信号与系统

第八章 Z变换

第八章 Z变换

- §8.1 定义、收敛域
- §8.2 Z变换计算方法
- §8.3 Z变换性质
- §8.4 Z变换性质与 L 变换的关系
- §8.5 Z变换解差分方程
- §8.6 系统函数、BIBO稳定

§8.1 定义、收敛域

- 1.定义： Z变换
  - 序列$x(n)$的双边 Z 变换：

$$X(z) = \mathcal{Z}\left\{x(n)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

  - 序列$x(n)$的单边 Z 变换：

$$X(z) = \mathcal{Z}\left\{x(n)\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

§8.1 定义、收敛域

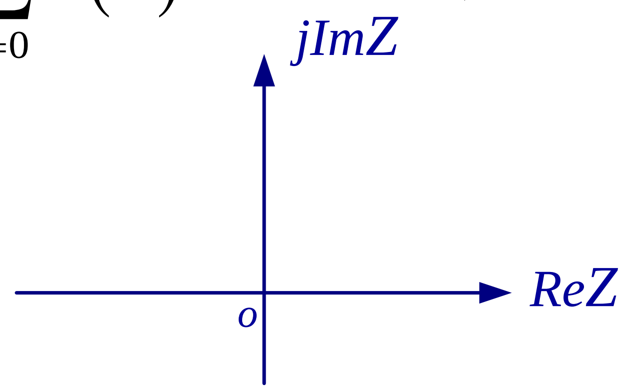
注：

- (1)双边：$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-1}^{-\infty}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{+\infty}x(n)z^{-n}$

  为Laurent级数，其中，$\sum_{n=-1}^{-\infty}x(n)z^{-n}$是Laurent级数

  的正则部，$\sum_{n=0}^{+\infty}x(n)z^{-n}$是主部。

- (2)Z是复平面 上一点



- (3)对因果序列：单边 Z变换=双边 Z变换。

§8.1 定义、收敛域

- 定义：逆 Z变换
  - 对双边 Z变换 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{\mathrm{C}} z^{m-1}X(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{\mathrm{C}} z^{m-1}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}\right]\mathrm{d}z$$

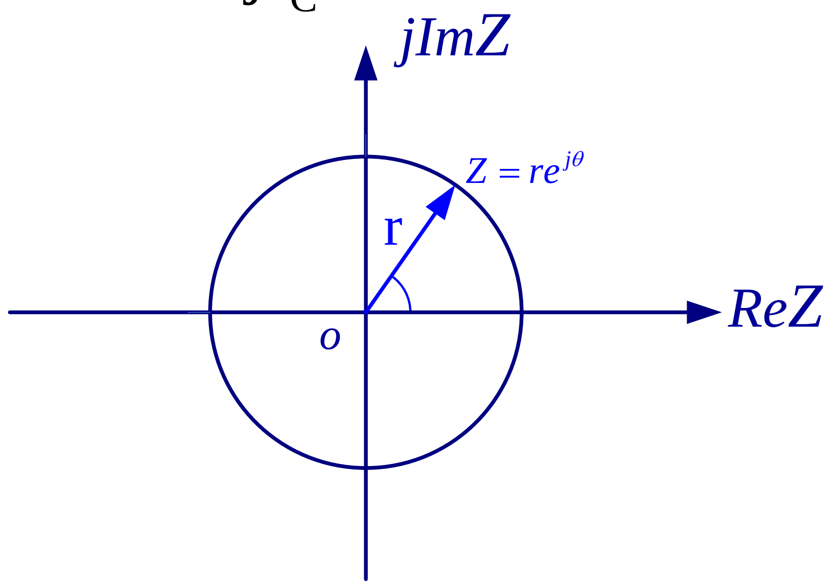
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{\mathrm{C}} z^{m-n-1}\mathrm{d}z\right]$$

$$\because \frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{\mathrm{C}} z^{m-n-1}\mathrm{d}z=\begin{cases}1, m=n\\0, m\neq n\end{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

C为包围原点的闭曲线 $\therefore$ 上式$=x(n)$

§ 8.1 定义、收敛域

– 定义：$x(n) = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\mathrm{C}} z^{m-1} X(z)\,\mathrm{d}z = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$



– 注：$(*)$的求解：$z = re^{j\theta}$, $\mathrm{d}z = r\mathrm{j}e^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{d}\theta$或者留数定理

§8.1 定义、收敛域

- 2. 收敛域
  - (1)定义：对有界$x(n)$，使$\left|X(z)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}\right| \underset{一致}{<} \infty$

    的Z的集合。

  - (2)判别方法：

$$\left|X(z)\right| \le \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x(n) z^{-n}\right| < \infty,\ 令 a_n = x(n) z^{-n},$$

达兰贝尔方法：$\rho \triangleq \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

柯西方法：$\rho \triangleq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|a_n\right|}$

若$\rho < 1$，则收敛；

若$\rho > 1$，则发散；

若$\rho = 1$，则不定。

§ 8.1 定义、收敛域

- 3.序列的分类与收敛域
  - (1)右边序列：$x(n), n \in \{n_1, \infty\}$

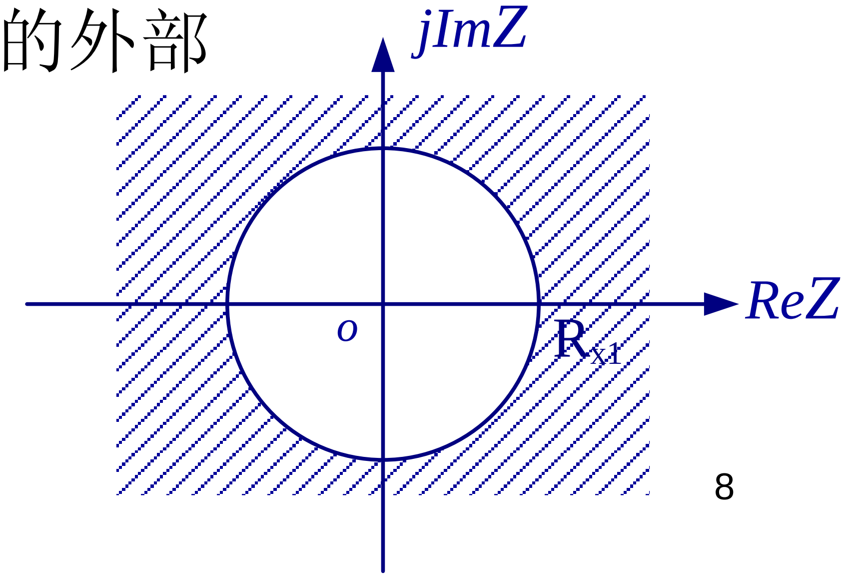
$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x(n) z^{-n}\right|} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x(n)\right|}\left|z^{-1}\right| < 1$$

$$|z| > \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x(n)\right|} \triangleq R_{x_1}$$，圆的外部

$$n_1 < 0, R_{x_1} < |z| < \infty$$

$$n_1 \ge 0, R_{x_1} < |z| \le \infty$$



§8.1 定义、收敛域

– (2)左边序列$x(n), n \in \{-\infty, n_2\}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_1} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-n_2}^{\infty} x(-n) z^{n}$$

$$\rho \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x(-n)\right|}\,|z| < 1$$

$$|z| < \left[\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x(-n)\right|}\right]^{-1} \triangleq R_{x_2}$$,圆的内部

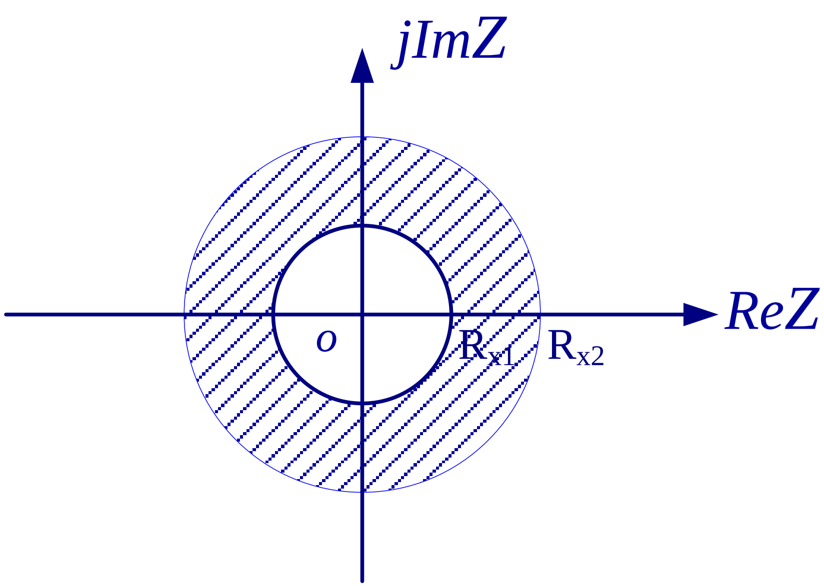
$$n_2 > 0, 0 < |z| < R_{x_2}$$

$$n_2 \le 0, 0 \le |z| < R_{x_2}$$

§8.1 定义、收敛域

– (3)双边序列$x(n), n \in \{-\infty, +\infty\}$

$$X(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}}_{\substack{\text{右边序列} \\ |z|>R_{x_1}}} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n}}_{\substack{\text{左边序列} \\ |z|<R_{x_2}}}$$



若$R_{x_1} < R_{x_2}$,则环状收敛域。

若$R_{x_1} \geq R_{x_2}$,则无公共收敛域。

§ 8.1 定义、收敛域

- 4.典型序列 Z变换
  - (1) Z $\left\{\delta(n)\right\}=1,0\le|z|<\infty$
  - (2) Z $\left\{u(n)\right\}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}},1<|z|\le\infty$
  - (3) Z $\left\{nu(n)\right\}=\sum_{n=0}^{+\infty}nz^{-n}=\frac{z}{(z-1)^{2}},1<|z|\le\infty$

§8.1 定义、收敛域

– (4) $\mathcal{Z}\left\{a^n u(n)\right\}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a},|a|<|z|\leq\infty$

注：因式分解求 Z $^{-1}$变换的基础与 L 变换不同

$$\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}\right\}=\frac{1}{s-\alpha} \quad \text{而} \quad \mathcal{Z}\left\{a^n u(n)\right\}=\frac{z}{z-a}$$

– (5) $\mathcal{Z}\left\{e^{\mathrm{j}\omega_0 n}u(n)\right\}=\frac{1}{1-e^{\mathrm{j}\omega_0 n}z^{-1}},1<|z|\leq\infty$

– (6) $\mathcal{Z}\left\{a^n u(-n-1)\right\}=-\frac{z}{z-a},|z|<|a|$

§8.2 Z变换计算方法

- 1.留数方法

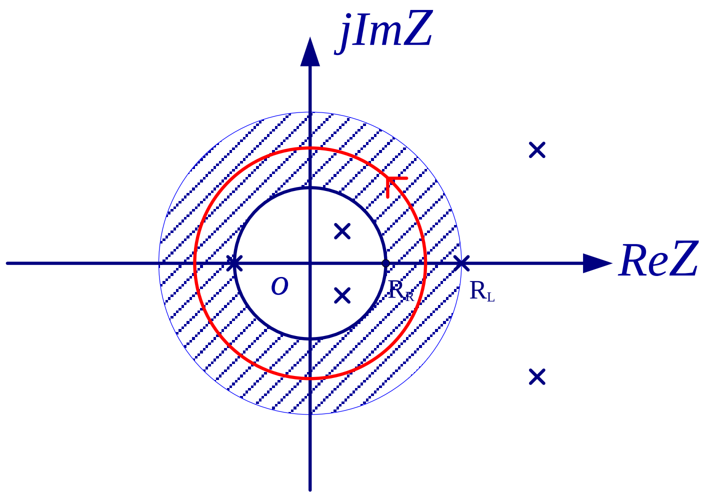
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}x(n)z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}=X_R(z)+X_L(z)$$

$$x(n)=\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C z^{n-1}X(z)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C z^{n-1}X_R(z)\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C z^{n-1}X_L(z)\mathrm{d}z$$

$$=\sum_i\mathrm{Res}\left\{z^{n-1}X_R(z)\right\}\Big|_{\text{极点}p_i}u(n)-\sum_j\mathrm{Res}\left\{z^{n-1}X_L(z)\right\}\Big|_{\text{极点}p_j}u(-n-1)$$

§8.2 Z变换计算方法



注：

– (1)（正）包围：逆时针方向走，极点在围线的左侧；

负包围：逆时针方向走，极点都在围线的右侧。

– (2) 若$z^{n-1}X(z)$的极点z_m为r阶：

$$\mathrm{Res}\left\{z^{n-1}X(z)\right\}_{z=z_m}=\frac{1}{(r-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{r-1}}{\mathrm{d}z^{r-1}}\left[z^{n-1}X(z)(z-z_m)^r\right]\right\}\Big|_{z=z_m}$$

当$r=1$时, $\mathrm{Res}\left\{z^{n-1}X(z)\right\}_{z=z_m}=\left\{z^{n-1}X(z)(z-z_m)\right\}\Big|_{z=z_m}$

§8.2 Z变换计算方法

– 例：$X(z)=\dfrac{z^3+2z^2+1}{z(z-1)(z-0.5)},|z|>1,$求$x(n)=?$

解：

$$x(n)=x(n)u(n)$$

当$n\geq 2$时，$z^{n-1}X(z)$的极点：$z_1=1, z_2=0.5$

$$x(n)=\left\{\left[\frac{z^3+2z^2+1}{z-0.5}z^{n-2}\right]_{z=1}+\left[\frac{z^3+2z^2+1}{z-1}z^{n-2}\right]_{z=0.5}\right\}u(n-2)$$

$$=\left[8-13\times(0.5)^n\right]u(n-2)$$

§8.2 Z变换计算方法

当$n=0$时，$z^{n-1}X(z)$的极点：$z_1=1, z_2=0.5, z_3=z_4=0$

$$x(0)=\delta(n)$$

当$n=0$时，$z^{n-1}X(z)$的极点：$z_1=1, z_2=0.5, z_3=0$

$$x(1)=3.5\delta(n-1)$$

$$\therefore x(n)=\delta(n)+3.5\delta(n-1)+\left[8-13\times(0.5)^n\right]u(n-2)$$

§8.2 Z变换计算方法

- 2.部分分式展开法

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-dz^{-1}}\right\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-d}\right\}=d^{n}u(n)$$

  - 例：

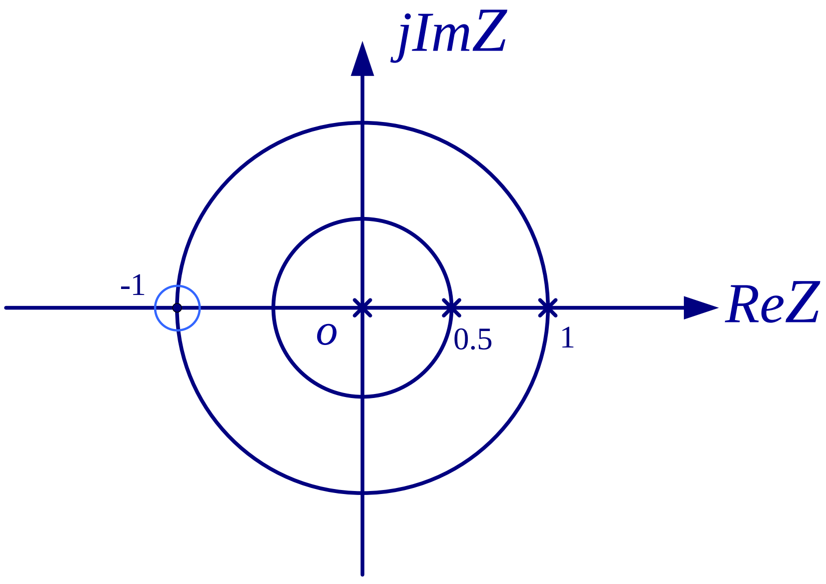
$$X(z)=\frac{z^{2}+2z+1}{z^{2}-1.5z+0.5}=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

求：$x(n)$， $(1)|z|>1;(2)|z|<0.5;(3)0.5<|z|<1$

§8.2 Z变换计算方法

– 解：$X(z)=B+\dfrac{A_1}{1-0.5z^{-1}}+\dfrac{A_2}{1-z^{-1}}$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{B}{z}+\frac{A_1}{z-0.5}+\frac{A_2}{z-1}$$



§8.2 Z变换计算方法

$(1)\ |z|>1$

$$B=\mathrm{Res}\left\{\frac{X(z)}{z}\right\}_{z=0}=X(z)\big|_{z=0}=2$$

$$A_1=\mathrm{Res}\left\{\frac{X(z)}{z}\right\}_{z=0.5}=-9$$

$$A_2=\mathrm{Res}\left\{\frac{X(z)}{z}\right\}_{z=1}=8$$

$$x(n)=2\delta(n)-9\times(0.5)^n u(n)+8u(n)$$

§8.2 Z变换计算方法

$$\left(2\right)\left|z\right|<0.5$$

$$B=2, A_1=9, A_2=-8$$

$$x\left(n\right)=2\delta\left(n\right)+9\times\left(0.5\right)^n u\left(-n-1\right)-8u\left(-n-1\right)$$

$$\left(3\right)0.5<\left|z\right|<1$$

$$B=2, A_1=-9, A_2=-8$$

$$x\left(n\right)=2\delta\left(n\right)-9\times\left(0.5\right)^n u\left(n\right)-8u\left(-n-1\right)$$

§8.3 Z变换性质

- 1.线性性质

$$\mathrm{Z}\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i(n)\right\}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\mathrm{Z}\left\{x_i(n)\right\}$$

- 2.位移
  - (1)双边 Z变换

$$\mathrm{Z}\left\{x(n-m)\right\}=z^{-m}\,\mathrm{Z}\left\{x(n)\right\}=z^{-m}X(z),\quad z\in\text{收敛域}$$

$m>0,$ 右移（延迟）m步；

$m<0,$ 左移（延迟）m步；

引入m步延迟算子, $z^{-m}x(n)\triangleq x(n-m)$

$$\mathrm{Z}\left\{z^{-m}x(n)\right\}=z^{-m}X(z)$$

§8.3 Z变换性质

– (2)因果序列单边 Z变换右移性质

$$x(n)=x(n)u(n)$$

$$\mathrm{Z}\ \left\{x(n-m)u(n-m)\right\}=z^{-m}X(z)$$

– (3)双边序列的单边 Z变换左/右移性质

$$\mathrm{Z}\ \left\{x(n)u(n)\right\}\triangleq X(z)$$

– 左移性质：$\mathrm{Z}\ \left\{x(n+m)u(n)\right\}=z^{m}\left\{X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right\}$

– 右移性质：$\mathrm{Z}\ \left\{x(n-m)u(n)\right\}=z^{-m}\left\{X(z)-\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right\}$

§8.3 Z变换性质

- 3. Z $\left\{nx\left(n\right)\right\}=-z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X\left(z\right)$
- 4. Z $\left\{a^{n}x\left(n\right)\right\}=X\left(\dfrac{z}{a}\right)$
- 5.初值定理：若$x\left(n\right)$为因果序列，则

  $x\left(0\right)=\lim\limits_{z\to\infty}X\left(z\right)$。

§8.3 Z变换性质

- 6.终值定理：若$x(n)$为因果序列，$(z-1)X(z)$在单位圆上/外解析（在单位圆上,$(z-1)X(z)$可有 $z=1$的任意阶极点），则

$$\lim_{n\to\infty} x(n)=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)X(z)\right]$$

- 7.卷积定理：$H(z)=$ Z $\{h(n)\},X(z)=$ Z $\{x(n)\}$

  则 Z $\{x(n)*h(n)\}=X(z)H(z)$

§8.3 Z变换性质

- 8. Z域卷积定理

$$\mathcal{Z}\left\{x(n)h(n)\right\}=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_{C_1}X\left(\frac{z}{v}\right)H(v)v^{-1}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_{C_2}X(v)H\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}\mathrm{d}v$$

$$\triangleq X(z)*H(z)$$

收敛域：$\left.\begin{array}{l} R_{x_1}<\left|\dfrac{z}{v}\right|<R_{x_2} \\ R_{h_1}<|v|<R_{h_2} \end{array}\right\}\Rightarrow X\left(\dfrac{z}{v}\right)H(v)v^{-1}$的收敛域

§ 8.3 Z变换性质

令$v \triangleq \rho e^{\mathrm{j}\theta}, z = re^{\mathrm{j}\phi}, \rho =$ 常数$, r =$ 常数$, \mathrm{d}v = \mathrm{j}\rho e^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{d}\theta$

$$\mathcal{Z}\left\{x(n)h(n)\right\} = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathrm{C}_2} X\left(\rho e^{\mathrm{j}\theta}\right)H\left(\frac{r}{\rho}e^{\mathrm{j}(\phi-\theta)}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X\left(\rho e^{\mathrm{j}\theta}\right)H\left(\frac{r}{\rho}e^{\mathrm{j}(\phi-\theta)}\right)\mathrm{d}\theta$$

§8.3 Z变换性质

- Paserval定理：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h^{*}(n)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{\mathrm{C}} X(z)H^{*}\left(\frac{1}{z^{*}}\right)z^{-1}\mathrm{d}z$$

注：

– (1)条件：$X(z),H(z)$收敛域含单位圆。

– (2)单位圆的表示：$|z|=1 \Leftrightarrow z=e^{\mathrm{j}\omega t}$，取式中C为单位圆，$\mathrm{d}z=\mathrm{j}Te^{\mathrm{j}\omega T}\mathrm{d}\omega$。

§ 8.3 Z变换性质

– (3)内积不变性：

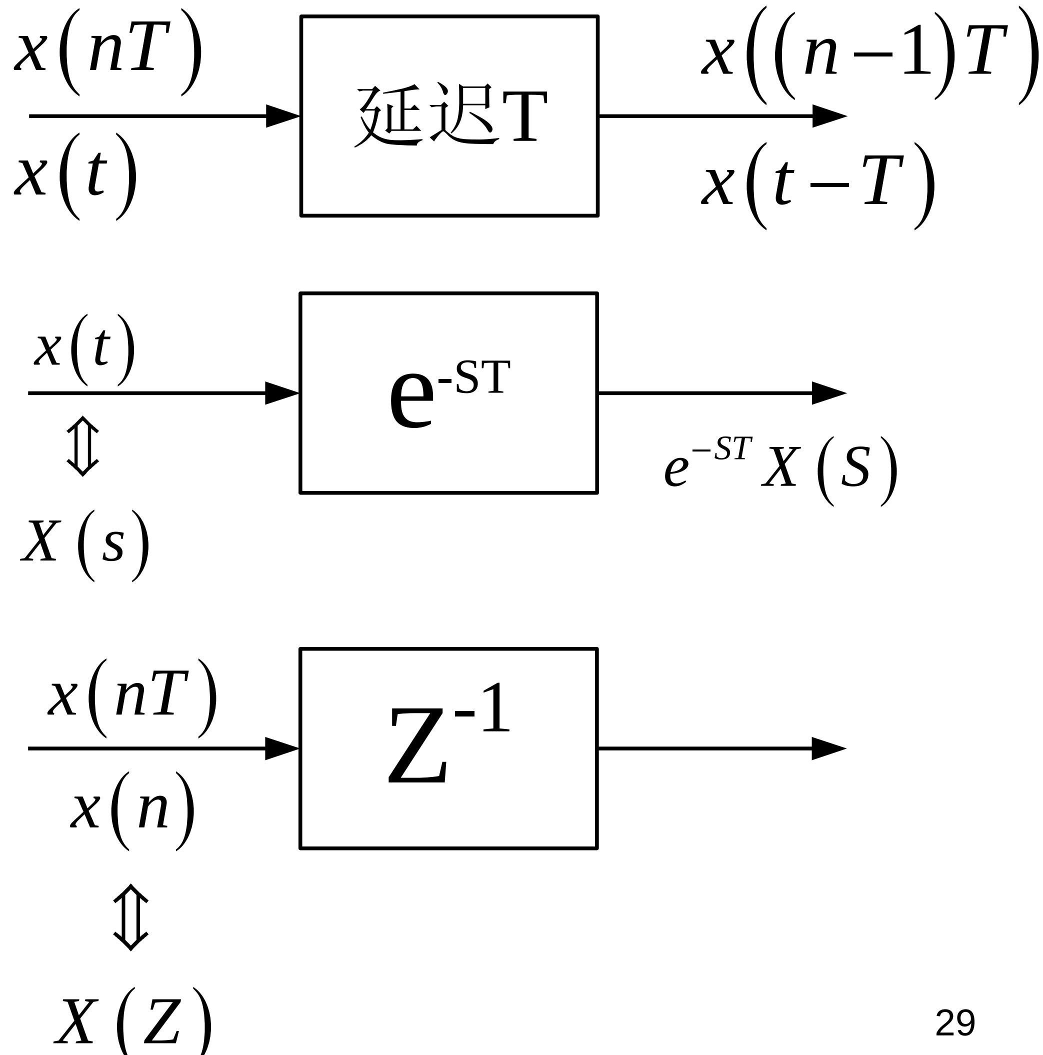
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h^*(n) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X\left(e^{\mathrm{j}\omega T}\right)H^*\left(e^{\mathrm{j}\omega T}\right)\mathrm{d}\omega$$

– (4)能量不变性：取 $h(n) = x(n)$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x(n)\right|^2 = \frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left|X\left(e^{\mathrm{j}\omega T}\right)\right|^2 \mathrm{d}\omega$$

§8.4 Z变换性质与 L 变换的关系

- 1. z □ s 的关系
  - (1)物理事实：



形式相等

$$z = e^{sT} \Leftrightarrow s = \frac{1}{T}\ln z$$

§8.4 Z变换性质与 L 变换的关系

– (2) $x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT), T = \frac{2\pi}{\omega_s}$ 采样间隔

$$X_s(s) = \mathrm{L}\left\{x_s(t)\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT)e^{-sTn}$$

$$X(z) = \mathrm{Z}\left\{x(nT)\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT)z^{-n}$$

$$X_s(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} \overset{\text{形式}}{=} X(z)$$

$$z^{-n} = e^{-sTn} \Leftrightarrow z = e^{sT}$$

§8.4 Z变换性质与 L 变换的关系

- 2. $z = e^{sT}$

$$s = \sigma + \mathrm{j}\omega, z \square re^{\mathrm{j}\theta} = e^{\sigma \mathrm{T}} e^{\mathrm{j}\omega T} = e^{2\pi\sigma/\omega_s} e^{\mathrm{j}2\pi\omega/\omega_s}$$

$$Z(\omega) = e^{2\pi\sigma/\omega_s} e^{\mathrm{j}2\pi(\omega - n\omega_s)/\omega_s}$$

$Z(\omega) = Z(\omega - n\omega_s)$周期为$\omega_s$

对比：$s \to z$

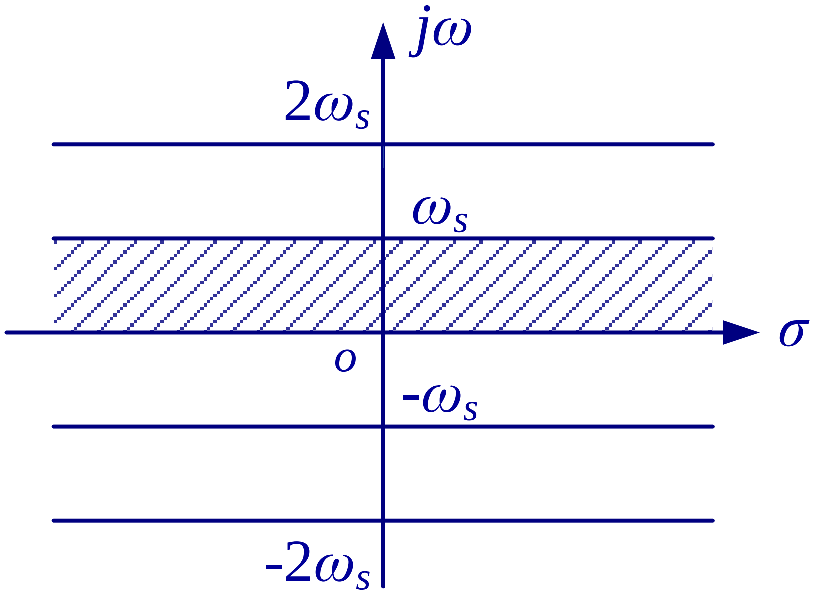
多$\to 1$

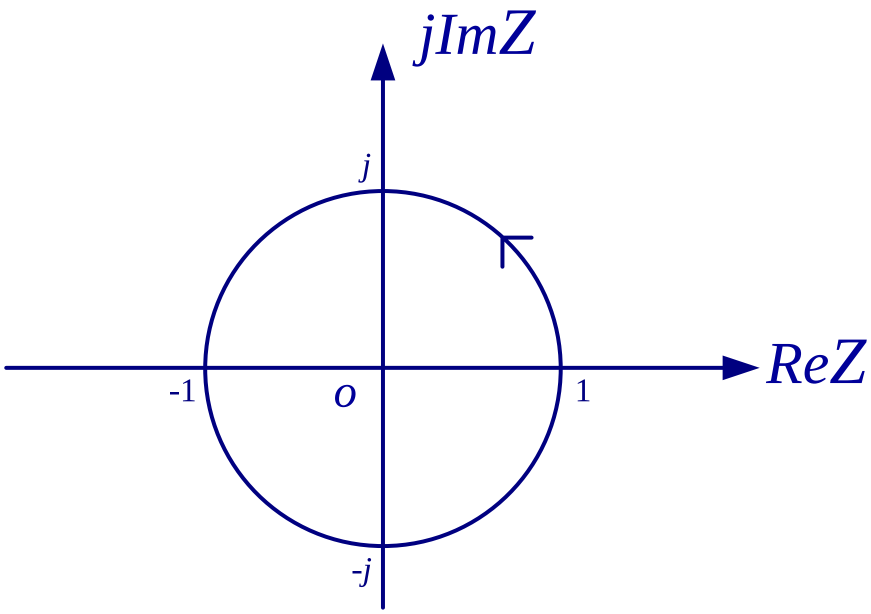
$\sigma = 0$虚轴 $\to |z| = 1$单位圆,周期为ω_s

$\sigma < 0$左半开平面$\to |z| < 1$单位圆内

$\sigma > 0$右半开平面$\to |z| > 1$单位圆外

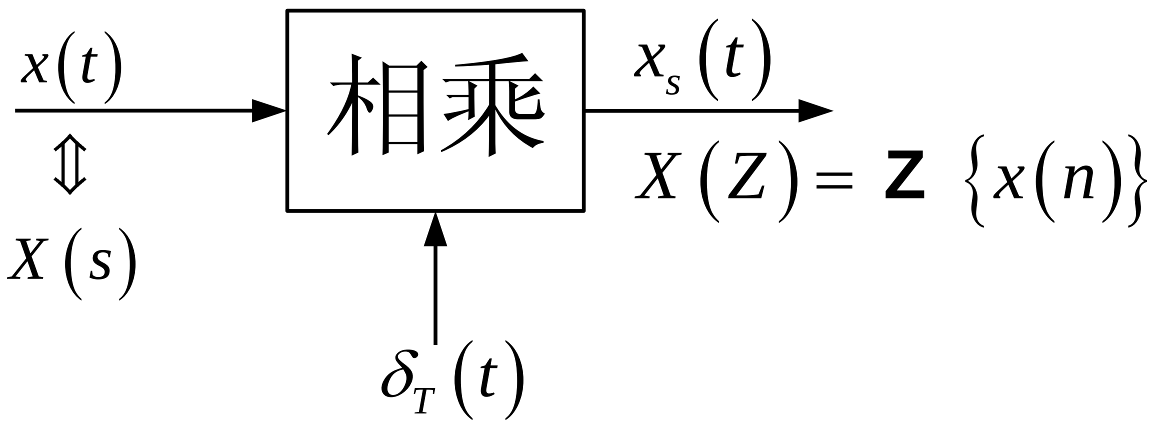
§8.4 Z变换性质与 L 变换的关系





§ 8.4 Z变换性质与 L 变换的关系

- 3.采样序列 Z变换与原信号的 L 变换的关系



§ 8.4 Z变换性质与 L 变换的关系

$$X(z) \square X(s)$$

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t)$$

$$\mathrm{L}\left\{\delta_T(t)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT} = \frac{1}{1-e^{-sT}}$$

$$X_s(s) = \mathrm{L}\left\{x_s(t)\right\} = X(s) * \frac{1}{1-e^{-sT}}$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\sigma\text{-}\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} X(p) \frac{1}{1-e^{-(s-p)T}} \mathrm{d}p$$

§8.4 Z变换性质与 L 变换的关系

注：

– (1) $x(t)$是稳定信号$\Leftrightarrow X(p)$的极点$\in \pi_l^-$

– (2) $\dfrac{1}{1-e^{-(s-p)T}}$的收敛域, $\mathrm{Re}(s-p)>0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(p)<\mathrm{Re}(s)$

§8.4 Z变换性质与 L 变换的关系

– 例：$X(p)=\sum_j \frac{A_j}{p-p_j}$

$$X(z)=\sum_i \mathrm{Res}\left\{\frac{\sum_j \frac{A_j}{p-p_j}}{1-z^{-1}e^{pT}}\right\}_{p=p_i} \quad =\sum_j\left\{\frac{A_j}{1-z^{-1}e^{p_jT}}\right\}$$

§8.5 Z变换解差分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

$$\mathrm{Z}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)\right\} = \mathrm{Z}\left\{\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, \mathrm{Z}\left\{y(n-k)\right\} = \sum_{r=0}^{M} b_r\, \mathrm{Z}\left\{x(n-r)\right\}$$

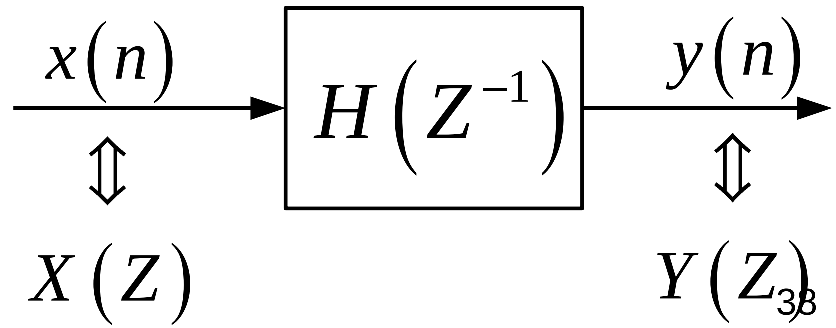
$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\left[Y(z) + \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}\right] = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}\left[X(z) + \sum_{m=-r}^{-1} x(m) z^{-m}\right]$$

§8.5 Z变换解差分方程

可直接带入初值

- 因果序列输入：$x(n)=0, n<0$
- 零状态：$y(n)=0, n<0$

$$Y(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} X(z)$$



§8.6 系统函数、BIBO稳定

- 1. $H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\}$
- 2.若$x(n) = z^n$,则

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) z^{n-m} = \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) z^{-m}\right] z^n = H(z) z^n$$

$y(n) = Lz^n = H(z) z^n$, z^n是线性定常离散系统的特征函数。

§8.6 系统函数、BIBO稳定

- 3. BIBO稳定

$$\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| h(n) \right| < \infty$$

$\Leftrightarrow H(z)$的收敛域包含单位圆

(因果系统：$H(z)$的极点在单位圆内)

结束