20. 已知序列$x(n)=a^n u(n), 0<a<1$，现对于$x(n)$的z变换在单位圆上N等分抽样，抽样值为

$$X(k)=X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

试求有限长序列 $IDFT\left[X(k)\right]$，N点。

解： 由$x(n)=a^n u(n),\ 0<a<1$

得$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$X(k)=X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}}=\frac{1}{1-az^{-1}}\Bigg|_{z=W_N^{-k}}=\frac{1}{1-aW_N^{k}}$$

$$=\frac{1}{1-a^N}\cdot\frac{1-a^N W_N^{Nk}}{1-aW_N^{k}}=\frac{1}{1-a^N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(aW_N^{k}\right)^n$$

$$=\frac{1}{1-a^N}\sum_{n=0}^{N-1}a^n W_N^{nk}$$

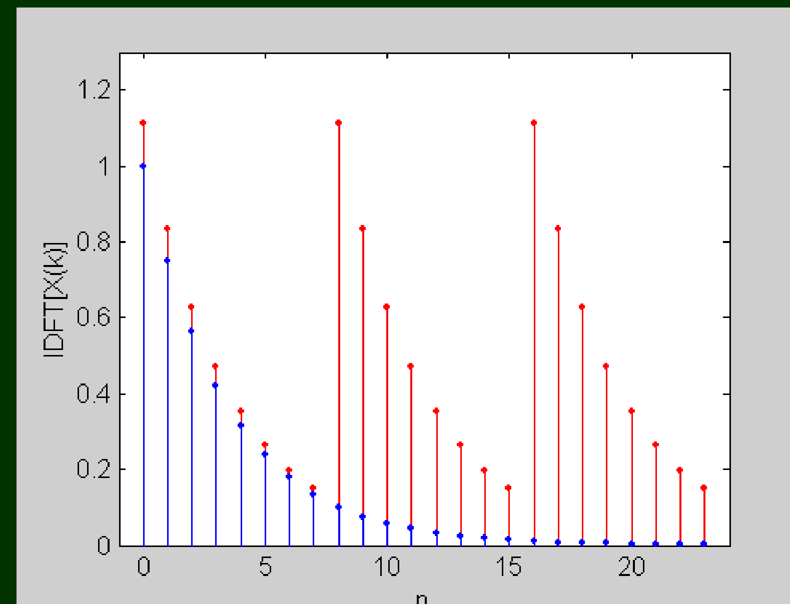
$$\therefore IDFT[X(k)]=\frac{1}{1-a^N}a^n R_N(n)$$

对$X(z)$在单位圆上N点等间隔抽样，得周期序列：

$$\tilde{X}(k) = X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) W_N^{nk}$$

$\tilde{X}(k)$的$IDFS$：

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN)$$



N点 $\quad X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)$

$$x'(n) = IDFT[X(k)]$$

$$= \tilde{x}_N(n) R_N(n)$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} a^{n+rN} u(n+rN) R_N(n) = \sum_{r=0}^{\infty} a^{n+rN} R_N(n)$$

$$= a^n \sum_{r=0}^{\infty} \left(a^N\right)^r R_N(n) = \frac{1}{1-a^N} a^n R_N(n)$$

第四章习题讲解

1.如果一台通用计算机的速度为平均每次复乘$5\mu s$，每次复加$0.5\mu s$，用它来计算512点的$DFT\left[x(n)\right]$，问直接计算需要多少时间，用FFT运算需要多少时间。

解：(1)直接利用DFT计算：

复乘次数为N^2，复加次数为$N(N-1)$。

复乘所需时间

$$T_1=5\times10^{-6}\times N^2=5\times10^{-6}\times512^2=1.31072s$$

复加所需时间

$$T_2=0.5\times10^{-6}\times N\times(N-1)$$

$$=0.5\times10^{-6}\times512\times(512-1)=0.130816s$$

所以直接利用DFT计算所需时间：

$$T=T_1+T_2=1.441536s$$

(2) 利用 FFT 计算：

复乘次数为 $\frac{N}{2}\log_2 N$ ，复加次数为 $N\log_2 N$ 。

复乘所需时间

$$T_1 = 5\times10^{-6}\times\frac{N}{2}\log_2 N$$

$$= 5\times10^{-6}\times\frac{512}{2}\log_2 512 = 0.01152s$$

复加所需时间

$$T_2 = 0.5\times10^{-6}\times N\log_2 N$$

$$= 0.5\times10^{-6}\times 512\log_2 512 = 0.002304s$$

所以用 FFT 计算所需时间

$$T = T_1 + T_2 = 0.013824s$$

2.已知 $X(k), Y(k)$ 是两个 N 点实序列 $x(n), y(n)$ 的 DFT 值，今需要从 $X(k), Y(k)$ 求 $x(n), y(n)$ 的值，为了提高运算效率，试用一个 N 点 $IFFT$ 运算一次完成。

解：由题意 $X(k)=DFT\left[x(n)\right]$，$Y(k)=DFT\left[y(n)\right]$

构造序列 $Z(k)=X(k)+jY(k)$

对$Z(k)$作一次N点$IFFT$可得序列$z(n)$

$$z(n)=IDFT\left[Z(k)\right]$$

又根据DFT的线性性质

$$z(n)=IDFT\left[Z(k)\right]=IDFT\left[X(k)+jY(k)\right]$$

$$=IDFT\left[X(k)\right]+jIDFT\left[Y(k)\right]$$

$$=x(n)+jy(n)$$

而$x(n)$，$y(n)$都是实序列 $\therefore x(n)=\mathrm{Re}\left[z(n)\right]$

$$y(n)=\mathrm{Im}\left[z(n)\right]$$

3. N=16 时，画出基 -2 按时间抽取法及按频率抽取法的 FFT 流图（时间抽取采用输入倒位序，输出自然数顺序，频率抽取采用输入自然顺序，输出倒位序）。

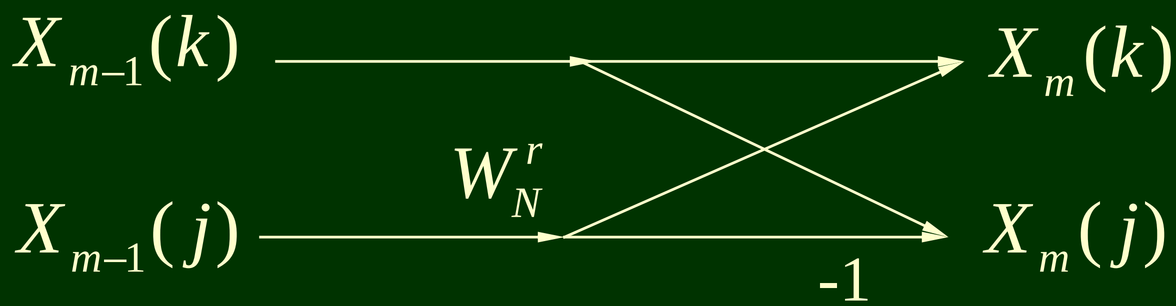
解:

自然序		倒位序		自然序		倒位序	
0	0000	0000	0	8	1000	0001	1
1	0001	1000	8	9	1001	1001	9
2	0010	0100	4	10	1010	0101	5
3	0011	1100	12	11	1011	1101	13
4	0100	0010	2	12	1100	0011	3
5	0101	1010	10	13	1101	1011	11
6	0110	0110	6	14	1110	0111	7
7	0111	1110	14	15	1111	1111	15

(1) 按时间抽取的基-2FFT流图

$$N=16=2^L,\quad L=4$$

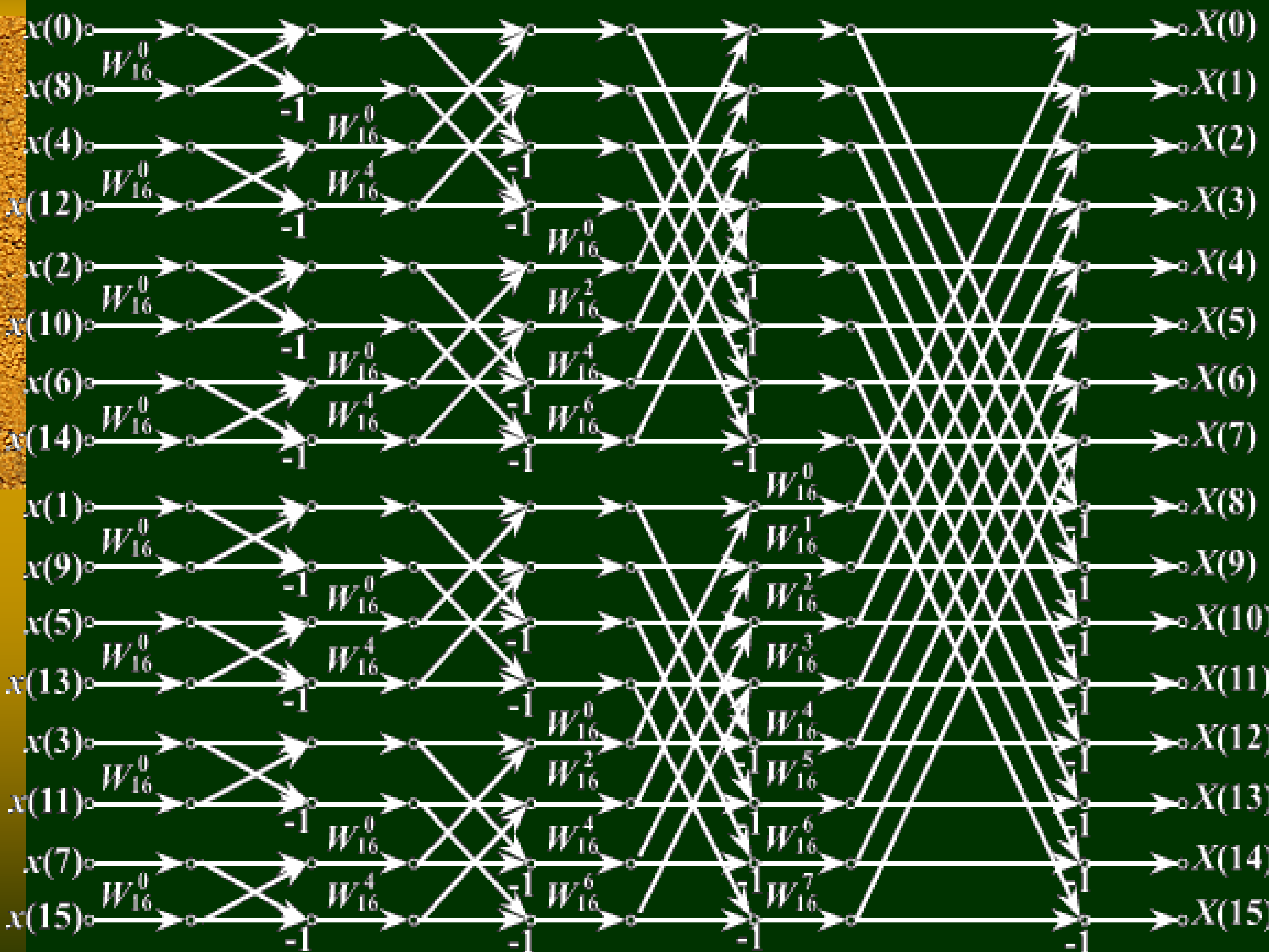
共有$L=4$级蝶形运算，每级$N/2=8$个蝶形运算



每个蝶形的两节点距离为2^{m-1}，即从第一级到第四级两节点距离分别为1，2，4，8。

系数W_N^r的确定：$r=(k)_2\cdot 2^{L-m}$

即k的二进制左移$L-m$位补零

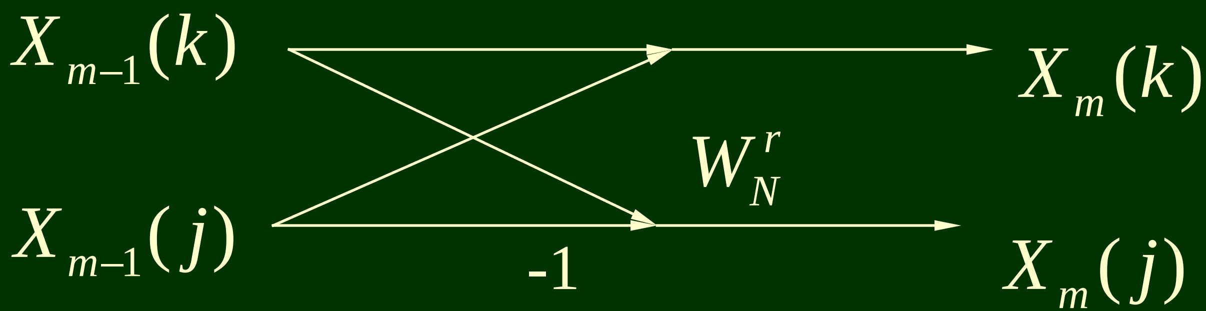

x(0)
x(8)
x(4)
x(12)
x(2)
x(10)
x(6)
x(14)
x(1)
x(9)
x(5)
x(13)
x(3)
x(11)
x(7)
x(15)
W_{16}^{0}
W_{16}^{1}
W_{16}^{2}
W_{16}^{3}
W_{16}^{4}
W_{16}^{5}
W_{16}^{6}
W_{16}^{7}
-1
X(0)
X(1)
X(2)
X(3)
X(4)
X(5)
X(6)
X(7)
X(8)
X(9)
X(10)
X(11)
X(12)
X(13)
X(14)
X(15)

图$P4\text{-}3(a)$

(2) 按频率抽取的基-2FFT流图

同样共有$L=4$级蝶形运算，每级$N/2=8$个蝶形运算

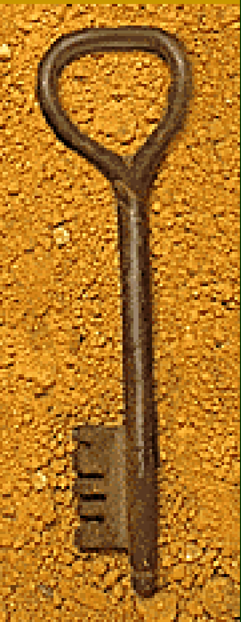
基本蝶形是DIT 蝶形的转置

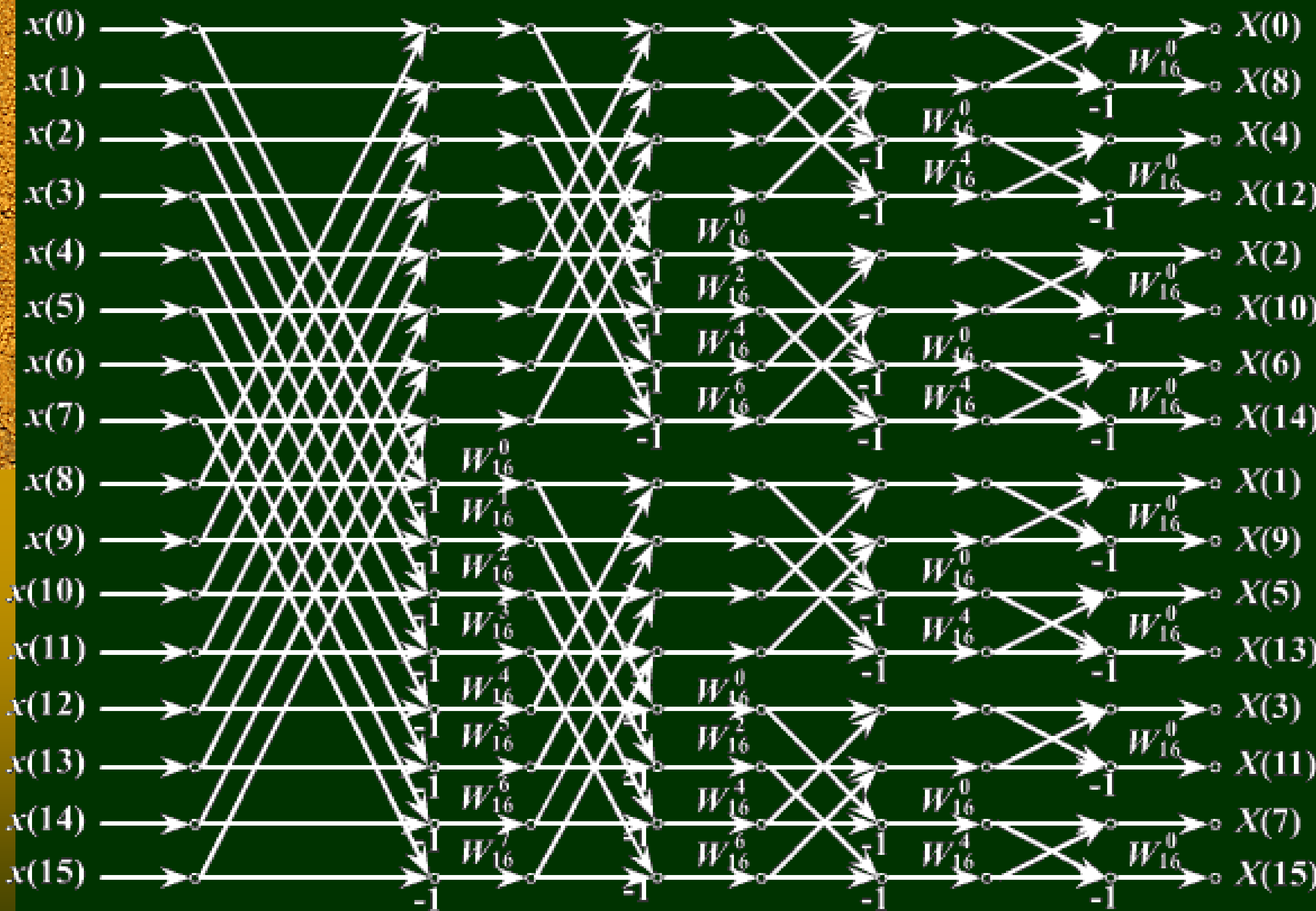


每个蝶形的两节点距离为2^{L-m}，即从第一级到第四级两节点距离分别为8，4，2，1。

系数W_N^r的确定：$r=(k)_2\cdot 2^{m-1}$

即k的二进制左移$m-1$位补零





x(0)
x(1)
x(2)
x(3)
x(4)
x(5)
x(6)
x(7)
x(8)
x(9)
x(10)
x(11)
x(12)
x(13)
x(14)
x(15)
W_{16}^0
W_{16}^1
W_{16}^2
W_{16}^3
W_{16}^4
W_{16}^5
W_{16}^6
W_{16}^7
-1
X(0)
X(8)
X(4)
X(12)
X(2)
X(10)
X(6)
X(14)
X(1)
X(9)
X(5)
X(13)
X(3)
X(11)
X(7)
X(15)

$N=16$

直接计算DFT需要$N^2=256$次复数乘法

$N(N-1)=240$次复数加法

利用FFT计算需要$\dfrac{N}{2}\log_2 N=32$次复数乘法

$N\log_2 N=64$次复数加法

若不计乘±1及乘$\pm j$的运算量

则实际乘法次数为10次复数乘法

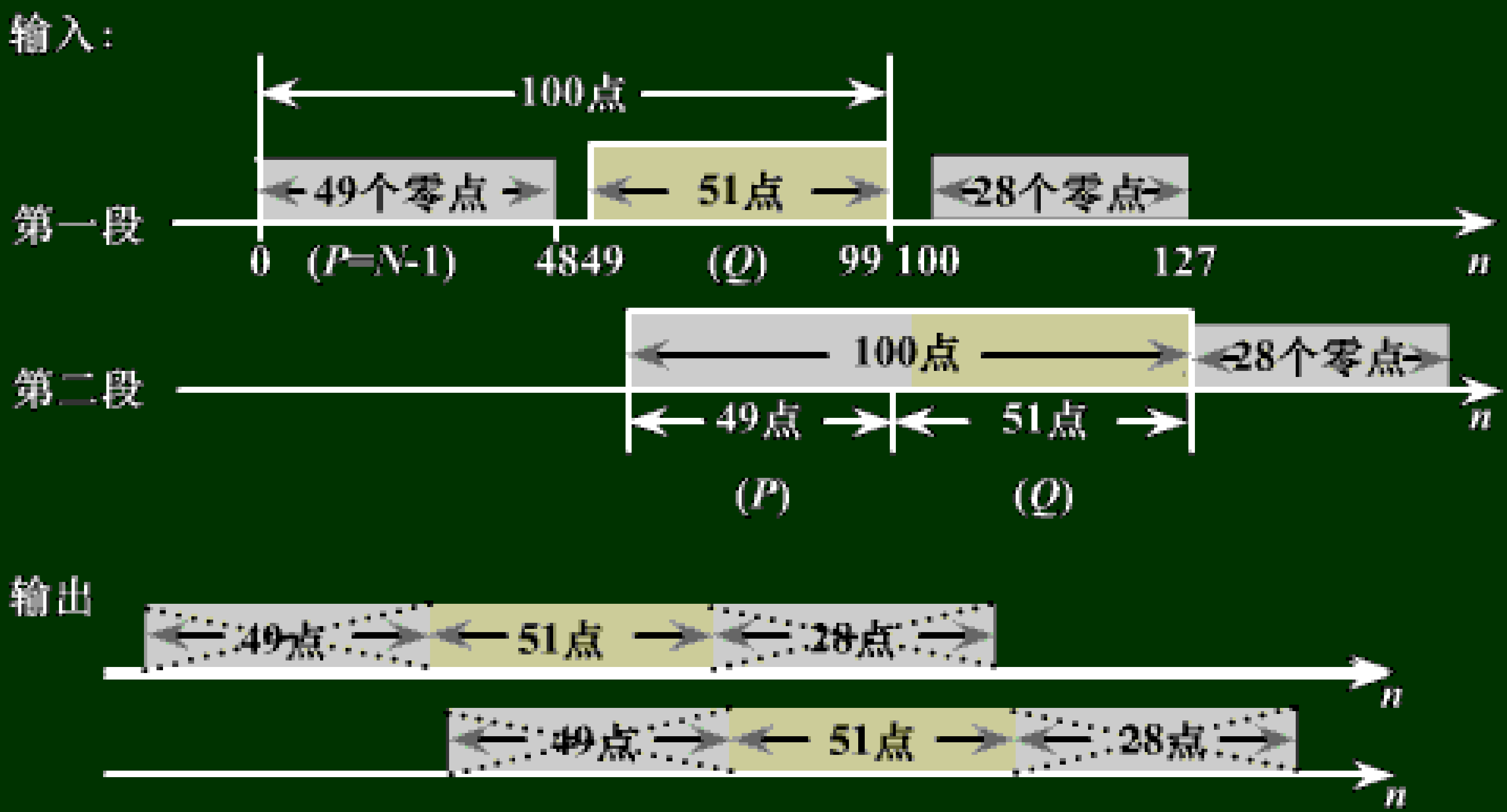
13. 我们希望利用一个单位抽样响应点数$N = 50$ 的有限冲激响应滤波器来过滤一串很长的数据。要求利用重叠保留法通过快速傅里叶变换来实现这种滤波器，为了做到这一点，则：

（1）输入各段必须重叠P个抽样点；

（2）我们必须从每一段产生的输出中取出Q个抽样点，使这些从每一段得到的抽样连接在一起时，得到的序列就是所要求的滤波输出。假设输入的各段长度为100个抽样点，而离散傅里叶变换的长度为128点。进一步假设，圆周卷积的输出序列标号是从 $n = 0$到 $n = 127$，则

（a）求P；　　　　（b）求Q；

（c）求取出来的Q个点的起点和终点的标号，即确定从圆周卷积的128点中要取出哪些点，去和前一段的点衔接起来。


输入:
100点
49个零点
51点
28个零点
第一段
0
(P=N-1)
48
49
(Q)
99
100
127
n
100点
28个零点
第二段
49点
51点
n
(P)
(Q)
输出
49点
51点
28点
n
49点
51点
28点
n

图P4-12

解：(a) 由于用重叠保留法，如果冲激响应 $h(n)$ 的点数为 N 点，则圆周卷积结果的前面的 $N-1$ 个点不代表线性卷积结果，故每段重叠点数P为

$$P = N - 1 = 50 - 1 = 49$$

(b) 每段点数为 $2^7 = 128$，但其中只有100个点是有效输入数据，其余28个点为补充的零值点。因而各段不重叠而又有效的点数Q为

$$Q = 100 - P = 100 - 49 = 51$$

(c) 每段128个数据点中，取出来的Q个点的序号从 $n = 49$ 到 $n = 99$。用这些点和前后段取出的相应点连接起来，即可得到原来的长输入序列。

另外，对于第一段数据没有前一段，故在数据之前必须加上 $P = N - 1 = 49$ 个零值点，以免丢失数据。

第五章习题讲解

1、用直接I型及典范结构实现以下系统函数：

$$H(z)=\frac{3+4.2z^{-1}+0.8z^{-2}}{2+0.6z^{-1}-0.4z^{-2}}$$

解：根据IIR滤波器的系统函数标准式

$$H(z)=\frac{\sum_{m=0}^{M}b_m z^{-m}}{1-\sum_{n=1}^{N}a_n z^{-n}}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

将系统函数整理为：

$$H(z)=\frac{1.5+2.1z^{-1}+0.4z^{-2}}{1+0.3z^{-1}-0.2z^{-2}}=\frac{1.5+2.1z^{-1}+0.4z^{-2}}{1-\left(-0.3z^{-1}+0.2z^{-2}\right)}$$

$$H(z)=\frac{1.5+2.1z^{-1}+0.4z^{-2}}{1-\left(-0.3z^{-1}+0.2z^{-2}\right)}$$

得 $a_1=-0.3,\ a_2=0.2 \qquad b_0=1.5,\ b_1=2.1,\ b_2=0.4$

直接I型结构：

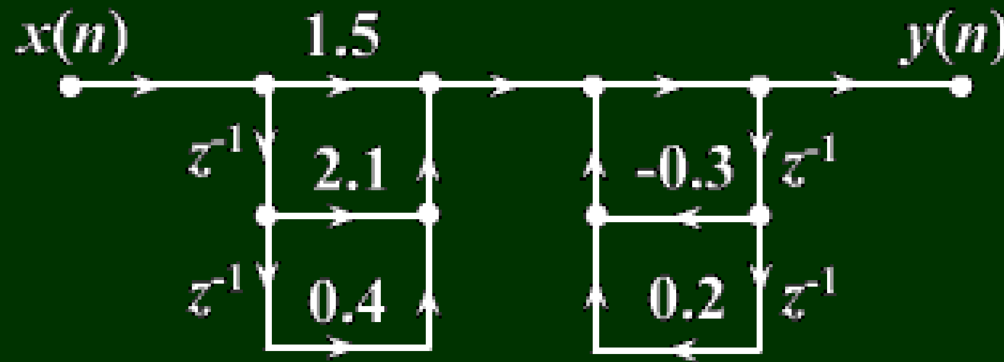
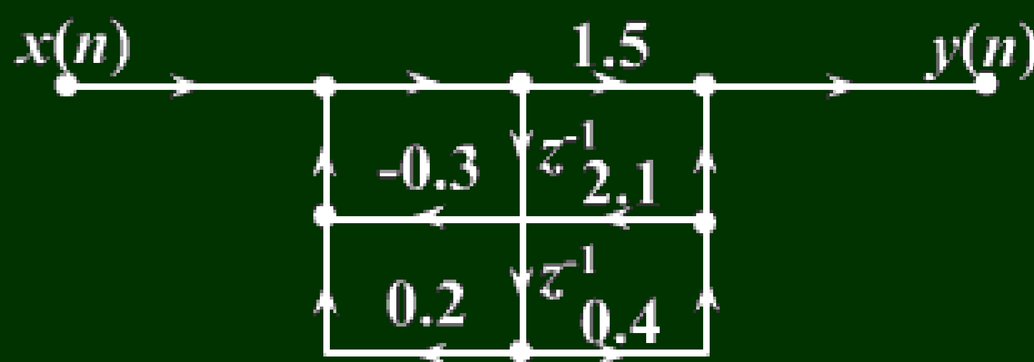


图 P5-1(a)

典范型结构：



2、用级联型结构实现以下系统函数：

$$H(z)=\frac{4(z+1)\left(z^{2}-1.4z+1\right)}{(z-0.5)\left(z^{2}+0.9z+0.8\right)}$$

试问一共能构成几种级联型网络。

解：$$H(z)=A\prod_{k}\frac{1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2}}{1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2}}$$

$$=\frac{4\left(1+z^{-1}\right)\left(1-1.4z^{-1}+z^{-2}\right)}{\left(1-0.5z^{-1}\right)\left(1+0.9z^{-1}+0.8z^{-2}\right)}$$

则 $A=4$

$\beta_{11}=1$ $\beta_{21}=0$ $\beta_{12}=-1.4$ $\beta_{22}=1$

$\alpha_{11}=0.5$ $\alpha_{21}=0$ $\alpha_{12}=-0.9$ $\alpha_{22}=-0.8$

$$\beta_{11}=1 \quad \beta_{21}=0 \qquad \beta_{12}=-1.4 \quad \beta_{22}=1$$

$$\alpha_{11}=0.5 \quad \alpha_{21}=0 \qquad \alpha_{12}=-0.9 \quad \alpha_{22}=-0.8$$

考虑分子分母的组合及级联的次序，共有以下四种级联型网络：

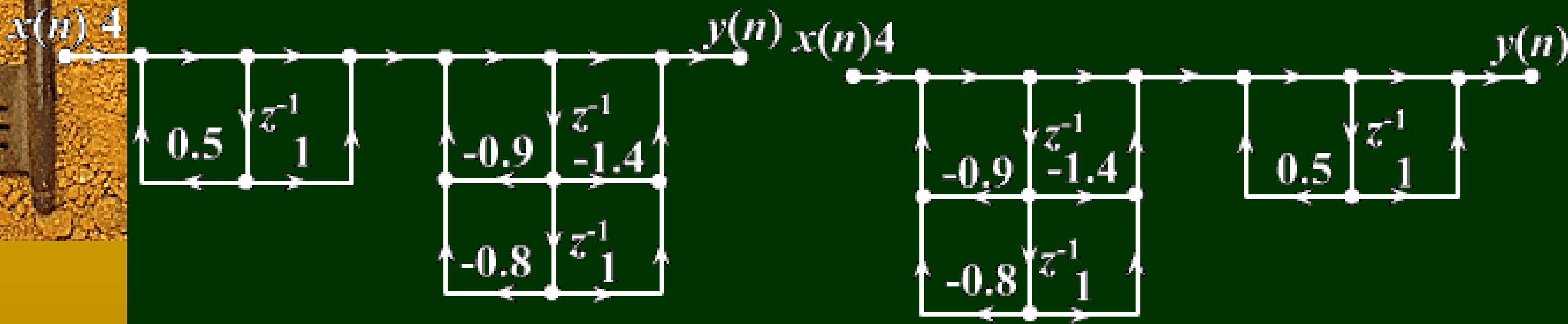
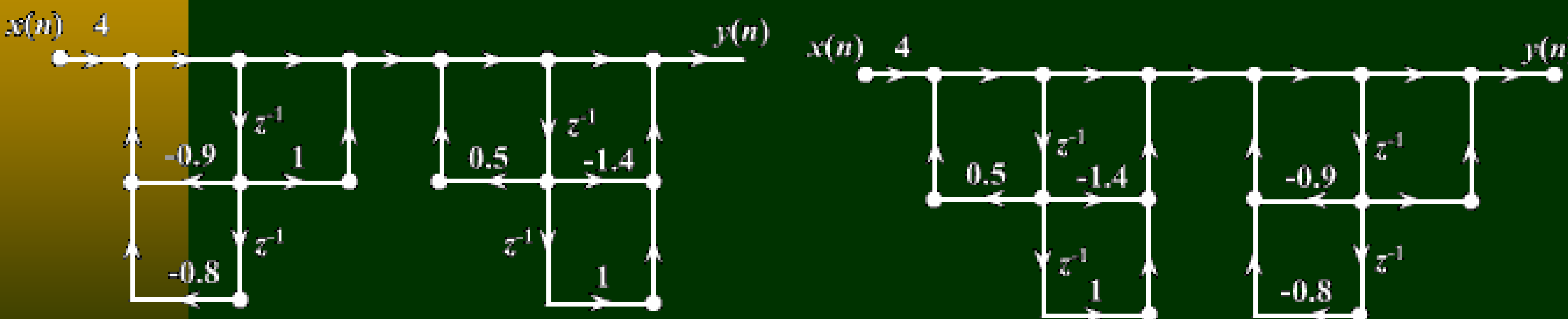


图 P5-2(a)



图P5-2(b)

3、给出以下系统函数的并联型实现：

$$H(z)=\frac{5.2+1.58z^{-1}+1.41z^{-2}-1.6z^{-3}}{\left(1-0.5z^{-1}\right)\left(1+0.9z^{-1}+0.8z^{-2}\right)}$$

解：对此函数进行因式分解并展成部分分式，得

$$H(z)=\frac{5.2+1.58z^{-1}+1.41z^{-2}-1.6z^{-3}}{\left(1-0.5z^{-1}\right)\left(1+0.9z^{-1}+0.8z^{-2}\right)}$$

$$=4+\frac{0.2}{1-0.5z^{-1}}+\frac{1+0.3z^{-1}}{1+0.9z^{-1}+0.8z^{-2}}$$

$$H(z)=G_0+\sum_{k=1}^{[(N+1)/2]}\frac{\gamma_{0k}+\gamma_{1k}z^{-1}}{1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2}}$$

则 $G_0=4$

$\alpha_{11}=0.5 \quad \alpha_{21}=0 \qquad \alpha_{12}=-0.9 \quad \alpha_{22}=-0.8$

$\gamma_{01}=0.2 \quad \gamma_{11}=0 \qquad \gamma_{02}=1 \quad \gamma_{12}=0.3$

$$G_0 = 4$$

$$\alpha_{11} = 0.5 \quad \alpha_{21} = 0 \qquad \alpha_{12} = -0.9 \quad \alpha_{22} = -0.8$$

$$\gamma_{01} = 0.2 \quad \gamma_{11} = 0 \qquad \gamma_{02} = 1 \quad \gamma_{12} = 0.3$$

则并联结构：

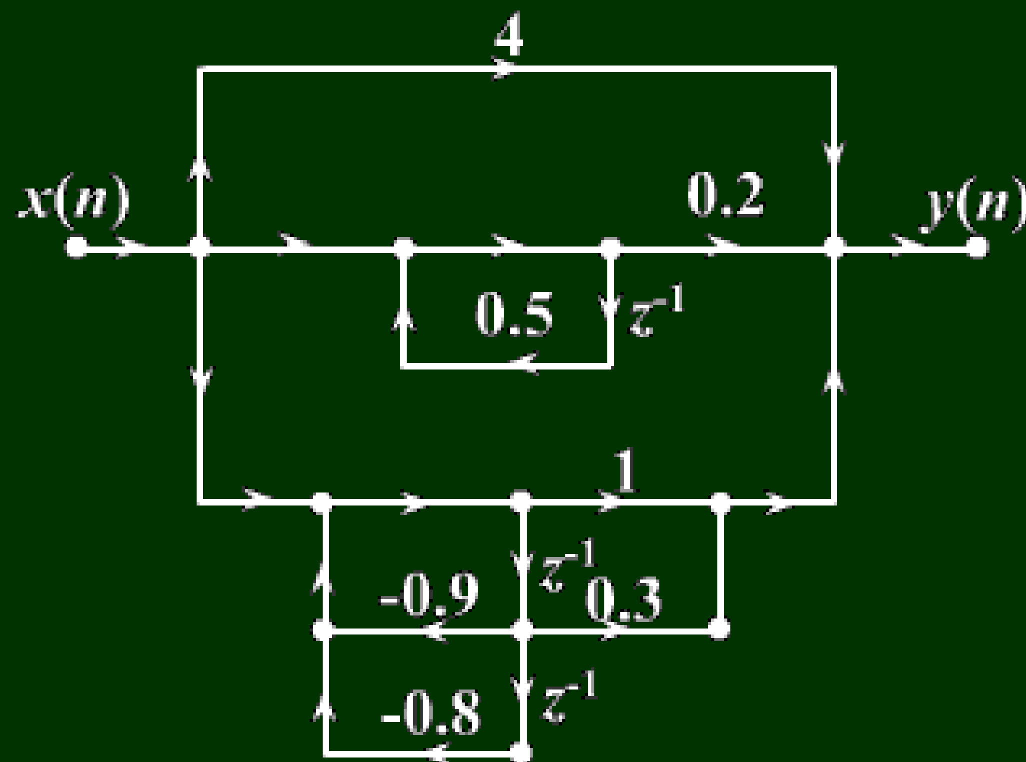


图 P5-3

4、用横截型结构实现以下系统函数：

$$H(z)=\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+6z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{6}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)$$

解：

$$H(z)=\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+6z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{6}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}-2z^{-1}+z^{-2}\right)\left(1+\frac{1}{6}z^{-1}+6z^{-1}+z^{-2}\right)\left(1-z^{-1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}\right)\left(1+\frac{37}{6}z^{-1}+z^{-2}\right)\left(1-z^{-1}\right)$$

$$=1+\frac{8}{3}z^{-1}-\frac{205}{12}z^{-2}+\frac{205}{12}z^{-3}-\frac{8}{3}z^{-4}-z^{-5}$$

$$H(z)=1+\frac{8}{3}z^{-1}-\frac{205}{12}z^{-2}+\frac{205}{12}z^{-3}-\frac{8}{3}z^{-4}-z^{-5}$$

则横截型结构：

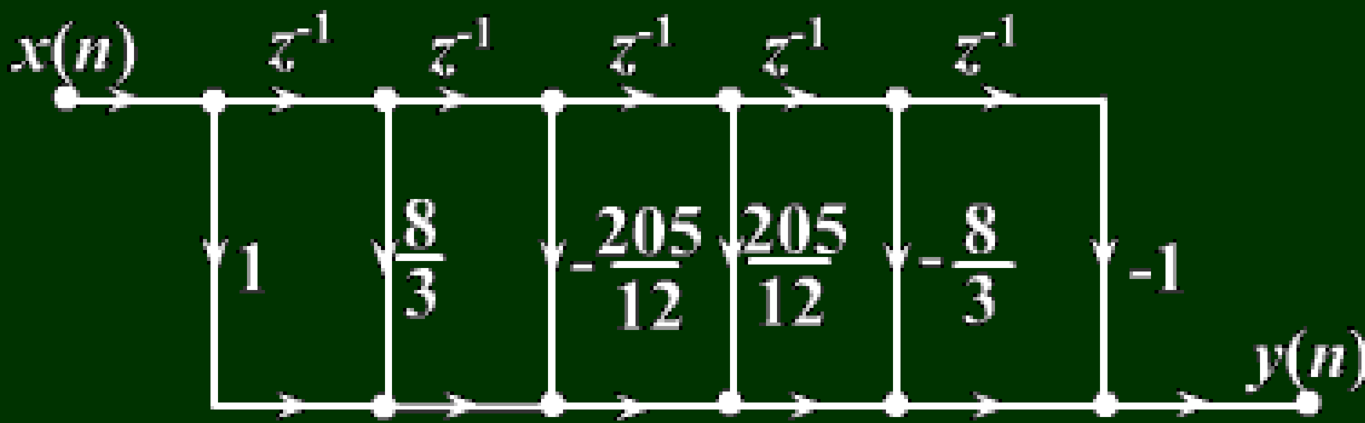


图 P5-4

6、用频率抽样结构实现以下系统函数：

$$H(z)=\frac{5-2z^{-3}-3z^{-6}}{1-z^{-1}}$$

抽样点数$N=6$，修正半径$r=0.9$。

解：由$N=6$，得频率抽样型结构：

$$H(z)=\frac{1}{6}\left(1-r^{6}z^{-6}\right)\left[H_0(z)+H_3(z)+\sum_{k=1}^{2}H_k(z)\right]$$

又

$$H(z)=\frac{\left(5+3z^{-3}\right)\left(1-z^{-3}\right)}{1-z^{-1}}\rightarrow\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}+z^{-2}\right)$$

$$=\left(5+3z^{-3}\right)\left(1+z^{-1}+z^{-2}\right)$$

由 $H(z)=\left(5+3z^{-3}\right)\left(1+z^{-1}+z^{-2}\right)$

得

$$H(k)=H(z)\Big|_{z=2\pi k/N}=\left(5+3e^{-j\pi k}\right)\left(1+e^{-j\frac{\pi}{3}k}+e^{-j\frac{2\pi}{3}k}\right)$$

即 $H(0)=24$ $\quad H(1)=2-2\sqrt{3}j$ $\quad H(2)=0$

$H(3)=2$ $\quad H(4)=0$ $\quad H(5)=2+2\sqrt{3}j$

则

$$H_0(z)=\frac{H(0)}{1-rz^{-1}}=\frac{24}{1-0.9z^{-1}}$$

$$H_3(z)=\frac{H(3)}{1+rz^{-1}}=\frac{2}{1+0.9z^{-1}}$$

然后求$H_k(z)$

$$H_k(z)=\frac{\beta_{0k}+\beta_{1k}z^{-1}}{1-z^{-1}2r\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)+r^2z^{-2}}$$

其中 $\beta_{0k}=2\,\mathrm{Re}\left[H(k)\right]$ $\quad\beta_{1k}=-2r\,\mathrm{Re}\left[H(k)W_N^k\right]$

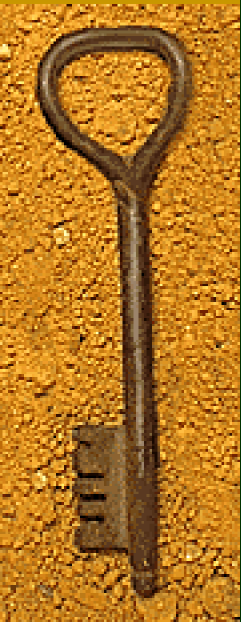
$k=1$时

$$H_1(z)=\frac{\beta_{01}+\beta_{11}z^{-1}}{1-2z^{-1}r\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)+r^2z^{-2}}$$

$$\beta_{01}=2\,\mathrm{Re}\left[H(1)\right]=4 \qquad H(1)=2-2\sqrt{3}j$$

$$\beta_{11}=(-2)\cdot(0.9)\cdot\mathrm{Re}\left[H(1)W_6^1\right]=3.6$$

$$\therefore\ H_1(z)=\frac{4+3.6z^{-1}}{1-0.9z^{-1}+0.81z^{-2}}$$



$$H_k(z)=\frac{\beta_{0k}+\beta_{1k}z^{-1}}{1-z^{-1}2r\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)+r^2z^{-2}}$$

其中 $\beta_{0k}=2\operatorname{Re}\left[H(k)\right]\quad \beta_{1k}=-2r\operatorname{Re}\left[H(k)W_N^k\right]$

$k=2$时 $\quad H(2)=0$

$$\beta_{02}=\beta_{12}=0$$

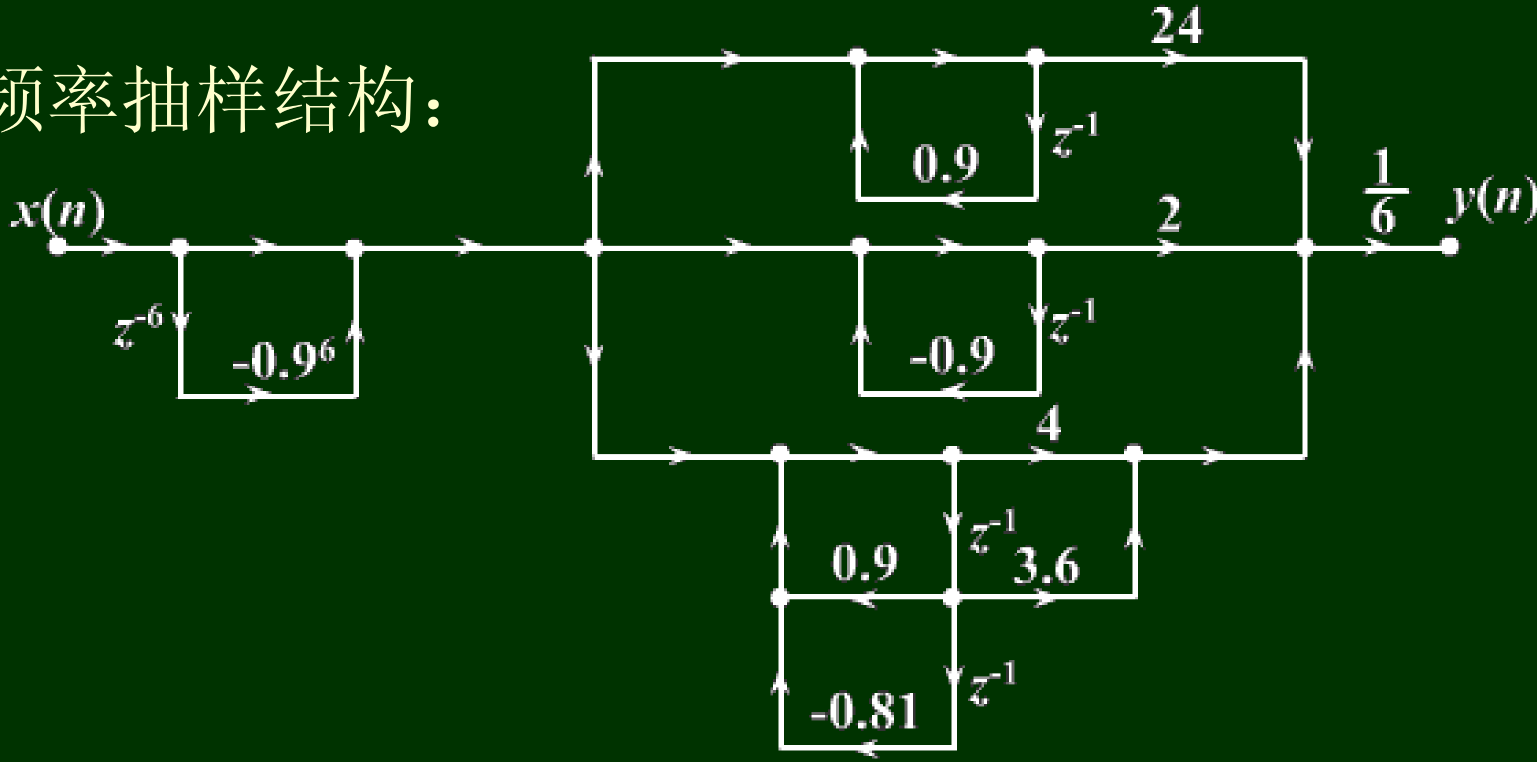
$$\therefore\ H_2(z)=0$$

$$H(z)=\frac{1}{6}\left(1-r^6z^{-6}\right)\left[H_0(z)+H_3(z)+\sum_{k=1}^{2}H_k(z)\right]$$

$$H_0(z)=\frac{H(0)}{1-rz^{-1}}=\frac{24}{1-0.9z^{-1}}\qquad H_1(z)=\frac{4+3.6z^{-1}}{1-0.9z^{-1}+0.81z^{-2}}$$

$$H_3(z)=\frac{H(3)}{1+rz^{-1}}=\frac{2}{1+0.9z^{-1}}\qquad H_2(z)=0$$

得频率抽样结构：



7、设某FIR数字滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{1}{5}\left(1+3z^{-1}+5z^{-2}+3z^{-3}+z^{-4}\right)$$

试画出此滤波器的线性相位结构。

解：对系统函数求z反变换，得

$$h(n)=\frac{1}{5}\delta(n)+\frac{3}{5}\delta(n-1)+\delta(n-2)+\frac{3}{5}\delta(n-3)+\frac{1}{5}\delta(n-4)$$

得 $$h(0)=h(4)=\frac{1}{5}=0.2$$

$$h(1)=h(3)=\frac{3}{5}=0.6$$

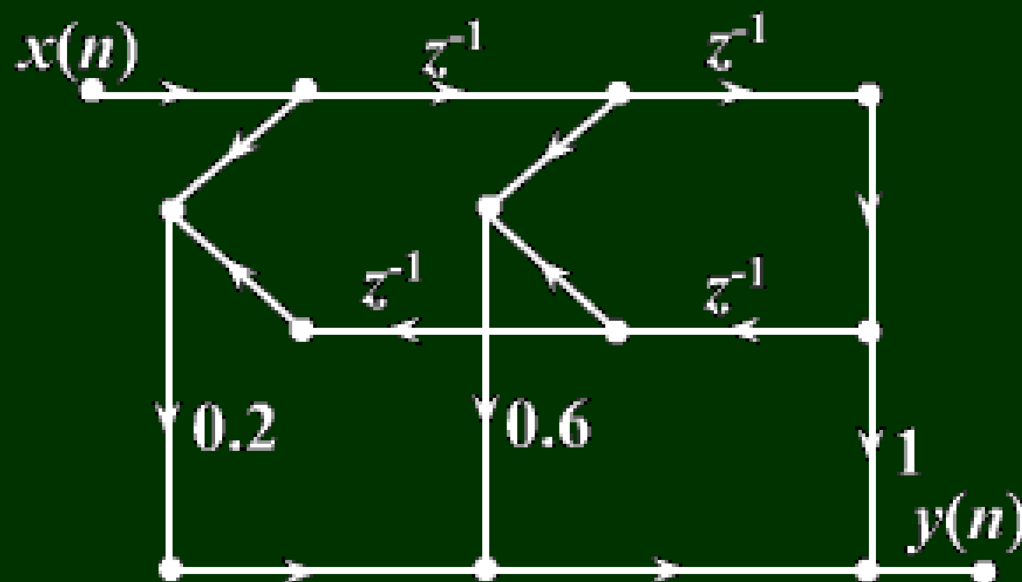
$$h(2)=1$$

$$h(0)=h(4)=\frac{1}{5}=0.2 \qquad h(1)=h(3)=\frac{3}{5}=0.6$$

$$h(2)=1$$

即 $h(n)$ 是偶对称，对称中心在 $n=\dfrac{N-1}{2}=2$ 处，N 为奇数 $(N=5)$。

得线性相位结构：



8、设滤波器差分方程为

$$y(n)=x(n)+x(n-1)+\frac{1}{3}y(n-1)+\frac{1}{4}y(n-2)$$

试用直接I型、典范型及一阶节的级联型、一阶节的并联型结构实现此差分方程。

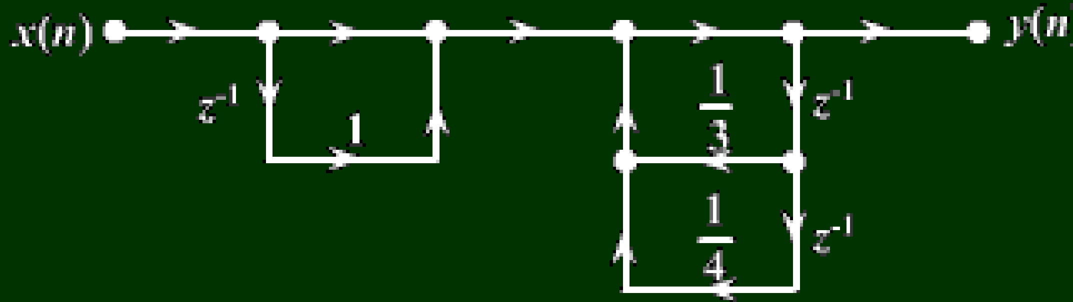
解：根据 $y(n)=\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$

或者由 $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}-\frac{1}{4}z^{-2}}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$，得

$$a_1=\frac{1}{3}\quad a_2=\frac{1}{4}\quad b_0=1\quad b_1=1$$

$$a_1 = \frac{1}{3} \quad a_2 = \frac{1}{4} \quad b_0 = 1 \quad b_1 = 1$$

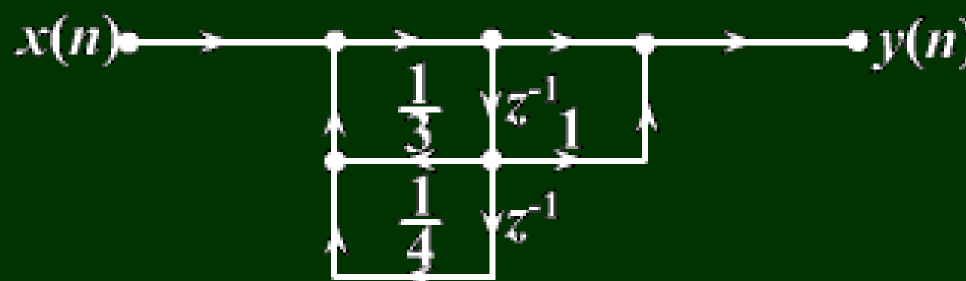
得直接I型结构：



直接I型

图P5-8(a)

典范型结构：



直接II型

将 $H(z)$ 因式分解为一阶节：

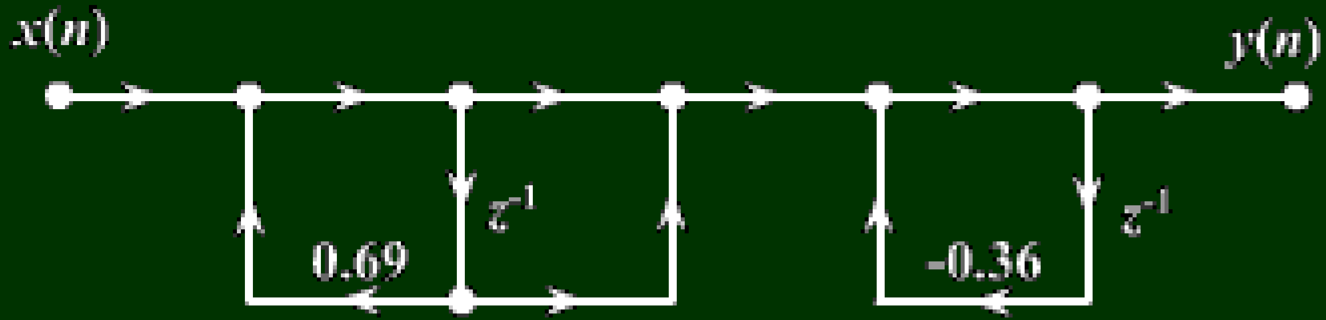
$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}-\frac{1}{4}z^{-2}}$$

$$=\frac{1+z^{-1}}{\left(1-\frac{1+\sqrt{10}}{6}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{10}}{6}z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{1+z^{-1}}{\left(1-0.69z^{-1}\right)\left(1+0.36z^{-1}\right)}$$

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{\left(1-0.69z^{-1}\right)\left(1+0.36z^{-1}\right)}$$

得一阶节级联型结构：



级联型

图*P*5-8(*c*)

将$H(z)$分解为一阶节部分分式：

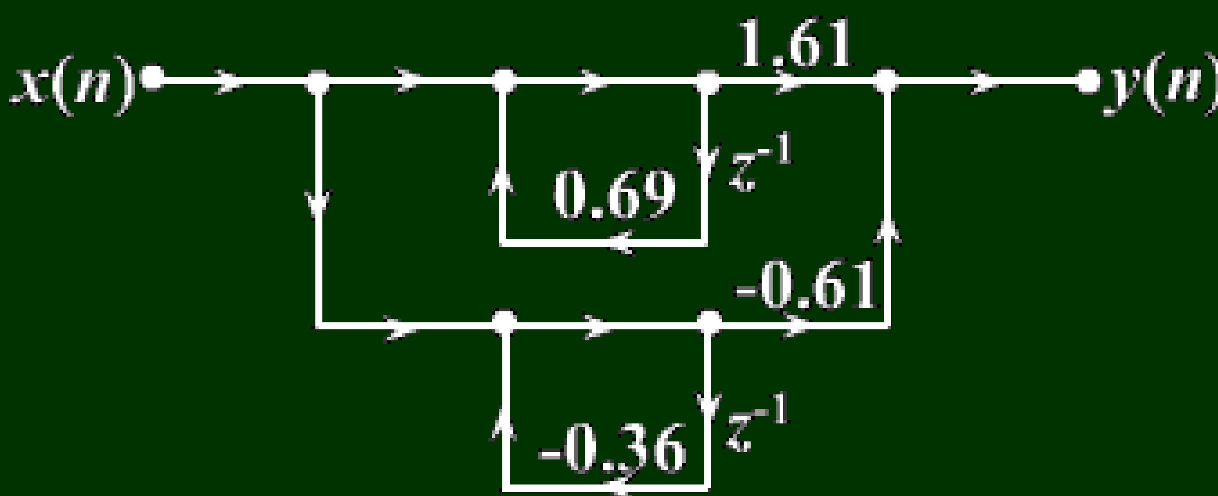
$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{\left(1-\frac{1+\sqrt{10}}{6}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{10}}{6}z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{7}{20}\sqrt{10}}{1-\frac{1+\sqrt{10}}{6}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{7}{20}\sqrt{10}}{1-\frac{1-\sqrt{10}}{6}z^{-1}}$$

$$=\frac{1.61}{1-0.69z^{-1}}-\frac{0.61}{1+0.36z^{-1}}$$

$$H(z)=\frac{1.61}{1-0.69z^{-1}}-\frac{0.61}{1+0.36z^{-1}}$$

得一阶节并联结构：



并联型

图 *P*5-8(*d*)

第六章习题讲解

1. 用冲激响应不变法将以下$H_a(s)$变换为$H(z)$，抽样周期为T 。

（1） $H_a(s)=(s+a)/\left[(s+a)^2+b^2\right]$

解：冲激响应不变法：

$$H_a(s)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s-s_k}$$

$$\downarrow$$

$$H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{TA_k}{1-e^{s_kT}z^{-1}}$$

将$H_a(s)$部分分式分解：

$$H_a(s)=\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+a+jb}+\frac{1}{s+a-jb}\right]$$

$$H_a(s)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+a+jb}+\frac{1}{s+a-jb}\right]$$

经冲激响应不变法变换后得：

$$H(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{T}{1-e^{-(a+jb)T}z^{-1}}+\frac{T}{1-e^{-(a-jb)T}z^{-1}}\right]$$

$$=T\cdot\frac{1-e^{-aT}z^{-1}\cos(bT)}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos(bT)+e^{-2aT}z^{-2}}$$

3. 设有一模拟滤波器 $H_a(s)=1/(s^2+s+1)$ 抽样周期 $T=2$，试用双线性变换法将它转变为数字系统函数 $H(z)$

解：由变换公式 $s=c\cdot\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

及 $c=\dfrac{2}{T}$, $T=2$, 可得 $s=\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

$$\therefore H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$=\frac{1}{\left(\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2+\left(\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+1}=\frac{\left(1+z^{-1}\right)^2}{3+z^{-2}}$$

4. 要求从二阶巴特沃思模拟滤波器用双线性变换导出一低通数字滤波器，已知3dB截止频率为100Hz，系统抽样频率为1kHz。

解：归一化的二阶巴特沃思滤波器的系统函数为：

$$H_a(s)=\frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}=\frac{1}{s^2+1.4142136s+1}$$

则将 $s=s/\Omega_c$ 代入，得出截止频率为 $\Omega_c\left(100\times 2\pi\right)$ 的模拟原型为

$$H_a(s)=\frac{1}{\left(\frac{s}{200\pi}\right)^2+1.4142136\left(\frac{s}{200\pi}\right)+1}$$

$$=\frac{394784.18}{s^2+888.58s+394784.18}$$

$$H_a(s)=\frac{394784.18}{s^2+888.58s+394784.18}$$

经双线性变换得数字滤波器的系统函数：

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \qquad T=1/f_s=1/10^3(s)$$

$$=\frac{394784.18}{\left(2\times10^3\cdot\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2+888.58\times\left(2\times10^3\cdot\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+394784.18}$$

$$=\frac{0.064\left(1+2z^{-1}+z^{-2}\right)}{1-1.1683z^{-1}+0.4241z^{-2}}$$

5．试导出二阶巴特沃思低通滤波器的系统函数。设 $\Omega_c = 3rad/s$

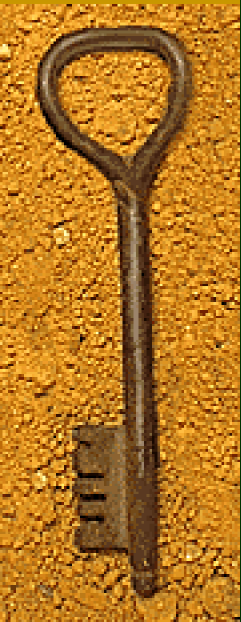
解：由幅度平方函数：$\left|H\left(j\Omega\right)\right|^2 = \dfrac{1}{1+\left(\Omega/\Omega_c\right)^4}$

令 $\Omega^2 = -s^2$，则有

$$H_a\left(s\right)H_a\left(-s\right) = \frac{1}{1+\left(s/\Omega_c\right)^4}$$

各极点满足下式

$$s_k = \Omega_c e^{j\left[\frac{\pi}{2}+\frac{2k-1}{4}\pi\right]} \qquad k = 1,2,3,4$$



则 $k=1,2$时，所得的 s_k 即为$H_a(s)$的极点

$$s_1=\Omega_c e^{j\frac{3}{4}\pi}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}+j\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$s_2=\Omega_c e^{j\frac{4}{5}\pi}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}-j\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

由以上两个极点构成的系统函数为

$$H_a(s)=\frac{k_0}{(s-s_1)(s-s_2)}=\frac{k_0}{s^2+3\sqrt{2}s+9}$$

代入$s=0$时$H_a(s)=1$，可得$K_0=9$，所以

$$H_a(s)=\frac{9}{s^2+3\sqrt{2}s+9}$$

6．试导出二阶切贝雪夫低通滤波器的系统函数。已知通带波纹为2dB，截止频率为 $\Omega_c = 2rad/s$（试用不同于书本的解法解答）。

解：由 $\delta_1 = 2dB$，得

$$\varepsilon^2 = 10^{\frac{\delta_1}{10}} - 1 = 10^{0.2} - 1 = 0.5848932$$

则 $\varepsilon = \sqrt{0.5848932} = 0.7647831$

因为截止频率为 $\Omega_c = 2rad/s$，则

$$\sigma_1 = -a\Omega_c \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -sh\left[\frac{1}{N} sh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]\cdot \Omega_c \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -sh\left[\frac{1}{2} sh^{-1}\left(\frac{1}{0.765}\right)\right]\cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -0.8038$$

$$\Omega_1 = b\Omega_c \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = ch\left[\frac{1}{N} sh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]\cdot \Omega_c \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= ch\left[\frac{1}{2} sh^{-1}\left(\frac{1}{0.765}\right)\right]\cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 1.6267$$

则 $s_1=-0.8038+j1.6267$，$s_2=s_1^*=-0.8038-j1.6267$

$$\therefore H_a(s)=\frac{A}{(s-s_1)(s-s_2)}=\frac{2.615}{s^2+1.608s+3.292}$$

其中，因为 $N=2$ 是偶数，故 $s=0(\Omega=0)$ 时，有

$$H_a(0)=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}=0.7943$$

可求得　$A=3.2922\times0.7943=2.6151$

或者由公式得 $A=\dfrac{\Omega_c^N}{\varepsilon\cdot2^{N-1}}=\dfrac{2^2}{0.7648\times2}=2.6151$

17. 图P6-17表示一个数字滤波器的频率响应。

1）用冲激响应不变法，求原型模拟滤波器频率响应。

2）用双线性变换法，求原型模拟滤波器频率响应。

解：由图可得

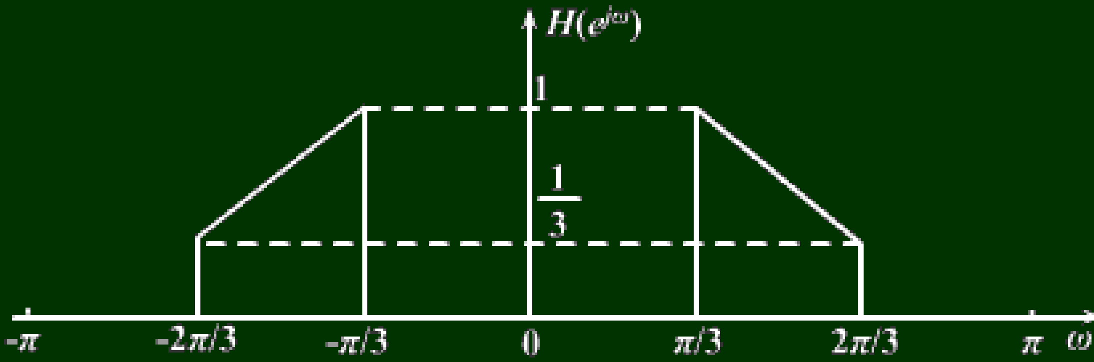
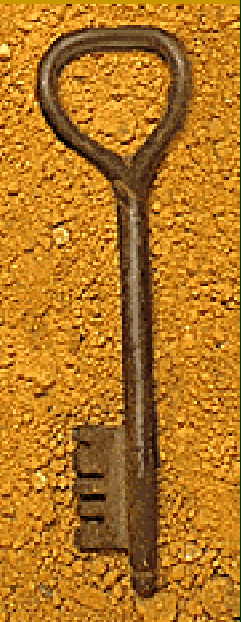


图 P6-17

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\omega+\dfrac{5}{3} & -\dfrac{2\pi}{3}\le\omega\le-\dfrac{\pi}{3}\\ -\dfrac{2}{\pi}\omega+\dfrac{5}{3} & \dfrac{\pi}{3}\le\omega\le\dfrac{2\pi}{3}\\ 0 & [-\pi,\pi]\text{的其他}\omega\end{cases}$$



（1）冲激响应不变法

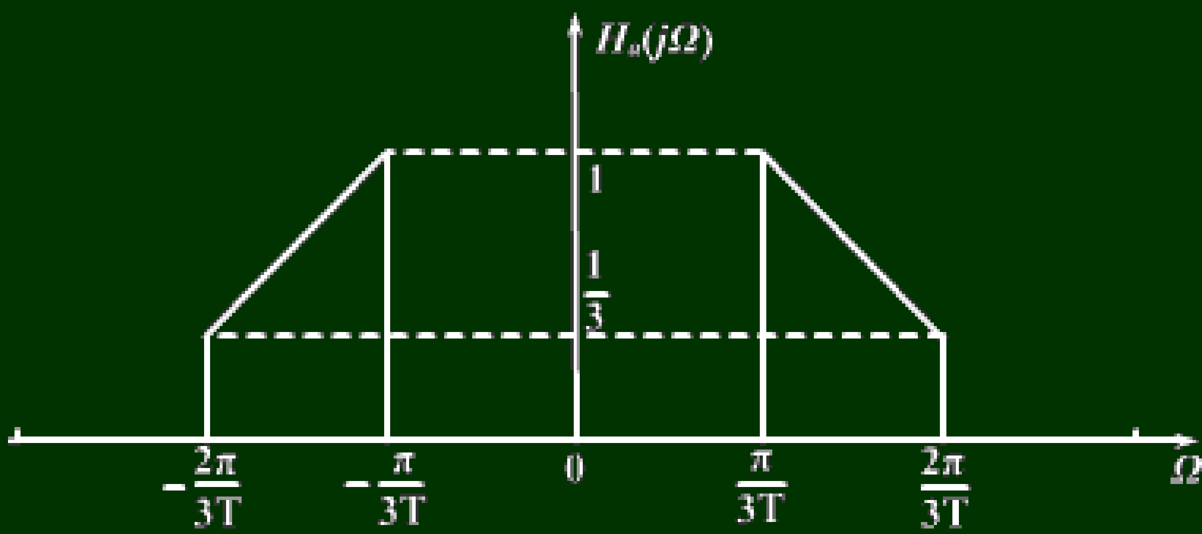
因为ω大于折叠频率π时$H\left(e^{j\omega}\right)$为零，故用此法无失真。

$$H\left(e^{j\omega}\right)=H_a\left(j\Omega\right)$$

又由$\Omega=\dfrac{\omega}{T}$，则有

$$H_a\left(j\Omega\right)=H\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\Omega T}=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\Omega T+\dfrac{5}{3}, & -\dfrac{2\pi}{3T}\le\Omega\le-\dfrac{\pi}{3T}\\ -\dfrac{2}{\pi}\Omega T+\dfrac{5}{3}, & \dfrac{\pi}{3T}\le\Omega\le\dfrac{2\pi}{3T}\\ 0 & \text{其他}\Omega\end{cases}$$

$$H_a(j\Omega)=H\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\Omega T}=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\Omega T+\dfrac{5}{3}, & -\dfrac{2\pi}{3T}\le\Omega\le-\dfrac{\pi}{3T}\\[2ex] -\dfrac{2}{\pi}\Omega T+\dfrac{5}{3}, & \dfrac{\pi}{3T}\le\Omega\le\dfrac{2\pi}{3T}\\[2ex] 0 & \text{其他}\Omega\end{cases}$$



（2）双线性变换法

根据双线性变换公式：

$$H_a(j\Omega)=H_a\left(jc\cdot\tan\frac{\omega}{2}\right)$$

得：$\Omega=c\cdot\tan\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$

$$\omega=2\arctan\left(\frac{\Omega}{c}\right)$$

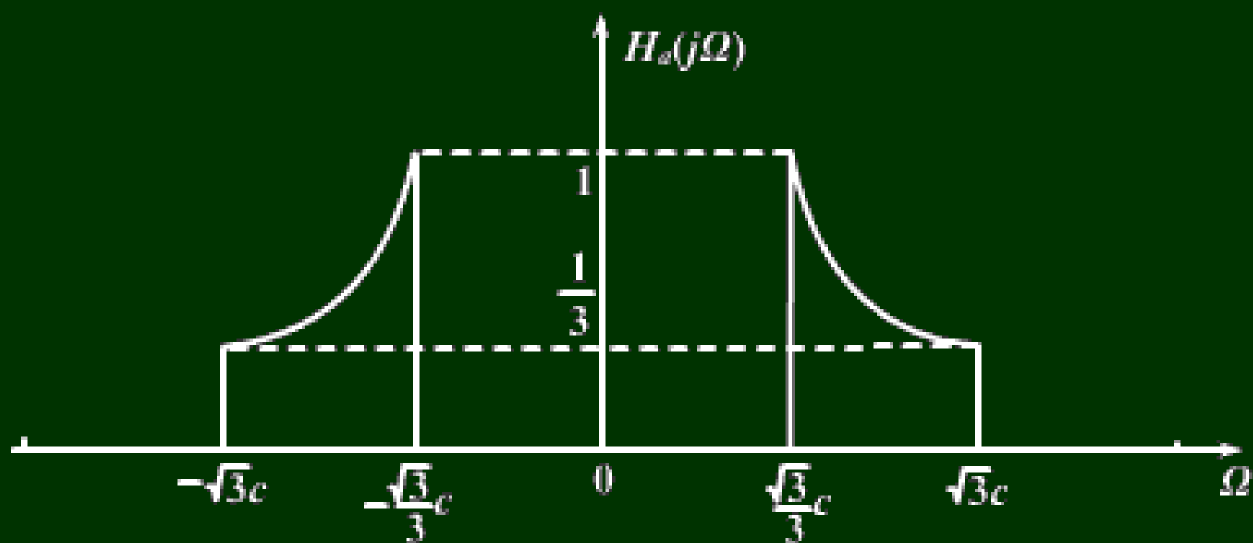
$$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\omega+\dfrac{5}{3} & -\dfrac{2\pi}{3}\le\omega\le-\dfrac{\pi}{3}\\ -\dfrac{2}{\pi}\omega+\dfrac{5}{3} & \dfrac{\pi}{3}\le\omega\le\dfrac{2\pi}{3}\\ 0 & [-\pi,\pi]\text{的其他}\omega\end{cases}$$

$$\omega=2\arctan\left(\frac{\Omega}{c}\right)$$

$$\Omega=c\cdot\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$H_a\left(j\Omega\right)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi}\arctan\dfrac{\Omega}{c}+\dfrac{5}{3} & -\sqrt{3}c\le\Omega\le-\dfrac{\sqrt{3}}{3}c\\ -\dfrac{4}{\pi}\arctan\dfrac{\Omega}{c}+\dfrac{5}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3}c\le\Omega\le\sqrt{3}c\\ 0 & \text{其他}\Omega\end{cases}$$

$$H_a(j\Omega)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi}\arctan\dfrac{\Omega}{c}+\dfrac{5}{3} & -\sqrt{3}c\le\Omega\le-\dfrac{\sqrt{3}}{3}c\\ -\dfrac{4}{\pi}\arctan\dfrac{\Omega}{c}+\dfrac{5}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3}c\le\Omega\le\sqrt{3}c\\ 0 & \text{其他}\Omega\end{cases}$$



第七章习题讲解

1. 用矩形窗设计一个FIR线性相位低通数字滤波器。已知ω_c=0.5π，$N=21$。求出$h(n)$并画出$20\lg\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$曲线。

解：线性相位理想低通滤波器

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & -\omega_c\le\omega\le\omega_c \\ 0 & -\pi\le\omega\le-\omega_c,\omega_c\le\omega\le\pi \end{cases}$$

其单位抽样响应：

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{-j\omega\alpha}e^{j\omega n}d\omega=\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin\left[\omega_c(n-\alpha)\right]}{\omega_c(n-\alpha)}$$

$$h_d(n)=\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin\left[\omega_c(n-\alpha)\right]}{\omega_c(n-\alpha)}$$

其中 $\alpha=\frac{N-1}{2}=10 \qquad \omega_c=0.5\pi$

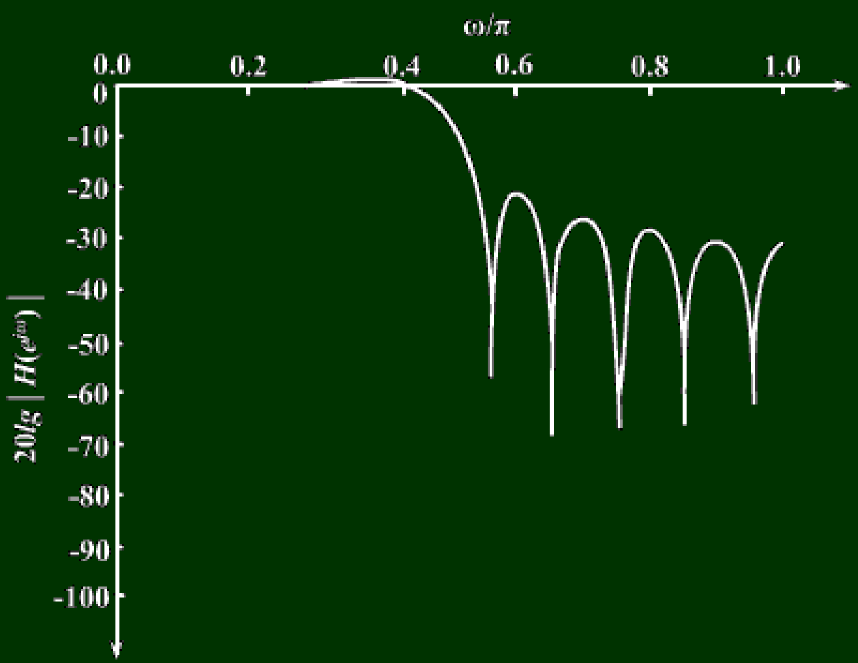
用矩形窗截断得FIR滤波器：

$$h(n)=h_d(n)w(n)=\begin{cases}\dfrac{-\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)}{\pi(n-10)}, & 0\le n\le 20\\ 0 & n\text{其他}\end{cases}$$

其中$w(n)=R_{21}(n)$是窗函数。

$$h(n)=h_d(n)w(n)=\begin{cases}\dfrac{-\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)}{\pi(n-10)}, & 0\le n\le 20\\[2ex] 0 & n\text{其他}\end{cases}$$

低通滤波器的幅频响应曲线：

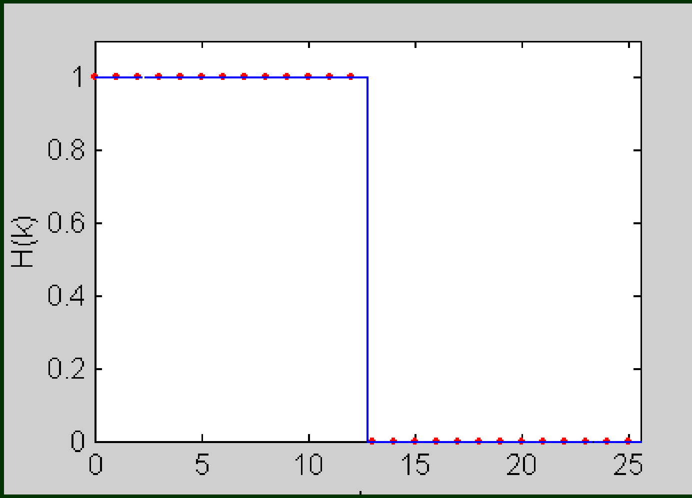


7. 试用频率抽样法设计一个FIR线性相位数字低通滤波器，已知$\omega_c = 0.5\pi$, $N = 51$。

解：根据题意有 $\left|H_d\left(e^{j\omega}\right)\right| = \begin{cases} 1 & 0 \le \omega \le \omega_c \\ 0 & 其它\omega \end{cases}$

按第一种频率抽样，得

$$\left|H(k)\right| = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le Int\left(\dfrac{N\omega_c}{2\pi}\right) = 12 \\ 0, & 13 \le k \le \dfrac{N-1}{2} = 25 \end{cases}$$

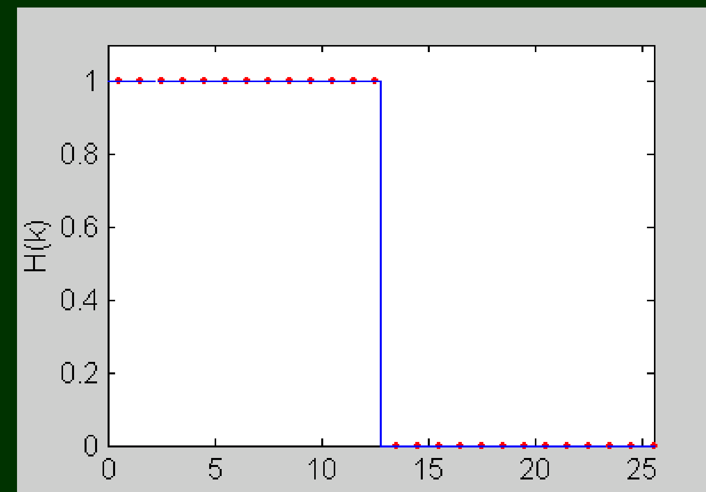


则FIR滤波器的频率响应：

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j25\omega}\left\{\frac{\sin\left(\frac{51}{2}\omega\right)}{51\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \sum_{k=1}^{12}\left[\frac{\sin\left[51\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{51}\right)\right]}{51\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{51}\right)} + \frac{\sin\left[51\left(\frac{\omega}{2} + \frac{k\pi}{51}\right)\right]}{55\sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{k\pi}{51}\right)}\right]\right\}$$

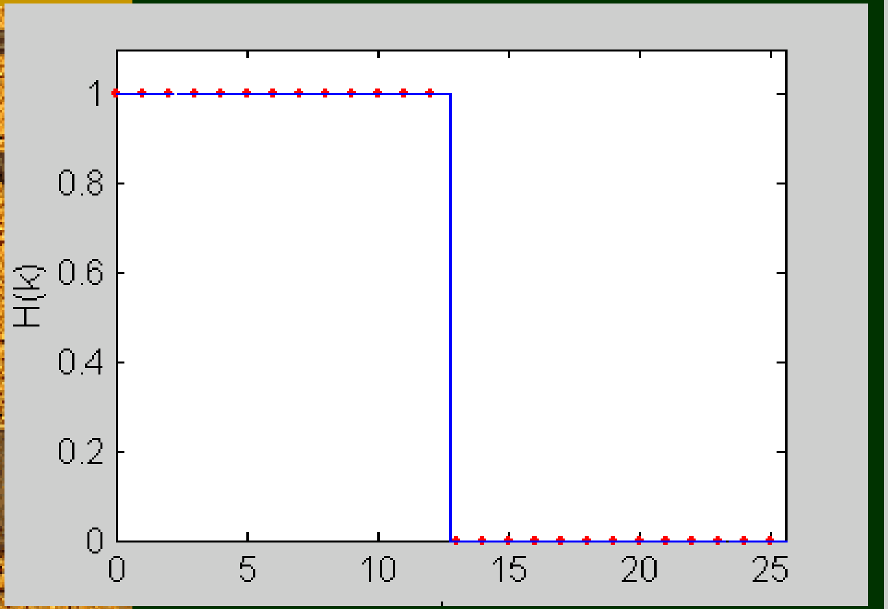
按第二种频率抽样，得

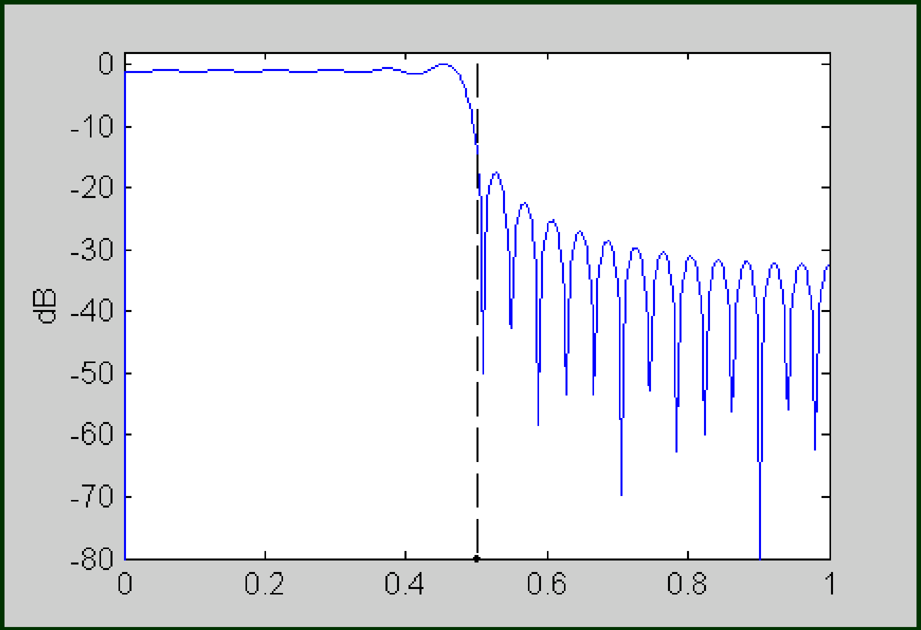
$$\left|H(k)\right| = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le Int\left[\dfrac{N}{2\pi}\left(\omega_c - \dfrac{\pi}{N}\right)\right] = 12 \\ 0, & 13 \le k \le \dfrac{N-1}{2} = 25 \end{cases}$$

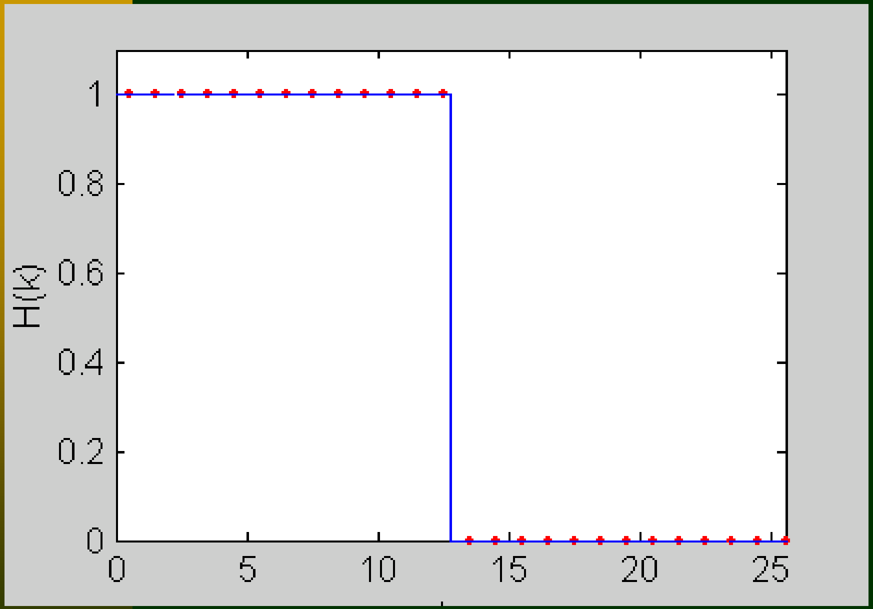


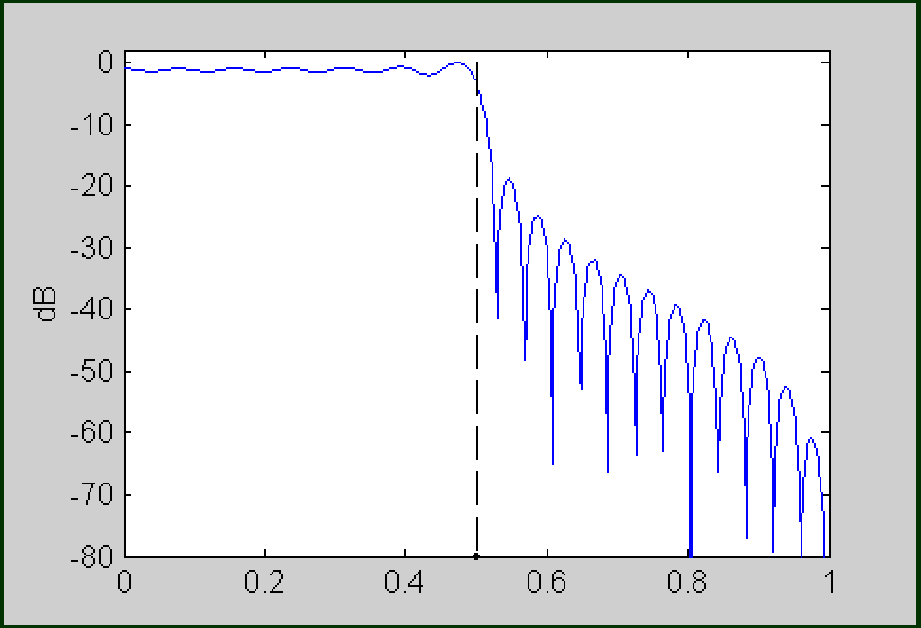
则FIR滤波器的频率响应：

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j25\omega}\sum_{k=0}^{12}\left[\frac{\sin\left\{51\left[\dfrac{\omega}{2} - \dfrac{\pi}{51}\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\right]\right\}}{51\sin\left[\dfrac{\omega}{2} - \dfrac{\pi}{51}\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\right]} + \frac{\sin\left\{51\left[\dfrac{\omega}{2} + \dfrac{\pi}{51}\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\right]\right\}}{51\sin\left[\dfrac{\omega}{2} + \dfrac{\pi}{51}\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\right]}\right]$$


H(k)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
5
10
15
20
25


dB
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


H(k)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
5
10
15
20
25

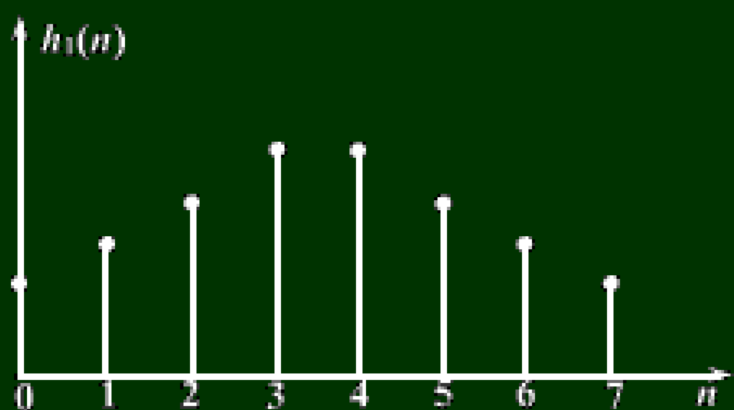

dB
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

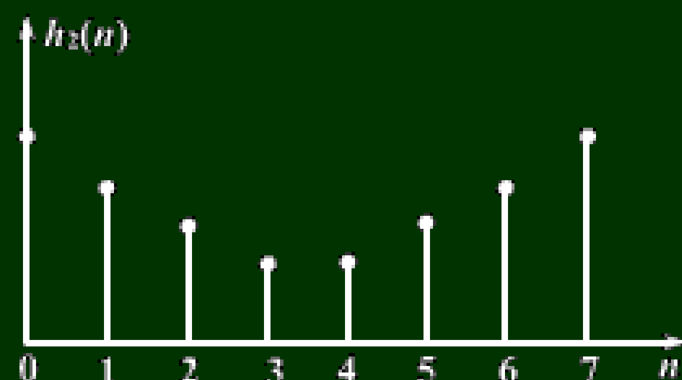
9．已知图P7-9-1中的$h_1(n)$是偶对称序列$N=8$，图P7-9-2中的$h_2(n)$是$h_1(n)$圆周移位（移$\frac{N}{2}=4$位）后的序列。设

$$H_1(k)=DFT\left[h_1(n)\right]\quad H_2(k)=DFT\left[h_2(n)\right]$$

（1）问$|H_1(k)|=|H_2(k)|$成立否？ $\theta_1(k)$与$\theta_2(k)$有什么关系？

（2）$h_1(n),h_2(n)$各构成一个低通滤波器，试问它们是否是线性相位的？延时是多少？





解：（1）根据题意可知

$$h_2((n))_8 = h_1((n-4))_8$$

则 $$H_2(k) = \sum_{n=0}^{7} h_1((n-4))_8 W_8^{nk} R_8(n)$$

$$\overset{i=n-4}{=} \sum_{i=-4}^{3} \tilde{h}_1(i) W_8^{ki} W_8^{4k} = W_8^{4k} \sum_{i=0}^{7} \tilde{h}_1(i) W_8^{ki}$$

$$= H_1(k) W_8^{4k}$$

由上式可以看出

$$|H_2(k)| = |H_1(k)|$$

$$\theta_2(k) = \theta_1(k) - \frac{2\pi}{8} \cdot 4k = \theta_1(k) - k\pi$$

（2）$h_1(n), h_2(n)$各构成低通滤波器时，

由于都满足偶对称，因此都是线性相位的。

延时为

$$\alpha = \frac{N-1}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

10．请选择合适的窗函数及N来设计一个线性相位低通滤波器

$$H_d\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & 0\le\omega\le\omega_c \\ 0, & \omega_c\le\omega\le\pi \end{cases}$$

要求其最小阻带减为－45dB，过渡带宽为 $\frac{8}{51}\pi$

求出$h(n)$并画出 $20\lg\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$曲线（设$\omega_c=0.5\pi$）

解：根据低通滤波器的最小阻减为－45dB，查表，应选择海明窗：

$$w(n)=\left[0.54-0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]R_N(n)$$

过渡带宽应满足：$\dfrac{6.6\pi}{N}<\dfrac{8\pi}{51}$　　得 $N=43$

又求得理想低通滤波器的单位抽样响应为：

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{-j\omega\alpha}e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\frac{\sin\left[\omega_c(n-\alpha)\right]}{\omega_c(n-\alpha)}$$

其中：

$$\alpha=\frac{(N-1)}{2}=21$$

$$w(n)=\left[0.54-0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]R_N(n)$$

$$h_d(n)=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\frac{\sin\left[\omega_c(n-\alpha)\right]}{\omega_c(n-\alpha)}$$

$$N=43$$

$$\alpha=21$$

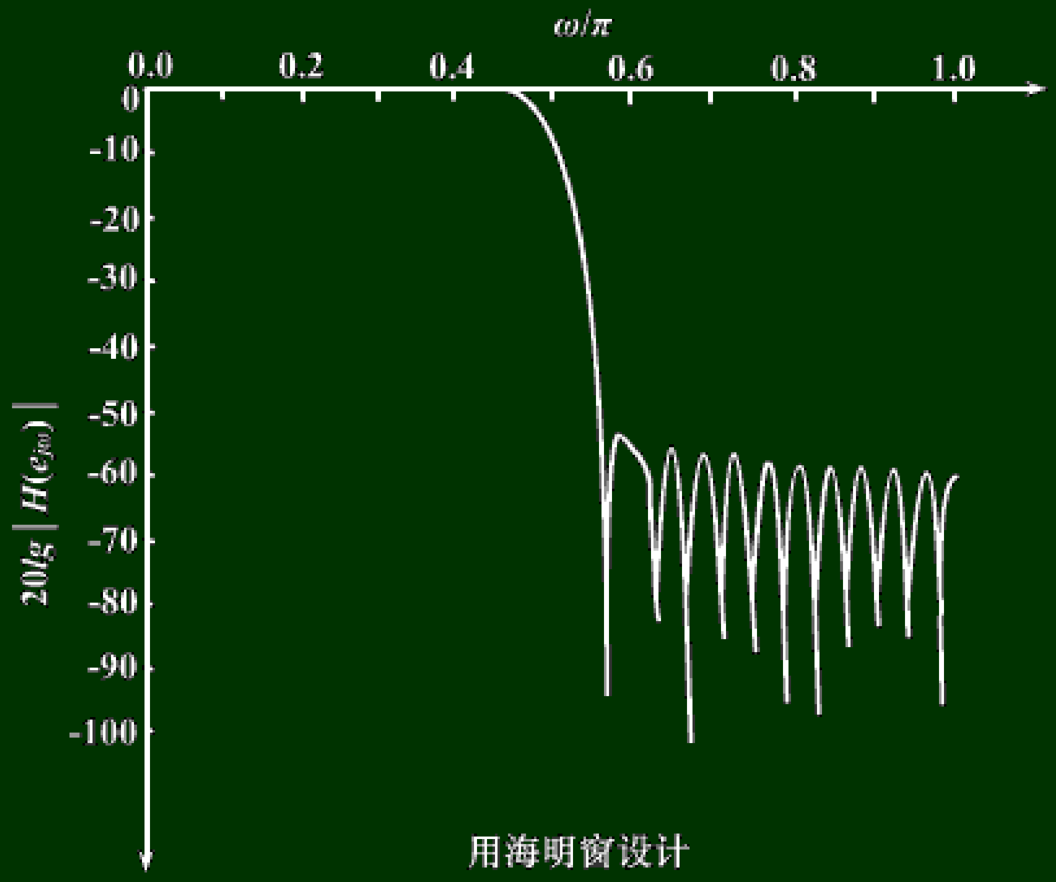
$$\omega_c=0.5\pi$$

线性相位FIR低通滤波器：

$$h(n)=h_d(n)w(n)$$

$$=\begin{cases}\left[0.54-0.46\cos\left(\dfrac{\pi n}{21}\right)\right]\cdot\dfrac{\sin\left[0.5(n-21)\pi\right]}{(n-21)\pi} & 0\le n\le 42\\ 0 & \text{其他}n\end{cases}$$

用海明窗设计得到FIR滤波器的幅频响应：



用海明窗设计

图 P7-10(a)