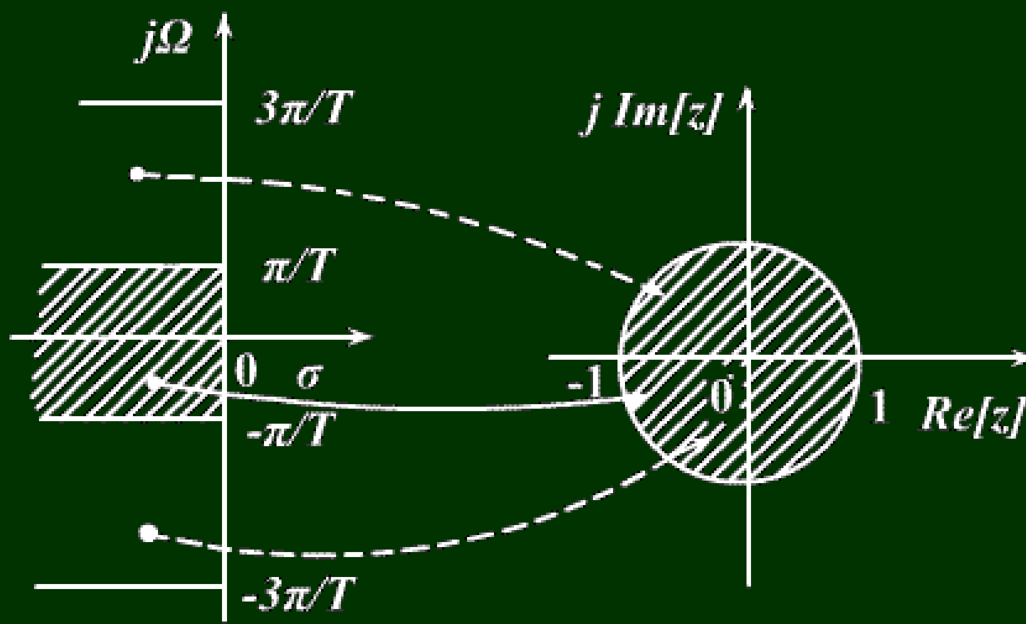


图 2-18

当$z=e^{sT}$时，$X(z)=\hat{X}_a(s)$

而$\hat{X}_a(s)=\dfrac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(s-jk\Omega_s)$

$$X(z)\big|_{z=e^{sT}}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(s-jk\Omega_s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a\left(s-j\frac{2\pi}{T}k\right)$$

2、序列的z变换&理想抽样信号的Fourier变换

Fourier变换是Laplace变换在虚轴上的特例。

即: s=jΩ

映射到z平面为单位圆 $z = e^{j\Omega T}$

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega T}} = X(e^{j\Omega T}) = \hat{X}_a(j\Omega)$$

$$= \hat{X}_a(s)\Big|_{s=j\Omega}$$

抽样序列在单位圆上的z变换

=其理想抽样信号的Fourier变换

序列的Fourier变换 $X(e^{j\omega})$

单位圆上序列的z变换

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

数字域频率：$\omega = \Omega T$

$$= X(e^{j\Omega T}) = \hat{X}_a(j\Omega)$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s)$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\frac{\omega - 2\pi k}{T}\right)$$

$\Omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$为周期

五、序列的Fourier变换及其对称性质

序列的Fourier变换和反变换：

$$X(e^{j\omega}) = DTFT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = DTFT^{-1}[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

若序列x(n)绝对可和，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)e^{-j\omega n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right| < \infty$$

则其Fourier变换$X(e^{j\omega})$存在且连续，是序列的z变换在单位圆上的值：

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

若序列的Fourier变换 $X(e^{j\omega})$存在且连续，且是其z变换在单位圆上的值，则序列x(n)一定绝对可和，将 $X(e^{j\omega})$展成Fourier级数，其系数即为x(n)：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}X(z)z^{n-1}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega(n-1)}de^{j\omega}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega(n-1)}je^{j\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

序列的Fourier变换的对称性质

定义：

共轭对称序列： $x_e(n) = x_e^*(-n)$

共轭反对称序列： $x_o(n) = -x_o^*(-n)$

任意序列可表示成$x_e(n)$和$x_o(n)$之和:

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

其中： $x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

同样，x(n)的Fourier变换$X(e^{j\omega})$也可分解成：

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

其中：

$$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$$

$$X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

对称性质

序列		Fourier变换
$x(n)$	$\Longleftrightarrow$	$X(e^{j\omega})$
$\mathrm{Re}[x(n)]$	$\Longleftrightarrow$	$X_e(e^{j\omega})$
$j\,\mathrm{Im}[x(n)]$	$\Longleftrightarrow$	$X_o(e^{j\omega})$
$x_e(n)$	$\Longleftrightarrow$	$\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$
$x_o(n)$	$\Longleftrightarrow$	$j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$

实数序列的对称性质

序列		Fourier变换
$\mathrm{Re}[x(n)]$	$\Longleftrightarrow$	$X_e(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$
$j\,\mathrm{Im}[x(n)] = 0$	$\Longleftrightarrow$	$X_o(e^{j\omega}) = 0$
$x_e(n)$	$\Longleftrightarrow$	$\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$
$x_o(n)$	$\Longleftrightarrow$	$j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$

实数序列的Fourier变换满足共轭对称性

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

实部是ω的偶函数 $\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})] = \mathrm{Re}[X(e^{-j\omega})]$

虚部是ω的奇函数 $\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})] = -\mathrm{Im}[X(e^{-j\omega})]$

幅度是ω的偶函数 $\left|X(e^{j\omega})\right| = \left|X(e^{-j\omega})\right|$

幅角是ω的奇函数 $\arg[X(e^{j\omega})] = -\arg[X(e^{-j\omega})]$

六、离散系统的系统函数、系统的频率响应

LSI系统的系统函数H(z)：

单位抽样响应h(n)的z变换

$$H(z) = ZT[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

其中：y(n)=x(n)*h(n)　　Y(z)=X(z)H(z)

系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$：

单位圆上的系统函数

单位抽样响应h(n)的Fourier变换

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = DTFT[h(n)]$$

1、若LSI系统为因果稳定系统

1）因果：　$R_{x^-} < |z| \le \infty$

2）稳定：

序列h(n)绝对可和，即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

而h(n)的z变换的Roc：$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n) z^{-n}| < \infty$

稳定系统的系统函数H(z)的Roc须包含单位圆，即频率响应存在且连续

3）因果稳定：Roc：　$1 \le |z| \le \infty$

H(z)须从单位圆到 ∞ 的整个z域内收敛

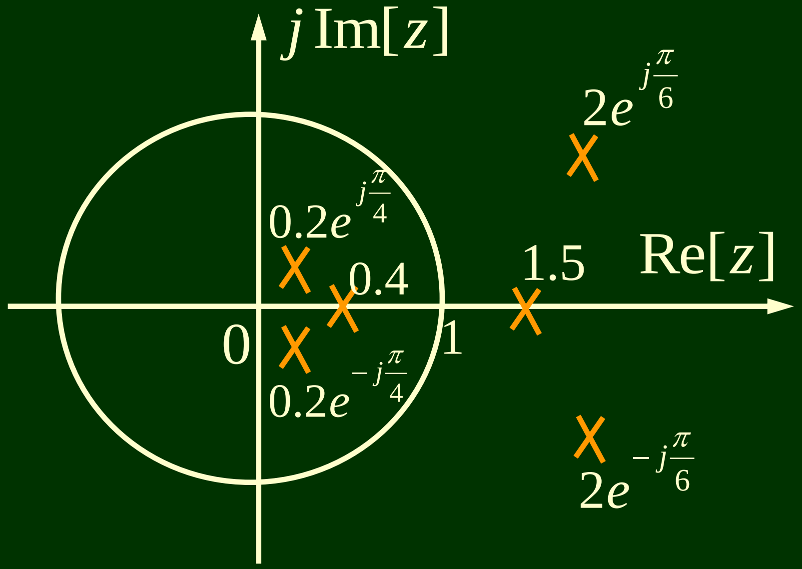
即系统函数H(z)的全部极点必须在单位圆内

例：一LSI系统的极点有：

$$0.2e^{j\pi/4},\quad 0.2e^{-j\pi/4},\quad 0.4,\quad 2e^{j\pi/6},\quad 2e^{-j\pi/6},\quad 1.5$$

问什么情况下，系统为因果系统，

什么情况下，系统为稳定系统



解：因果系统： $|z| > 2$

稳定系统： $0.4 < |z| < 1.5$

2、系统函数与差分方程

常系数线性差分方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$$

取z变换

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m} X(z)$$

则系统函数

$$H(z) = Y(z)/X(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = K\frac{\prod_{m=1}^{M}(1-c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}$$

例：已知离散LSI系统的差分方程：

（设系统初始状态为零）

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$$

其中：$x(n)$为输入，$y(n)$为输出。

1）求系统函数，指出系统的零极点；

2）若该系统是因果稳定的，指出系统的收敛域；

3）求该因果稳定系统的单位抽样响应。

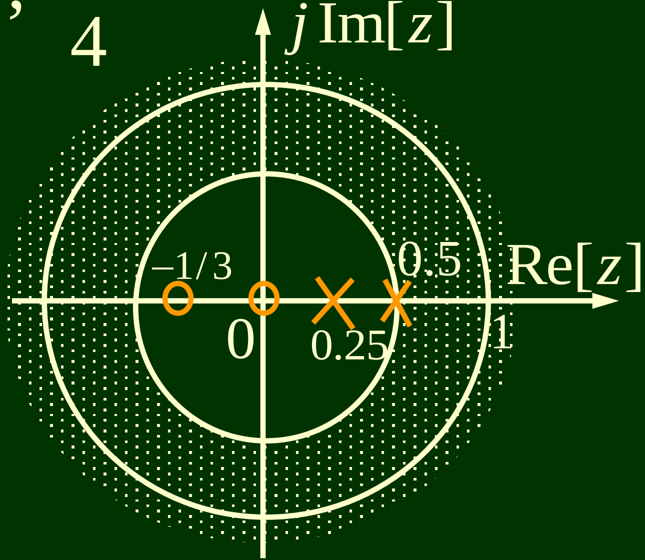
解：1）对差分方程两边取z变换：

$$Y(z)-\frac{3}{4}z^{-1}Y(z)+\frac{1}{8}z^{-2}Y(z)=X(z)+\frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

系统函数：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

零点：$z=-\frac{1}{3},\ 0$ 极点：$z=\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$



2）由于系统为因果稳定系统，

故收敛域： $|z|>\frac{1}{2}$

3) 对H(z)求z反变换即得单位抽样响应h(n)，

用部分分式法

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}=\frac{\left(z+\frac{1}{3}\right)z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{\left(z+\frac{1}{3}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}=\frac{A_1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{A_2}{z-\frac{1}{4}}$$

$$A_1=Res\left[\frac{H(z)}{z}\right]_{z=\frac{1}{2}}=\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{z+\frac{1}{3}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{10}{3}$$

$$A_2 = Res\left[\frac{H(z)}{z}\right]_{z=\frac{1}{4}} = \left(z-\frac{1}{4}\right)\frac{z+\frac{1}{3}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\Bigg|_{z=\frac{1}{4}} = -\frac{7}{3}$$

$$\therefore H(z) = \frac{\frac{10}{3}z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{-\frac{7}{3}z}{z-\frac{1}{4}}$$

根据Roc：$|z| > \frac{1}{2}$，查表2-1得

$$h(n) = \left[\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{7}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

3、系统的频率响应的意义

1）LSI系统对复指数序列的稳态响应：

$$x(n) = e^{j\omega_0 n} \quad -\infty < n < \infty$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{j\omega_0 (n-m)} = e^{j\omega_0 n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\omega_0 m}$$

$$= e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0})$$

2）LSI系统对正弦序列的稳态响应

$$x(n)=A\cos(\omega_0 n+\phi)$$

$$y(n)=A\left|H(e^{j\omega_0})\right|\cos\{\omega_0 n+\phi+\arg[H(e^{j\omega_0})]\}$$

输出同频 (ω_0) 正弦序列

幅度受频率响应幅度 $\left|H(e^{j\omega})\right|$ 加权

相位为输入相位与系统相位响应之和

3）LSI系统对任意输入序列的稳态响应

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

$$y(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

其中：$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

微分增量（复指数）：$\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

4、频率响应的几何确定法

利用H(z)在z平面上的零极点分布

$$H(z)=K\frac{\prod_{m=1}^{M}(1-c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}=Kz^{(N-M)}\frac{\prod_{m=1}^{M}(z-c_m)}{\prod_{k=1}^{N}(z-d_k)}$$

频率响应：

$$H(e^{j\omega})=Ke^{j(N-M)\omega}\frac{\prod_{m=1}^{M}(e^{j\omega}-c_m)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-d_k)}=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\arg[H(e^{j\omega})]}$$

令 $\overrightarrow{c_m} = e^{j\omega} - c_m = \rho_m e^{j\theta_m}$

$$\overrightarrow{d_k} = e^{j\omega} - d_k = l_k e^{j\phi_k}$$

则频率响应的

幅度： $$\left|H(e^{j\omega})\right| = |K| \frac{\prod_{m=1}^{M} \rho_m}{\prod_{k=1}^{N} l_k}$$

幅角：

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[K] + \sum_{m=1}^{M} \theta_m - \sum_{k=1}^{N} \phi_k + (N-M)\omega$$

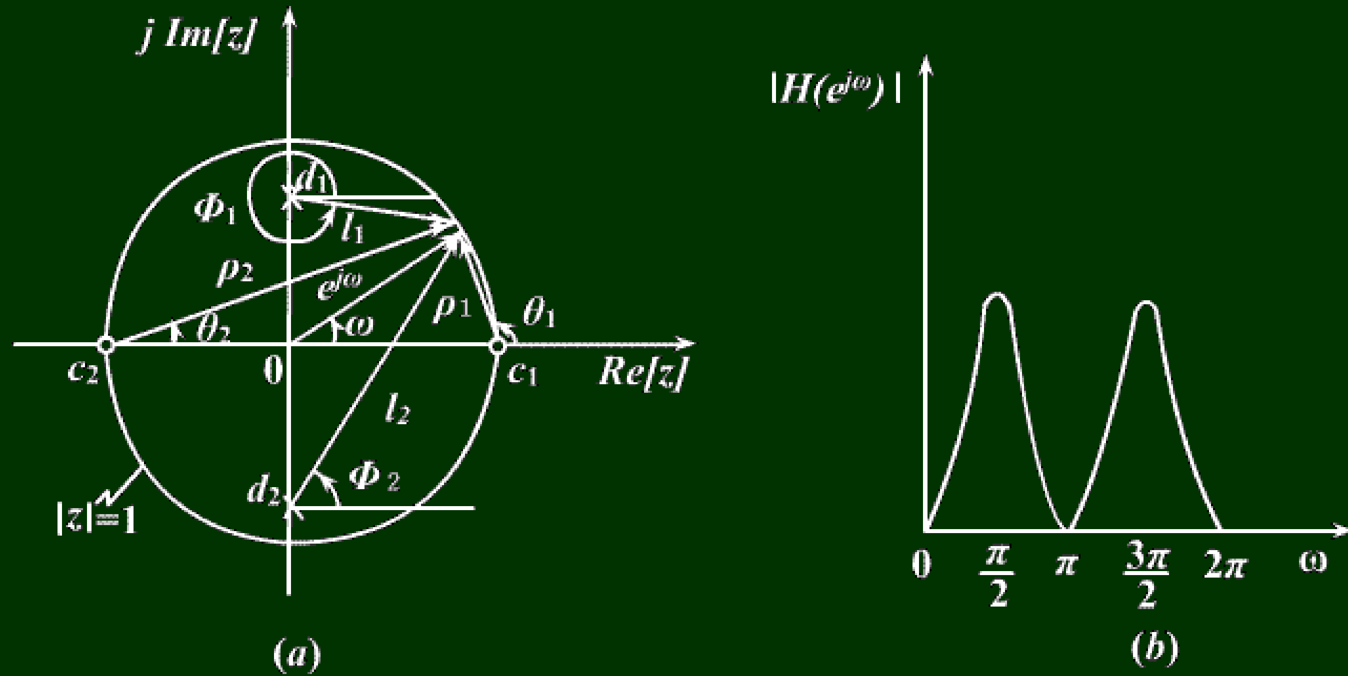


图 2-19

- 零点位置影响凹谷点的位置与深度
  - 零点在单位圆上，谷点为零
  - 零点趋向于单位圆，谷点趋向于零
- 极点位置影响凸峰的位置和深度
  - 极点趋向于单位圆，峰值趋向于无穷
  - 极点在单位圆外，系统不稳定

例：设一阶系统的差分方程：

$$y(n) = x(n) + ay(n-1) \qquad |a| < 1，a\text{为实数}$$

求系统的频率响应。

解：两边求z变换，得

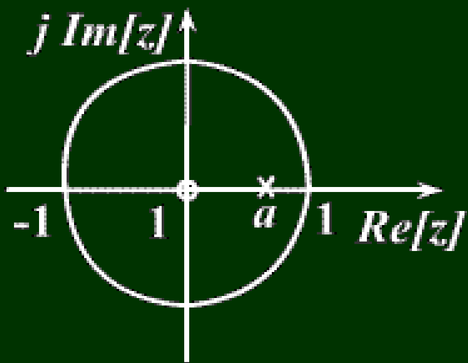
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

$$\therefore h(n) = a^n u(n)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1}{(1 - a\cos\omega) + ja\sin\omega}$$

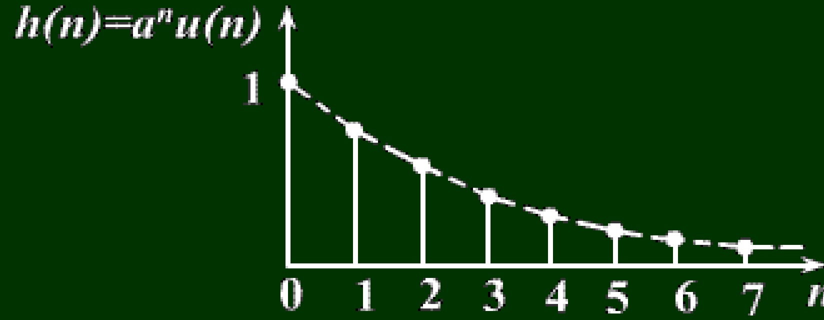
幅度响应： $\left|H(e^{j\omega})\right| = (1 + a^2 - 2a\cos\omega)^{-1/2}$

相位响应： $\arg[H(e^{j\omega})] = -\arctan\dfrac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}$



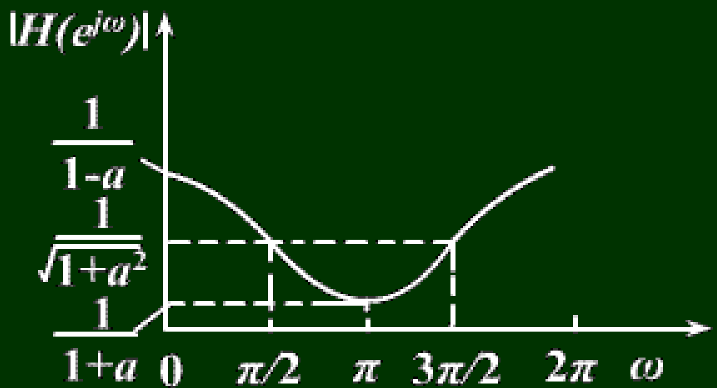
j Im[z]
-1
1
a
1
Re[z]

(a)



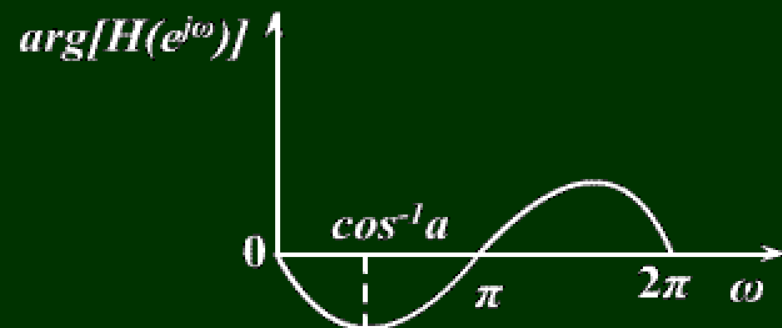
$h(n)=a^n u(n)$
1
0
1
2
3
4
5
6
7
n

(b)



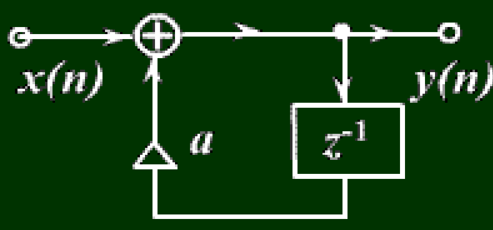
$|H(e^{j\omega})|$
$\frac{1}{1-a}$
$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$
$\frac{1}{1+a}$
0
$\pi/2$
π
$3\pi/2$
2π
ω

(c)



$arg[H(e^{j\omega})]$
0
$\cos^{-1}a$
π
2π
ω

(d)



x(n)
y(n)
a
z^{-1}

(e)

例：设系统的差分方程$(0<a<1)$：

$$y(n)=x(n)+ax(n-1)+a^2x(n-2)+\dots$$

$$+a^{M-1}x(n-M+1)=\sum_{k=0}^{M-1}a^k x(n-k)$$

这就是$M-1$个单元延时及M个抽头加权后相加所组成的电路，常称之为横向滤波器，求其频率响应。

解：令$x(n)=\delta(n)$，两边取z变换

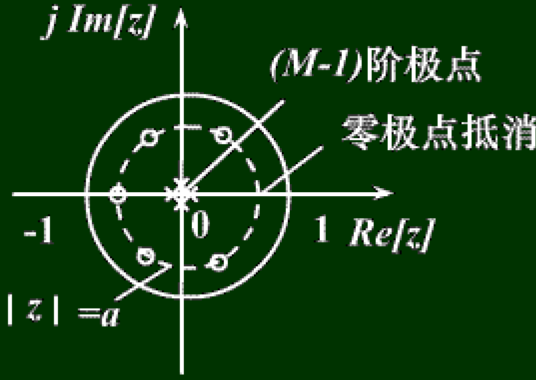
$$H(z)=\sum_{k=0}^{M-1}a^k z^{-k}=\frac{1-a^M z^{-M}}{1-az^{-1}}=\frac{z^M-a^M}{z^{M-1}(z-a)}\quad |z|>0$$

零点：$z_i=ae^{j\frac{2\pi}{M}i}$，$i=1,2,\ldots,M-1$

极点：$z=0$，　$(M-1)$阶，$z=a$处零极点相消

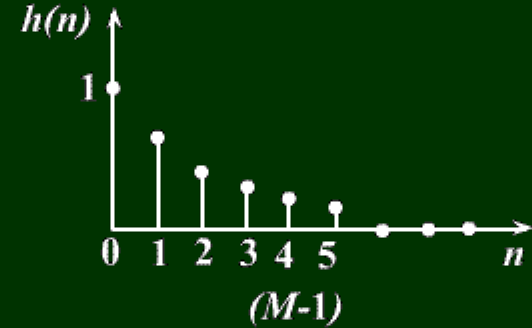
当输入为$\delta(n)$，则输出为$h(n)$

$$h(n)=\begin{cases}a^n & 0\le n\le M-1\\ 0 & 其它n\end{cases}$$



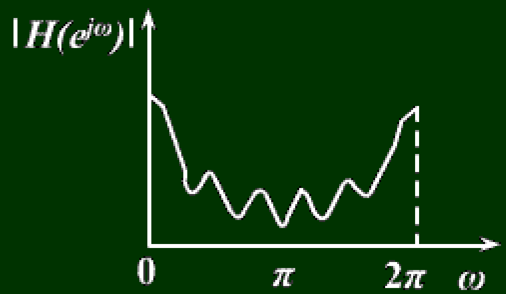
j Im[z]
(M-1)阶极点
零极点抵消
-1
0
1 Re[z]
|z| =a

(a)



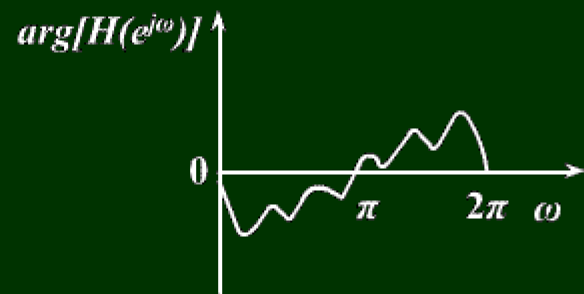
h(n)
1
0 1 2 3 4 5
n
(M-1)

(b)



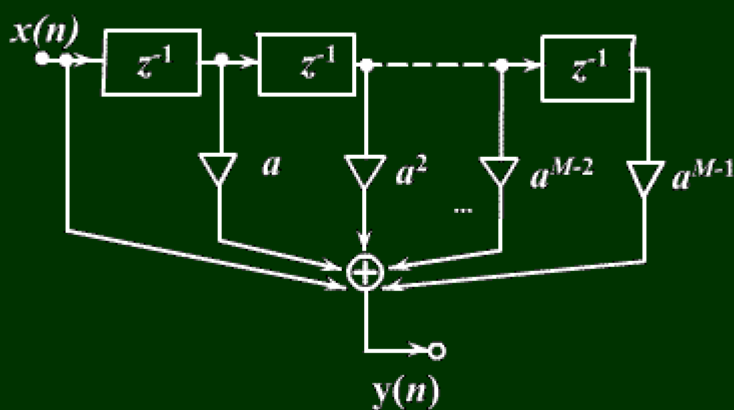
|H(e^jω)|
0
π
2π
ω

(c)



arg[H(e^jω)]
0
π
2π
ω

(d)



x(n)
z^-1
z^-1
z^-1
a
a^2
a^M-2
a^M-1
...
y(n)

(e)

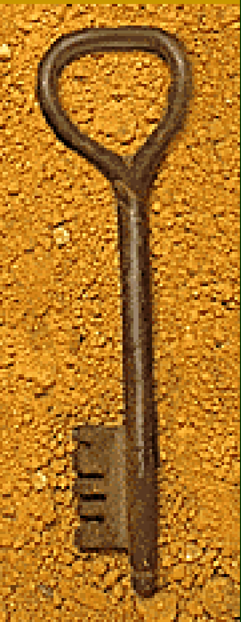
5、IIR系统和FIR系统

无限长单位冲激响应（IIR）系统：

单位冲激响应h(n)是无限长序列

有限长单位冲激响应（FIR）系统：

单位冲激响应h(n)是有限长序列



$$H(z)=\frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

IIR系统：至少有一个$a_k \neq 0$

全极点系统：分子只有常数项b_0

零极点系统：分子不止常数项b_0

FIR系统：全部 $a_k = 0$

收敛域$0<|z|<\infty$内无极点，是全零点系统

$$y(n)=\sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)+\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)$$

IIR系统：至少有一个$a_k \neq 0$

有反馈环路，采用递归型结构

FIR系统：全部 $a_k = 0$

无反馈环路，多采用非递归结构

2、系统函数与差分方程

常系数线性差分方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$$

取z变换

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m} X(z)$$

则系统函数

$$H(z) = Y(z)/X(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = K\frac{\prod_{m=1}^{M}(1-c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}$$

例：已知离散LSI系统的差分方程：

（设系统初始状态为零）

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$$

其中：$x(n)$为输入，$y(n)$为输出。

1）求系统函数，指出系统的零极点；

2）若该系统是因果稳定的，指出系统的收敛域；

3）求该因果稳定系统的单位抽样响应。

解：1）对差分方程两边取z变换：

$$Y(z)-\frac{3}{4}z^{-1}Y(z)+\frac{1}{8}z^{-2}Y(z)=X(z)+\frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

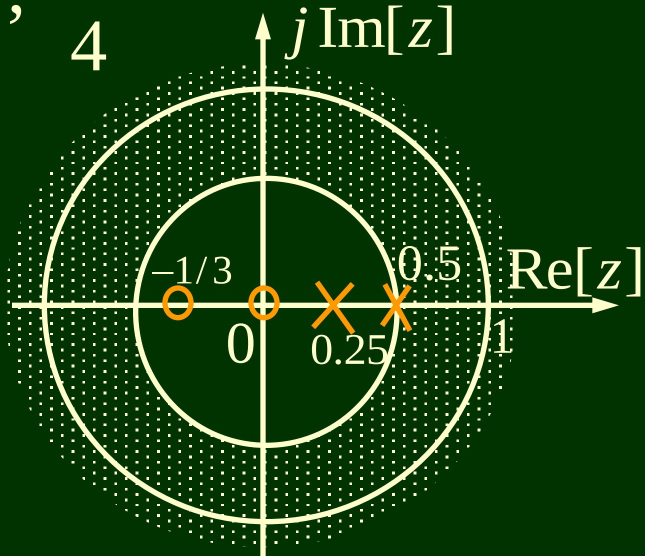
系统函数：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

零点：$z=-\frac{1}{3},\ 0$　极点：$z=\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$

2）由于系统为因果稳定系统，

故收敛域：$|z|>\frac{1}{2}$



3) 对H(z)求z反变换即得单位抽样响应h(n)，

用部分分式法

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}=\frac{\left(z+\frac{1}{3}\right)z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{\left(z+\frac{1}{3}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}=\frac{A_1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{A_2}{z-\frac{1}{4}}$$

$$A_1=Res\left[\frac{H(z)}{z}\right]_{z=\frac{1}{2}}=\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{z+\frac{1}{3}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{10}{3}$$

$$A_2 = Res\left[\frac{H(z)}{z}\right]_{z=\frac{1}{4}} = \left(z-\frac{1}{4}\right)\frac{z+\frac{1}{3}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\Bigg|_{z=\frac{1}{4}} = -\frac{7}{3}$$

$$\therefore H(z) = \frac{\frac{10}{3}z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{-\frac{7}{3}z}{z-\frac{1}{4}}$$

根据Roc：$|z| > \frac{1}{2}$，查表2-1得

$$h(n) = \left[\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{7}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

3、系统的频率响应的意义

1）LSI系统对复指数序列的稳态响应：

$$x(n) = e^{j\omega_0 n} \quad -\infty < n < \infty$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{j\omega_0 (n-m)} = e^{j\omega_0 n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\omega_0 m}$$

$$= e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0})$$

2）LSI系统对正弦序列的稳态响应

$$x(n) = A\cos(\omega_0 n + \phi)$$

$$y(n) = A\left|H(e^{j\omega_0})\right|\cos\{\omega_0 n + \phi + \arg[H(e^{j\omega_0})]\}$$

输出同频 (ω_0) 正弦序列

幅度受频率响应幅度 $\left|H(e^{j\omega})\right|$ 加权

相位为输入相位与系统相位响应之和

3）LSI系统对任意输入序列的稳态响应

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})\cdot H(e^{j\omega})$$

$$y(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

其中： $x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$

微分增量（复指数）： $\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$

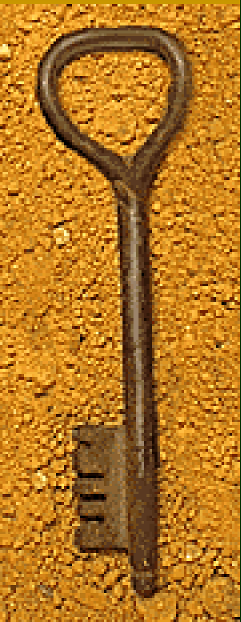
4、频率响应的几何确定法

利用H(z)在z平面上的零极点分布

$$H(z)=K\frac{\prod_{m=1}^{M}(1-c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}=Kz^{(N-M)}\frac{\prod_{m=1}^{M}(z-c_m)}{\prod_{k=1}^{N}(z-d_k)}$$

频率响应：

$$H(e^{j\omega})=Ke^{j(N-M)\omega}\frac{\prod_{m=1}^{M}(e^{j\omega}-c_m)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-d_k)}=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\arg[H(e^{j\omega})]}$$



令 $\overrightarrow{c_m} = e^{j\omega} - c_m = \rho_m e^{j\theta_m}$

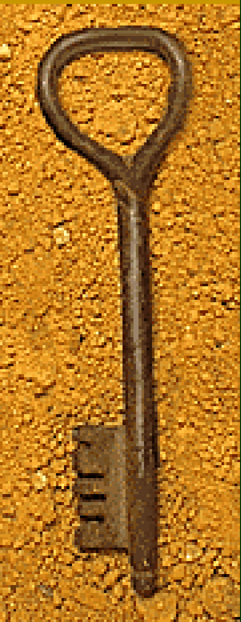
$\overrightarrow{d_k} = e^{j\omega} - d_k = l_k e^{j\phi_k}$

则频率响应的

幅度：$$\left|H(e^{j\omega})\right| = |K| \frac{\prod_{m=1}^{M} \rho_m}{\prod_{k=1}^{N} l_k}$$

幅角：

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[K] + \sum_{m=1}^{M} \theta_m - \sum_{k=1}^{N} \phi_k + (N-M)\omega$$



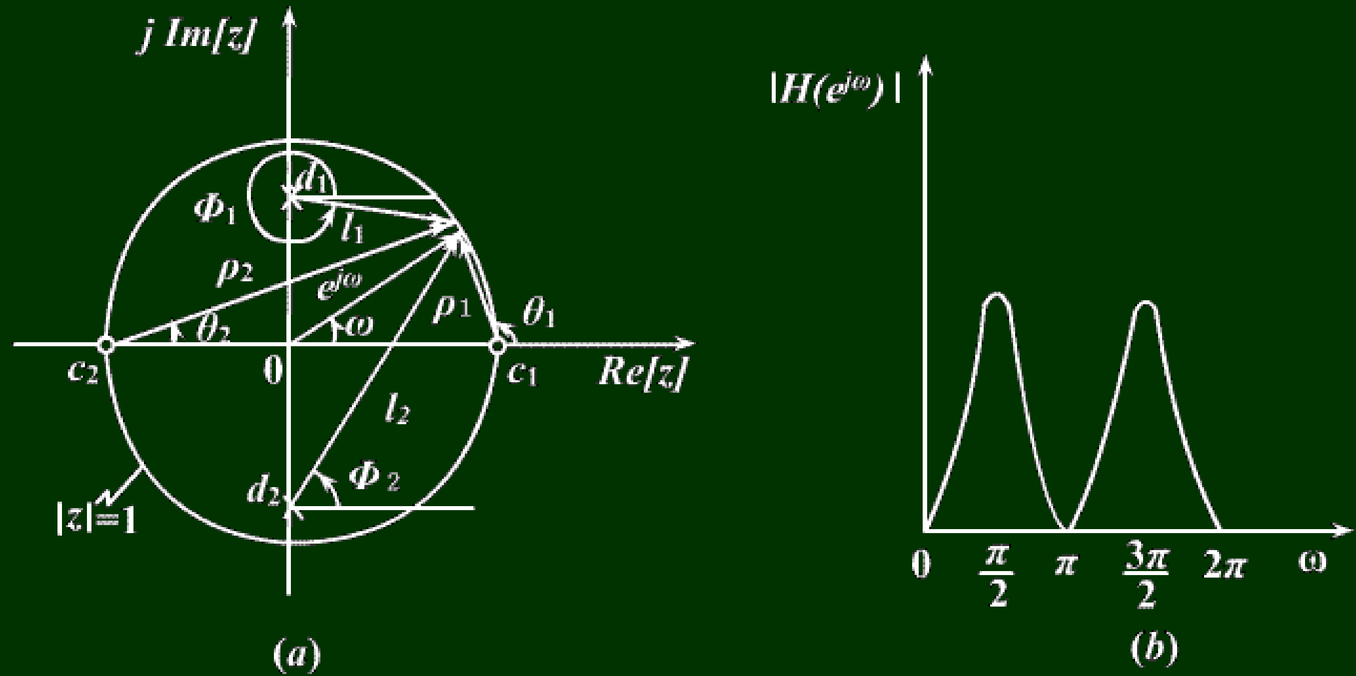


图 2-19

- 零点位置影响凹谷点的位置与深度
  - 零点在单位圆上，谷点为零
  - 零点趋向于单位圆，谷点趋向于零
- 极点位置影响凸峰的位置和深度
  - 极点趋向于单位圆，峰值趋向于无穷
  - 极点在单位圆外，系统不稳定

例：设一阶系统的差分方程：

$$y(n)=x(n)+ay(n-1) \qquad |a|<1，a\text{为实数}$$

求系统的频率响应。

解：两边求z变换，得

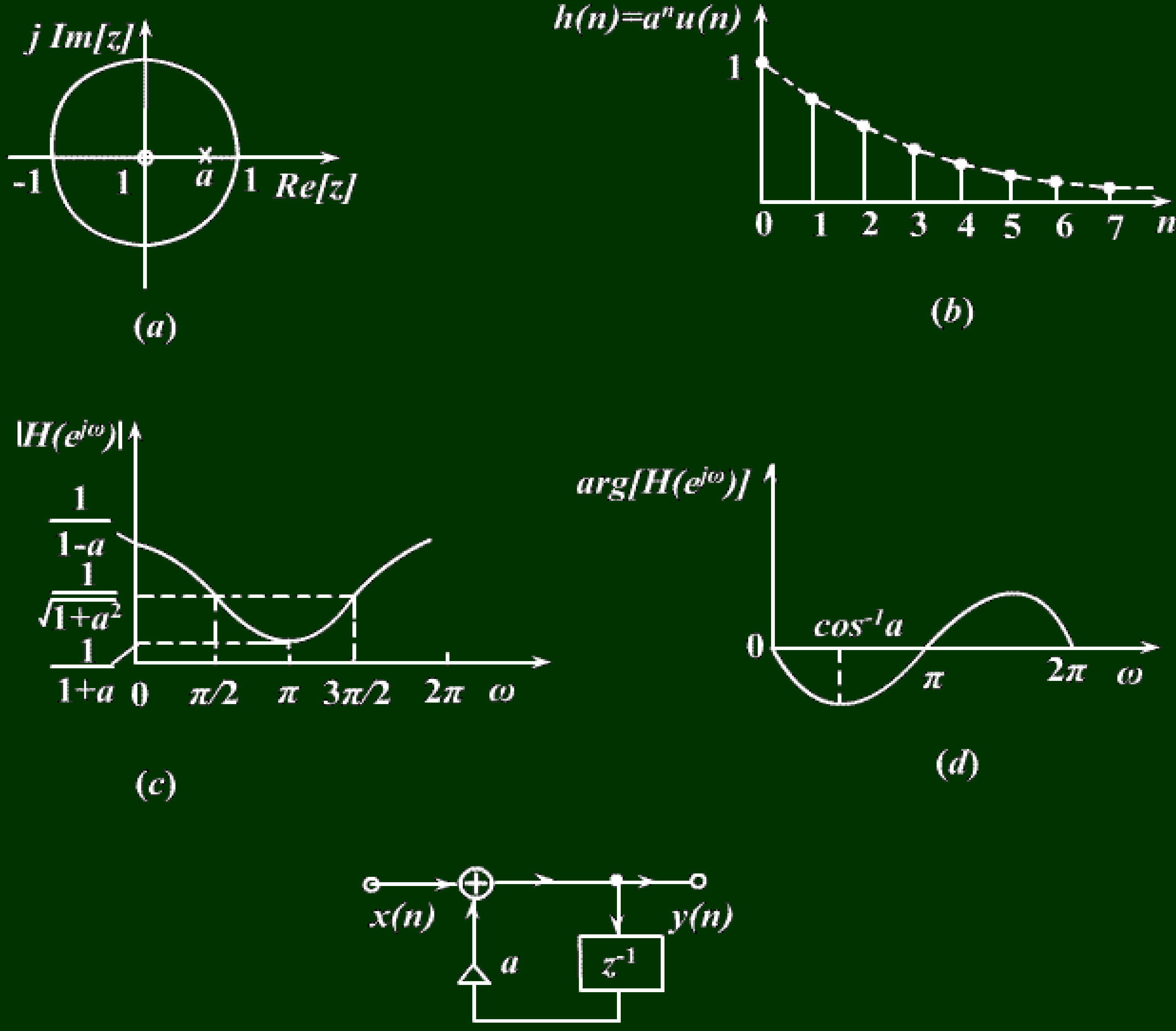
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

$$\therefore h(n)=a^n u(n)$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}=\frac{1}{(1-a\cos\omega)+ja\sin\omega}$$

幅度响应：$|H(e^{j\omega})|=(1+a^2-2a\cos\omega)^{-1/2}$

相位响应：$\arg[H(e^{j\omega})]=-\arctan\dfrac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}$


j Im[z]
-1
1
a
1
Re[z]
h(n)=a^n u(n)
1
0 1 2 3 4 5 6 7
n
|H(e^{jω})|
1/(1-a)
1/√(1+a²)
1/(1+a)
0
π/2
π
3π/2
2π
ω
arg[H(e^{jω})]
cos⁻¹a
0
π
2π
ω
x(n)
y(n)
a
z⁻¹

(a) (b) (c) (d) (e)

例：设系统的差分方程(0<a<1)：

$$y(n)=x(n)+ax(n-1)+a^{2}x(n-2)+\ldots$$

$$+a^{M-1}x(n-M+1)=\sum_{k=0}^{M-1}a^{k}x(n-k)$$

这就是$M-1$个单元延时及M个抽头加权后相加所组成的电路，常称之为横向滤波器，求其频率响应。

解：令$x(n)=\delta(n)$，两边取z变换

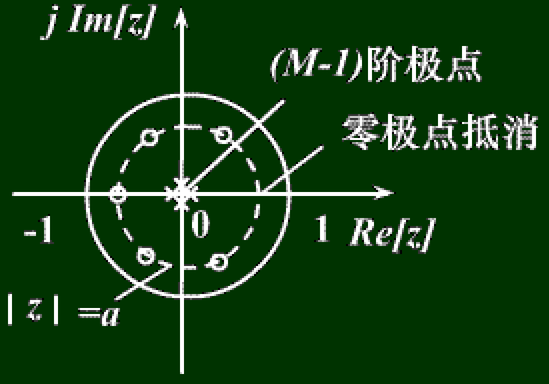
$$H(z)=\sum_{k=0}^{M-1}a^k z^{-k}=\frac{1-a^M z^{-M}}{1-az^{-1}}=\frac{z^M-a^M}{z^{M-1}(z-a)}\quad |z|>0$$

零点：$z_i=ae^{j\frac{2\pi}{M}i}$，$i=1,2,\ldots,M-1$

极点：$z=0$，　$(M-1)$阶，$z=a$处零极点相消

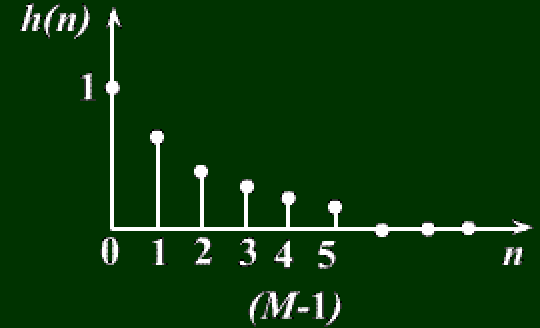
当输入为$\delta(n)$，则输出为$h(n)$

$$h(n)=\begin{cases}a^n & 0\le n\le M-1\\ 0 & \text{其它}n\end{cases}$$



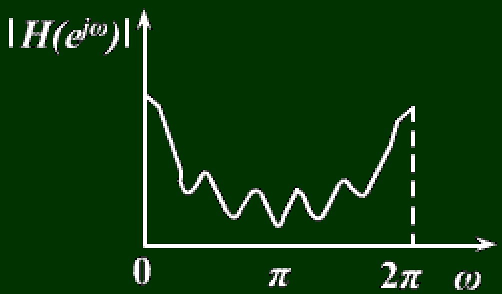
j Im[z]
(M-1)阶极点
零极点抵消
-1
0
1 Re[z]
|z|=a

(a)



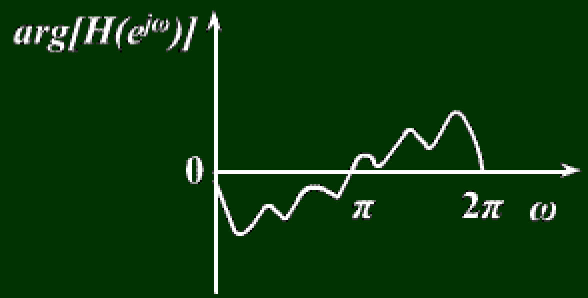
h(n)
1
0 1 2 3 4 5
n
(M-1)

(b)



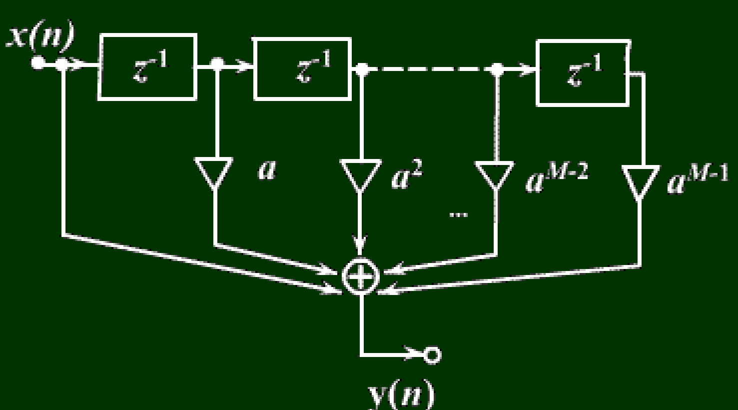
$|H(e^{j\omega})|$
0
π
2π
ω

(c)



$arg[H(e^{j\omega})]$
0
π
2π
ω

(d)



x(n)
z^{-1}
z^{-1}
z^{-1}
a
a^2
…
a^{M-2}
a^{M-1}
y(n)

(e)

5、IIR系统和FIR系统

无限长单位冲激响应（IIR）系统：

单位冲激响应h(n)是无限长序列

有限长单位冲激响应（FIR）系统：

单位冲激响应h(n)是有限长序列

$$H(z)=\frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

IIR系统：至少有一个$a_k \neq 0$ $(k=0$除外，$a_0=1)$

全极点系统：分子只有常数项b_0

零极点系统：分子不止常数项b_0

FIR系统：全部 $a_k=0$ $(k=1,\ldots,N$ 且 $a_0=1)$

收敛域$0<|z|<\infty$内无极点，是全零点系统

$$y(n)=\sum_{m=0}^{M}b_m x(n-m)+\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)$$

IIR系统：至少有一个$a_k \neq 0$

有反馈环路，采用递归型结构

FIR系统：全部 $a_k = 0$

无反馈环路，多采用非递归结构