第一章 离散时间信号与系统

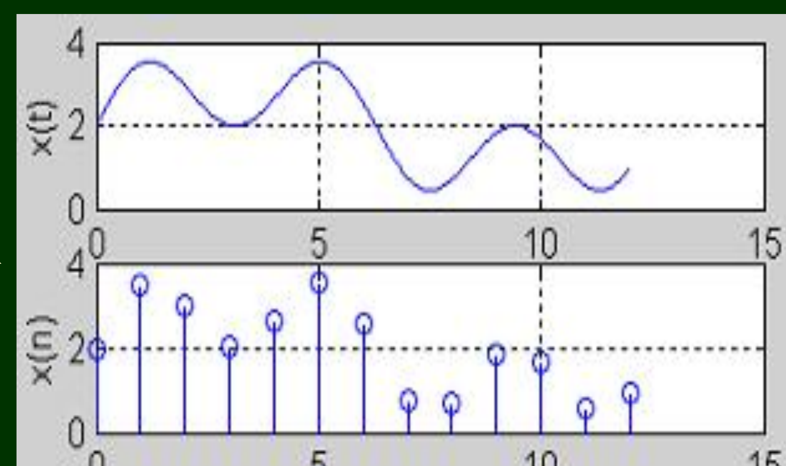
一、*离散时间信号—序列*

序列：对模拟信号$x_a(t)$进行等间隔采样，采样间隔为T，得到

$$x_a(t)\big|_{t=nT} = x_a(nT) \quad -\infty < n < \infty$$

n取整数。对于不同的n值，$x_a(nT)$是一个有序的数字序列：

$\ldots x_a(-T), x_a(0), x_a(T), x_a(2T), \ldots$ 该数字序列就是离散时间信号。实际信号处理中，这些数字序列值按顺序存放于存贮器中，此时nT代表的是前后顺序。为简化，不写采样间隔，形成x(n)信号，称为序列。



x(n)代表第n个序列值，

在数值上等于信号的采样值

x(n)只在n为整数时才有意义

1、序列的运算

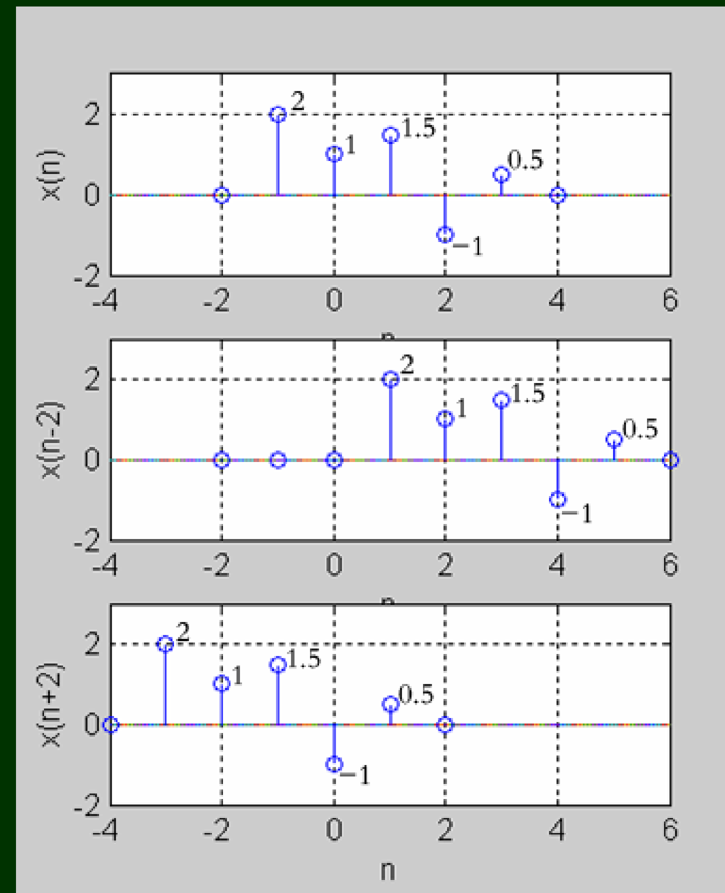
- 移位
- 翻褶
- 和
- 积
- 累加
- 差分
- 时间尺度变换
- 卷积和

1）移位

序列x(n)，当m>0时

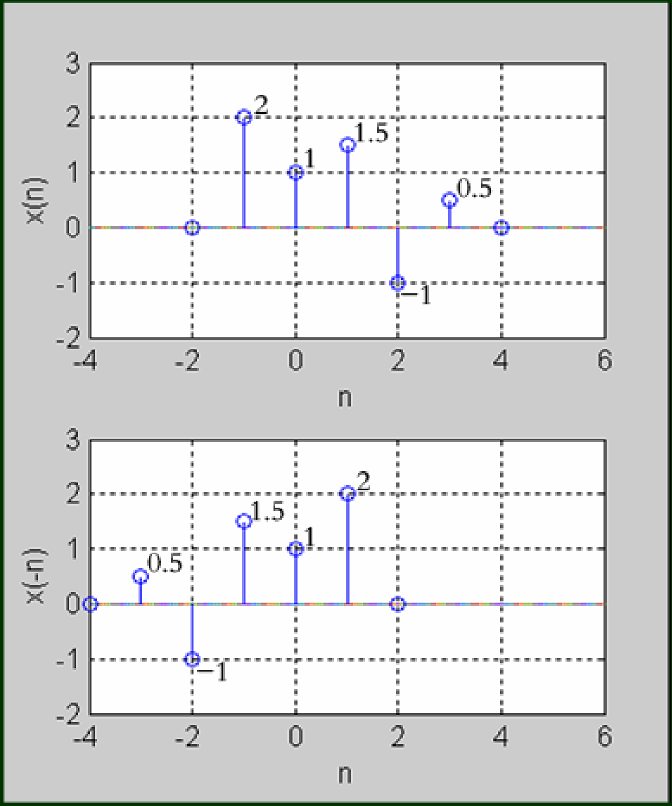
x(n-m)：延时/右移m位

x(n+m)：超前/左移m位



2）翻褶

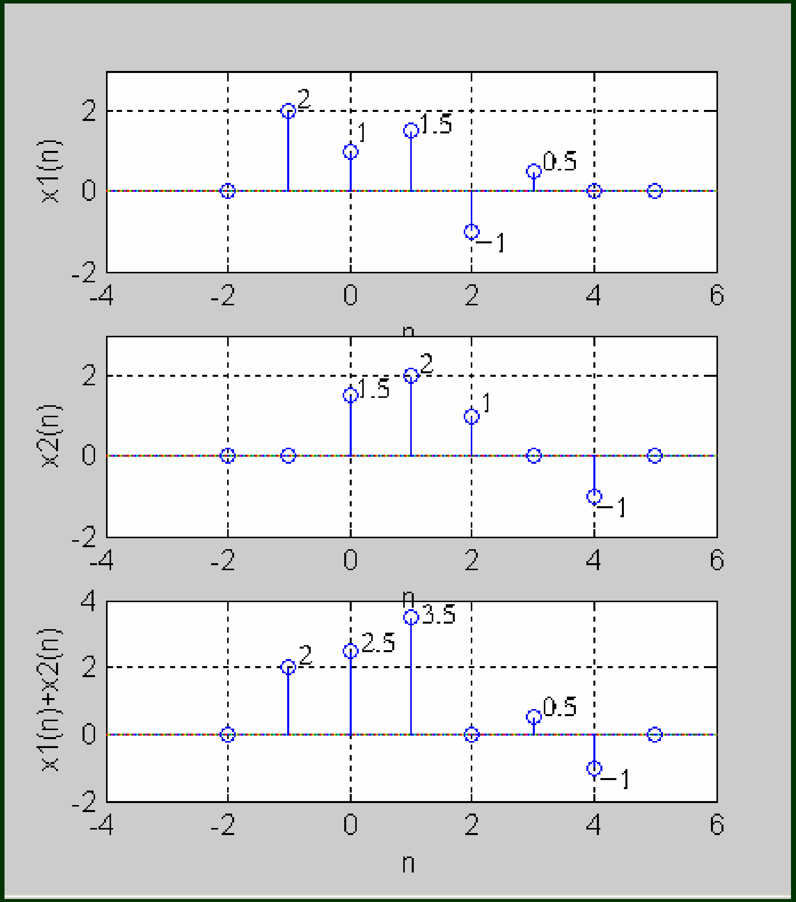
x(-n)是以n=0的纵轴为
对称轴将序列x(n)
加以翻褶



3）和

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

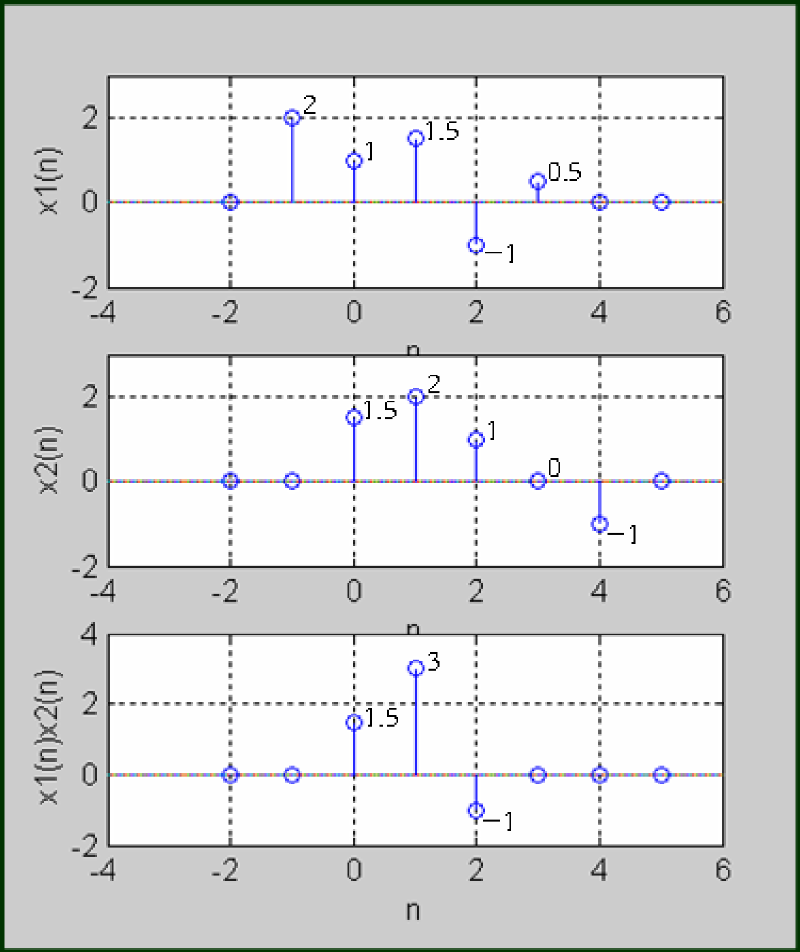
同序列号n的序列值逐项对应相加



4）积

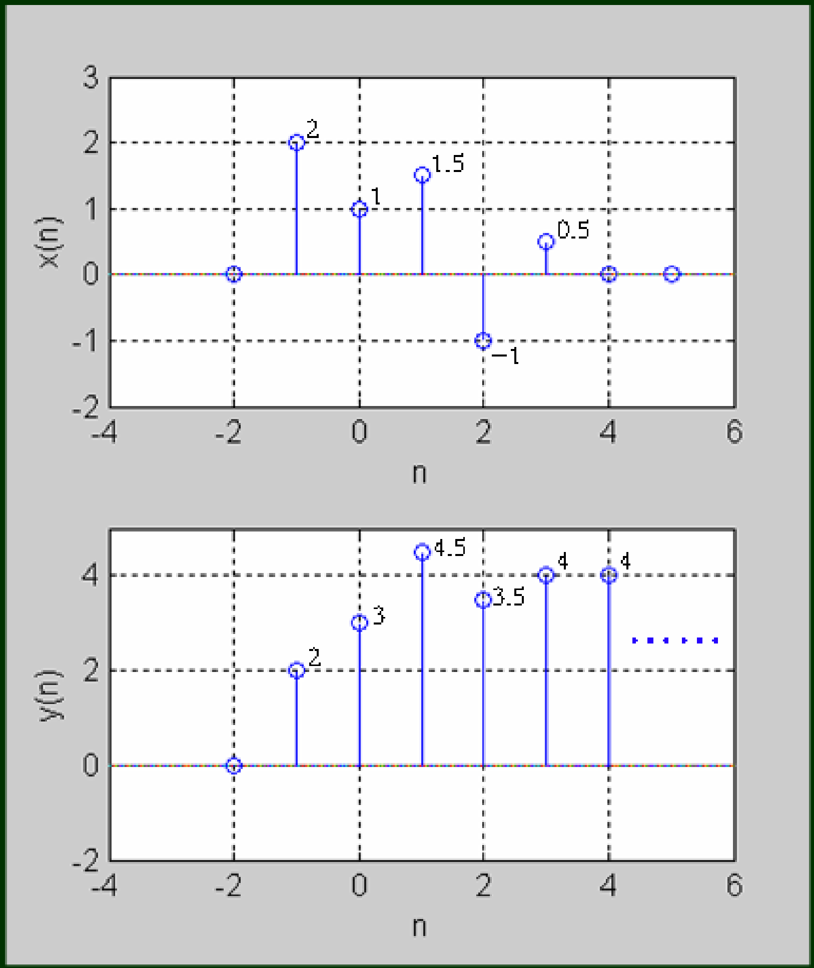
$$x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$$

同序号n的序列值逐项对应相乘



5）累加

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$



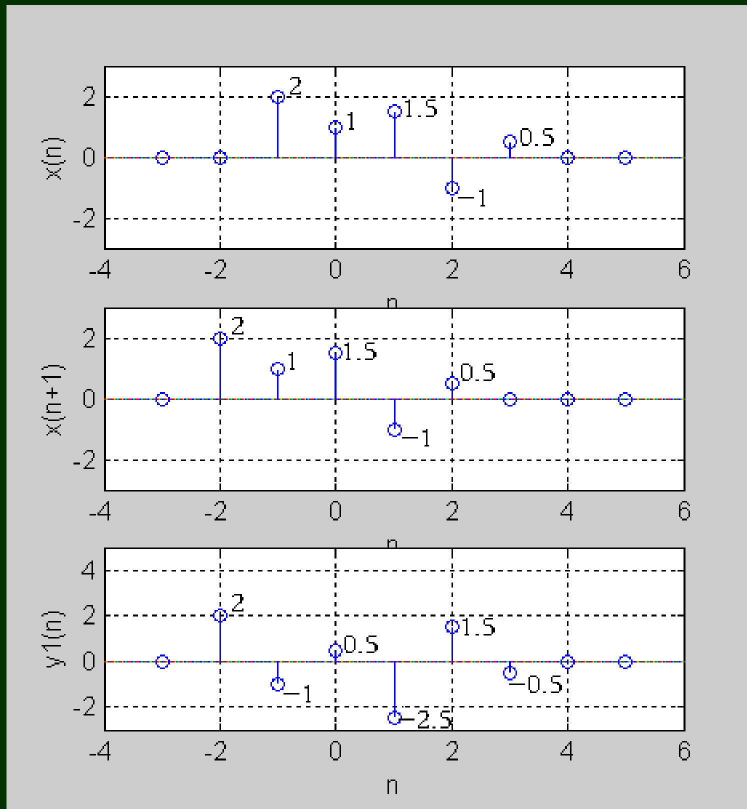
6）差分

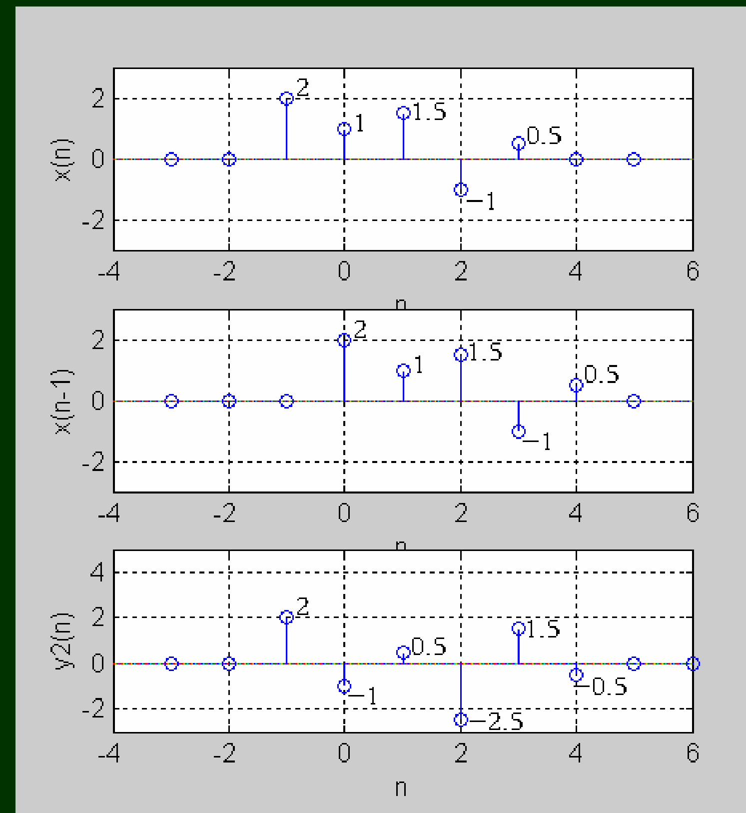
前向差分：

$$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$$

后向差分：

$$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$$





$$\Delta x(n)=\nabla x(n+1)$$

$$\nabla x(n)=\Delta x(n-1)$$

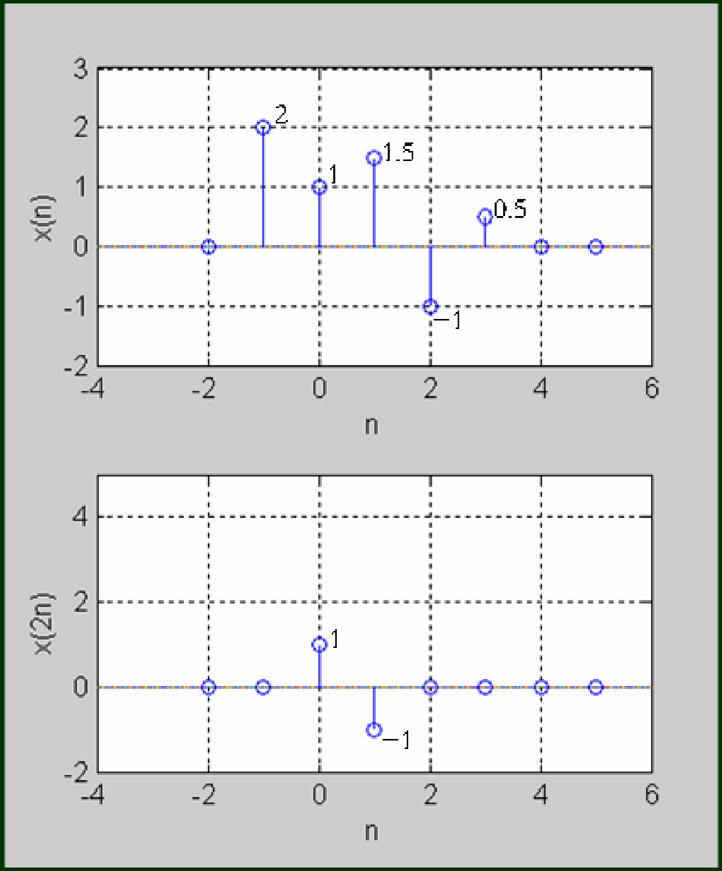
7）时间尺度变换

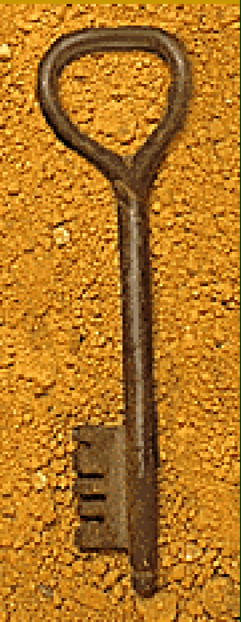
$x(mn)$ 抽取

$$x(n) = x_a(t)\big|_{t=nT}$$

$$x(mn) = x_a(t)\big|_{t=mnT}$$

$x(\frac{n}{m})$ 插值





8）卷积和

设两序列x(n)、 h(n)，则其卷积和定义为：

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

1）翻褶： $x(n)\rightarrow x(m)\quad h(n)\rightarrow h(m)\rightarrow h(-m)$

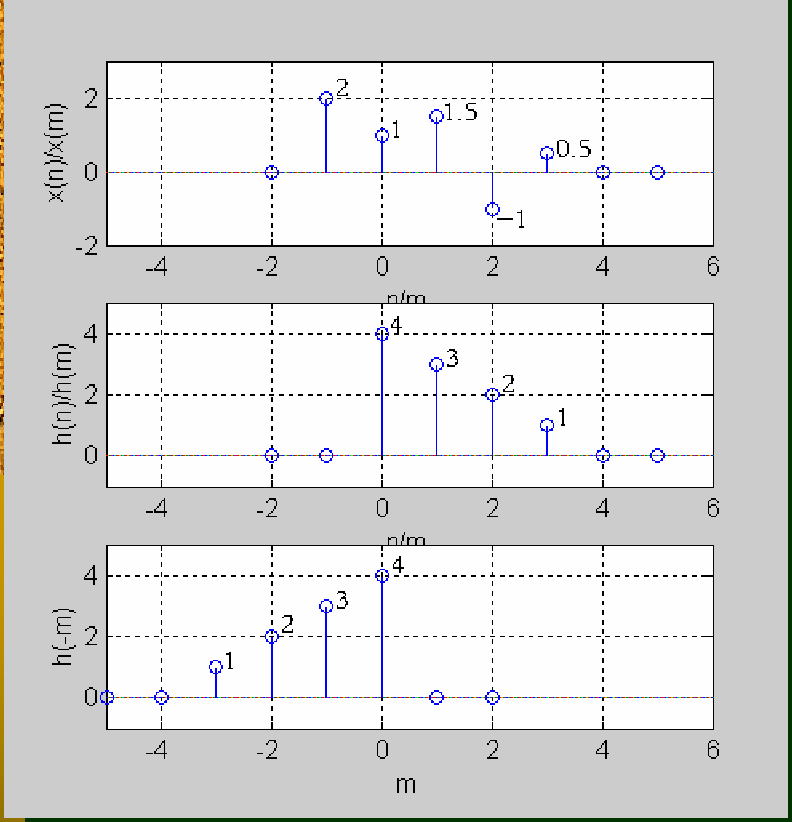
2）移位： $h(-m)\rightarrow h(n-m)$

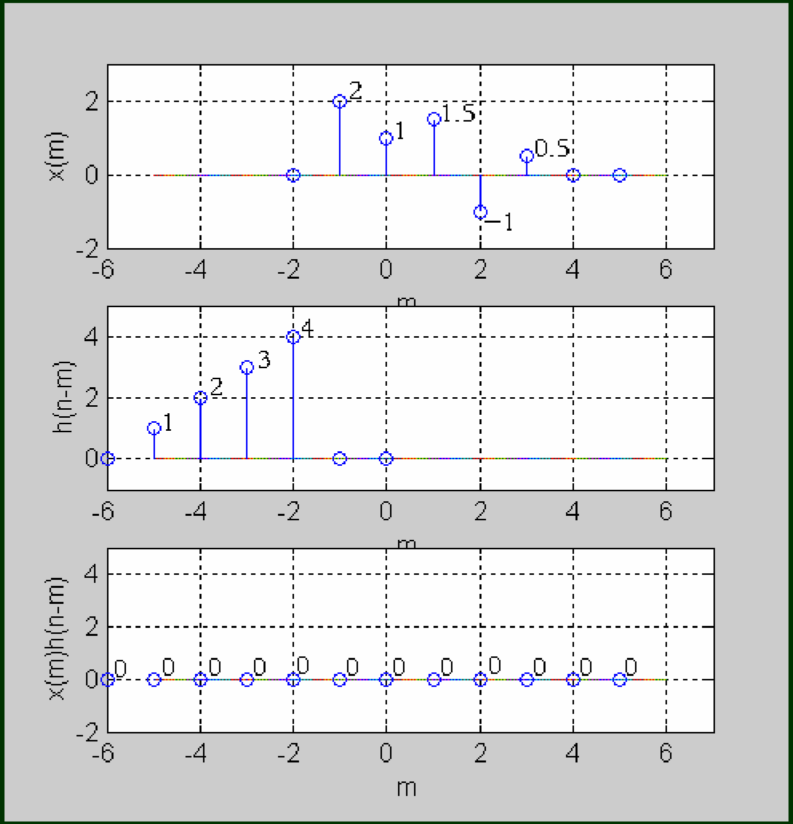
3）相乘： $x(m)\cdot h(n-m)\quad -\infty<m<\infty$

4）相加： $\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$

$-\infty<n<\infty$

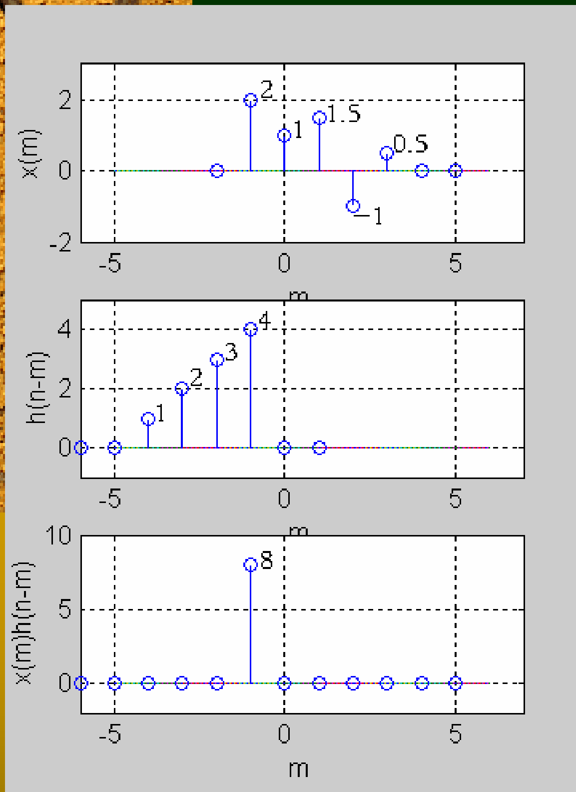
举例说明卷积过程





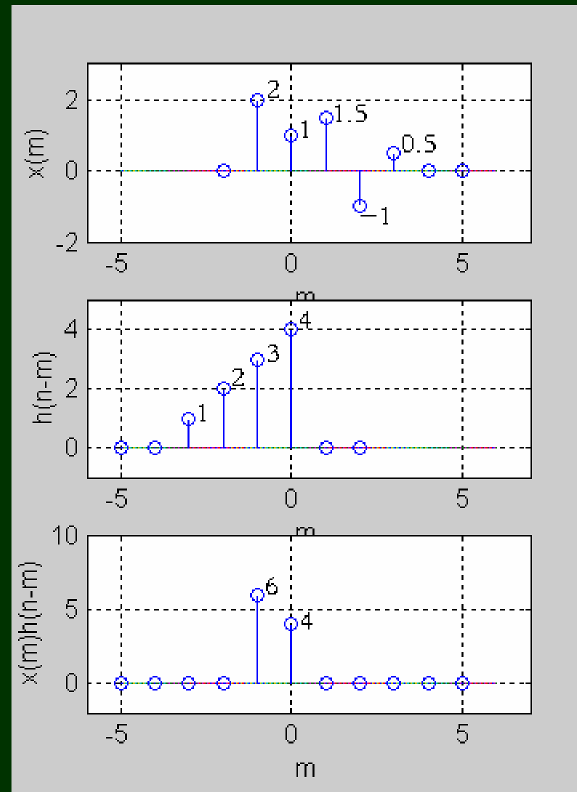
$n \le -2,\ y(n)=0$

n=-1



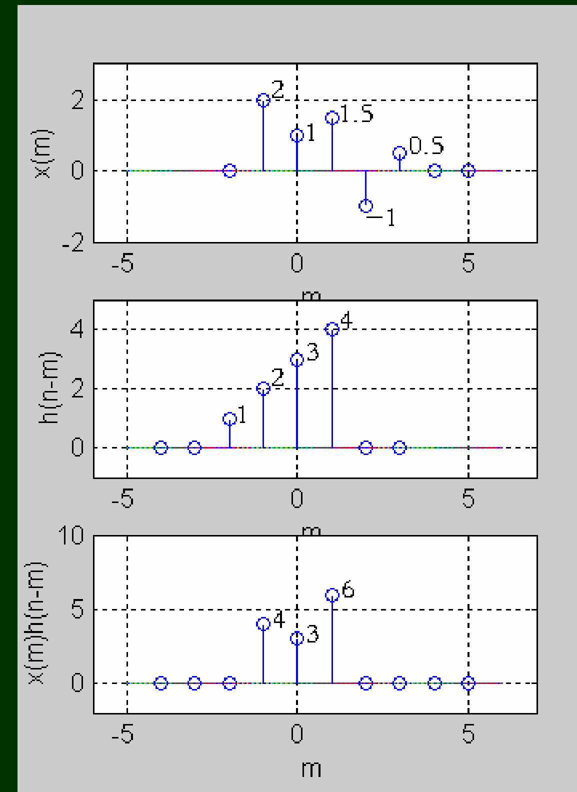
y(-1)=8

n=0



y(0)=6+4=10

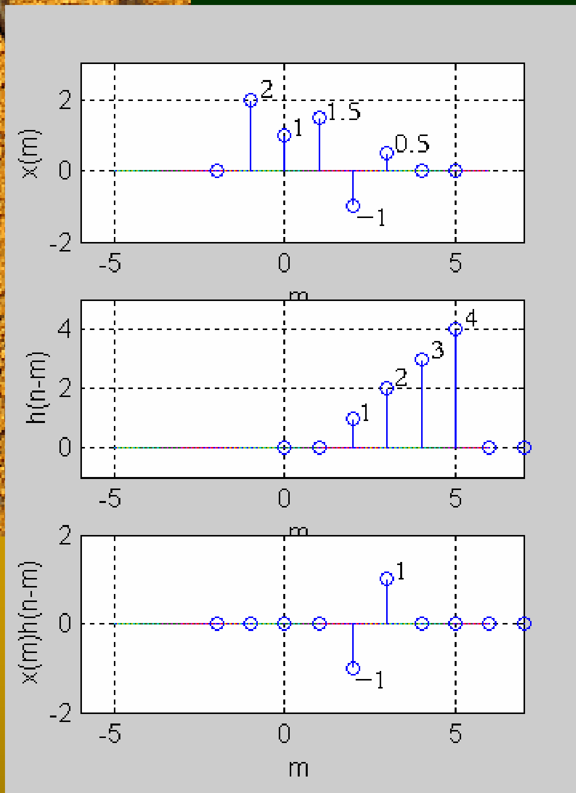
n=1



y(1)=4+3+6=13

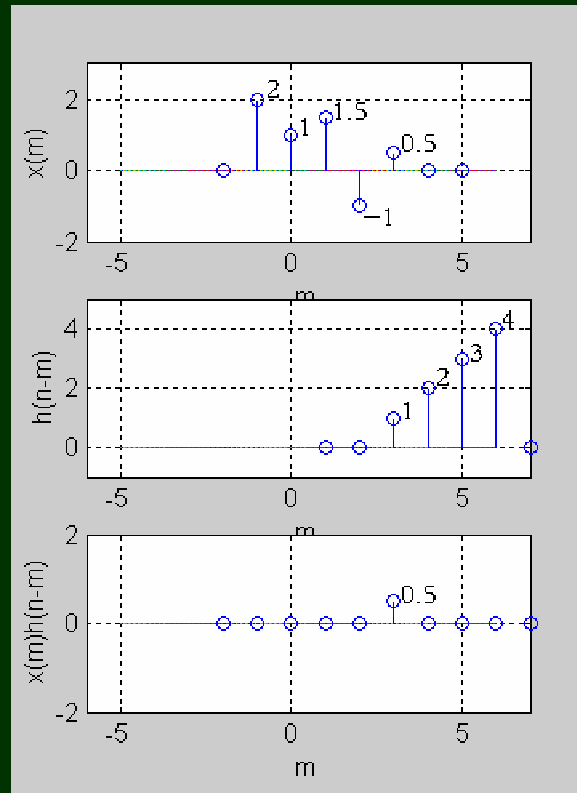
……

n=5



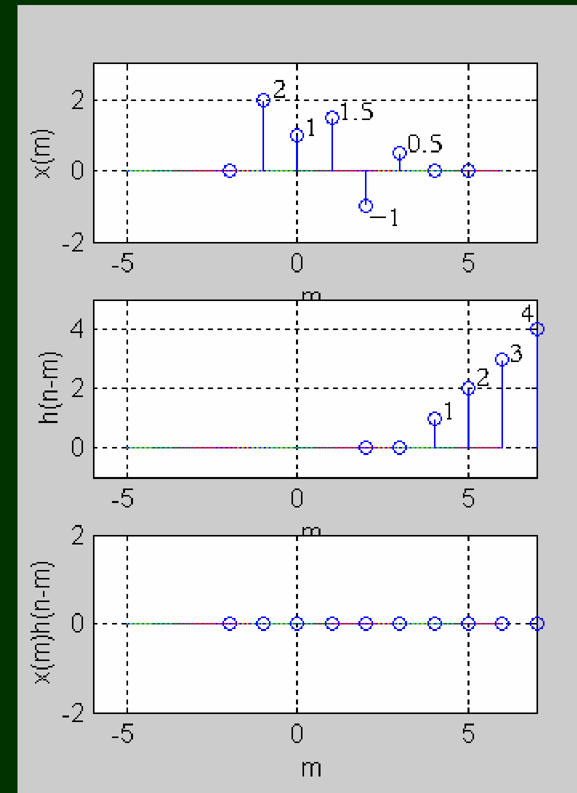
y(5)=-1+1=0

n=6

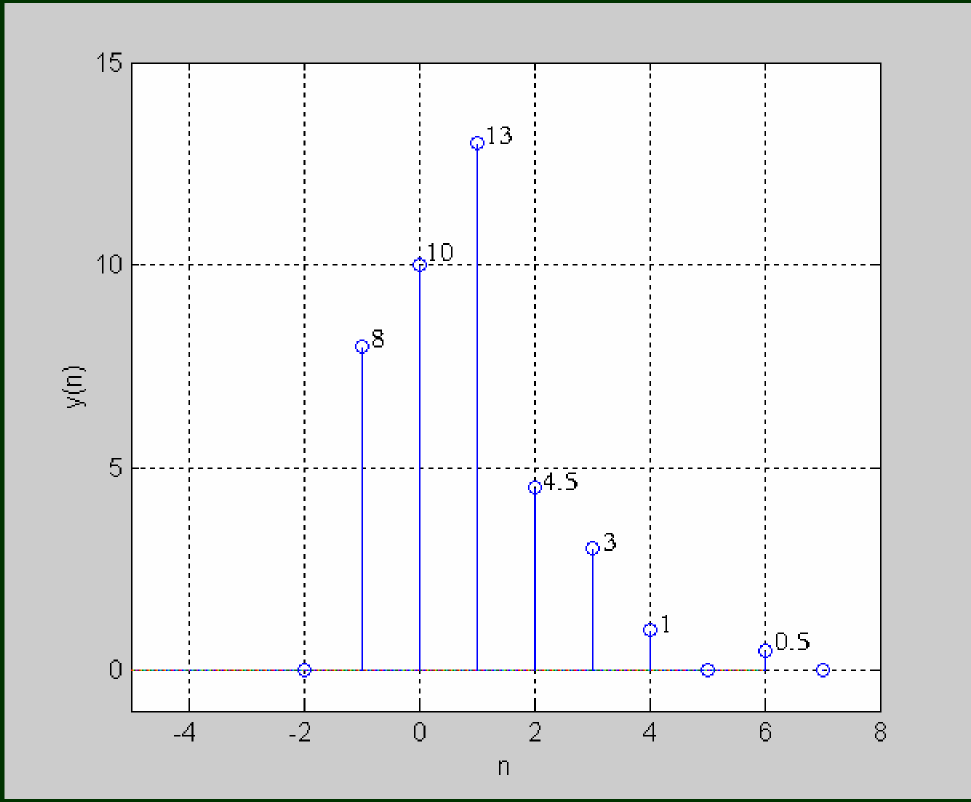


y(6)=0.5

n=7



$y(n)=0,\ n \geq 7$


15
10
5
0
y(n)
13
10
8
4.5
3
1
0.5
-4
-2
0
2
4
6
8
n

卷积和与两序列的前后次序无关

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

令 $n-m=k$

则 $m=n-k$

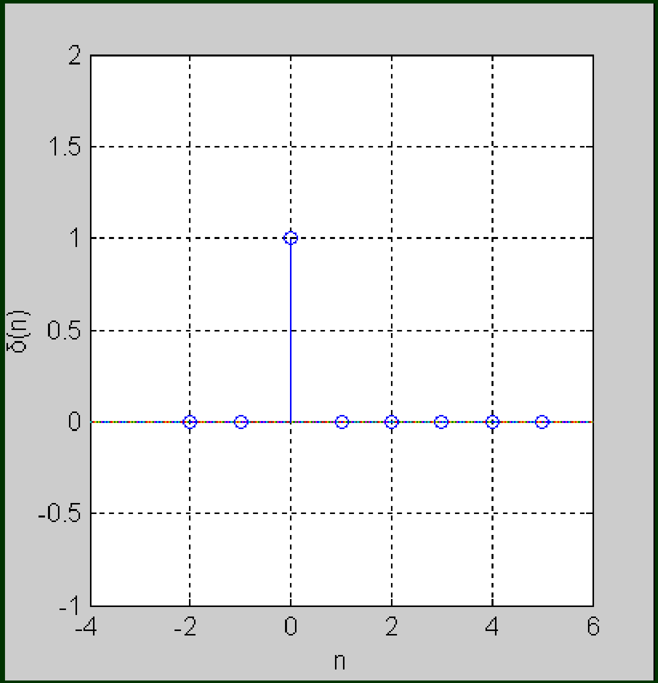
$$=\sum_{n-k=-\infty}^{\infty}x(n-k)h(k)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)=h(n)*x(n)$$

2、几种典型序列

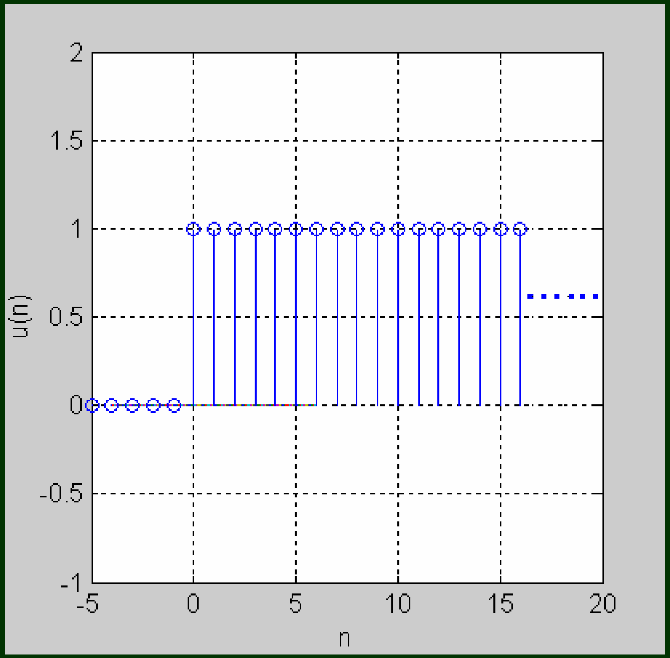
1）单位取样序列

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$



2）单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$



与单位抽样序列的关系

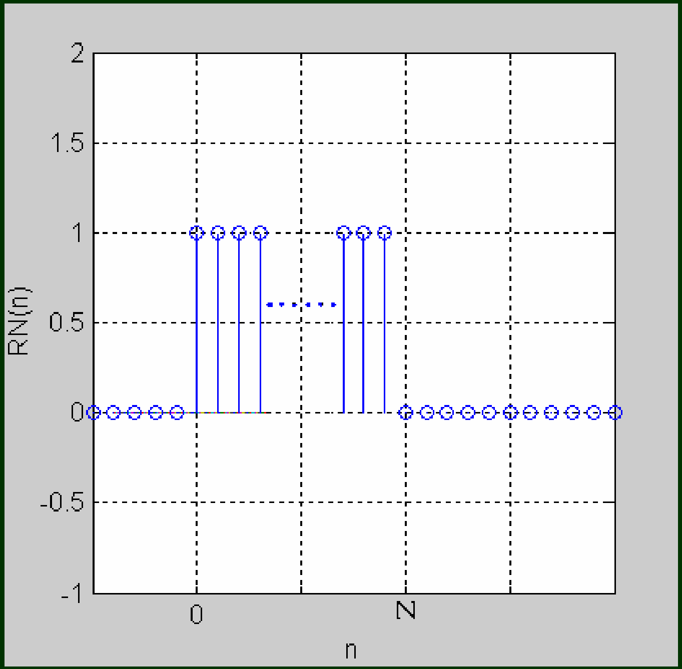
$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

$$u(n)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-m)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\ldots$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$$

3）矩形序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其它n}\end{cases}$$



与其他序列的关系

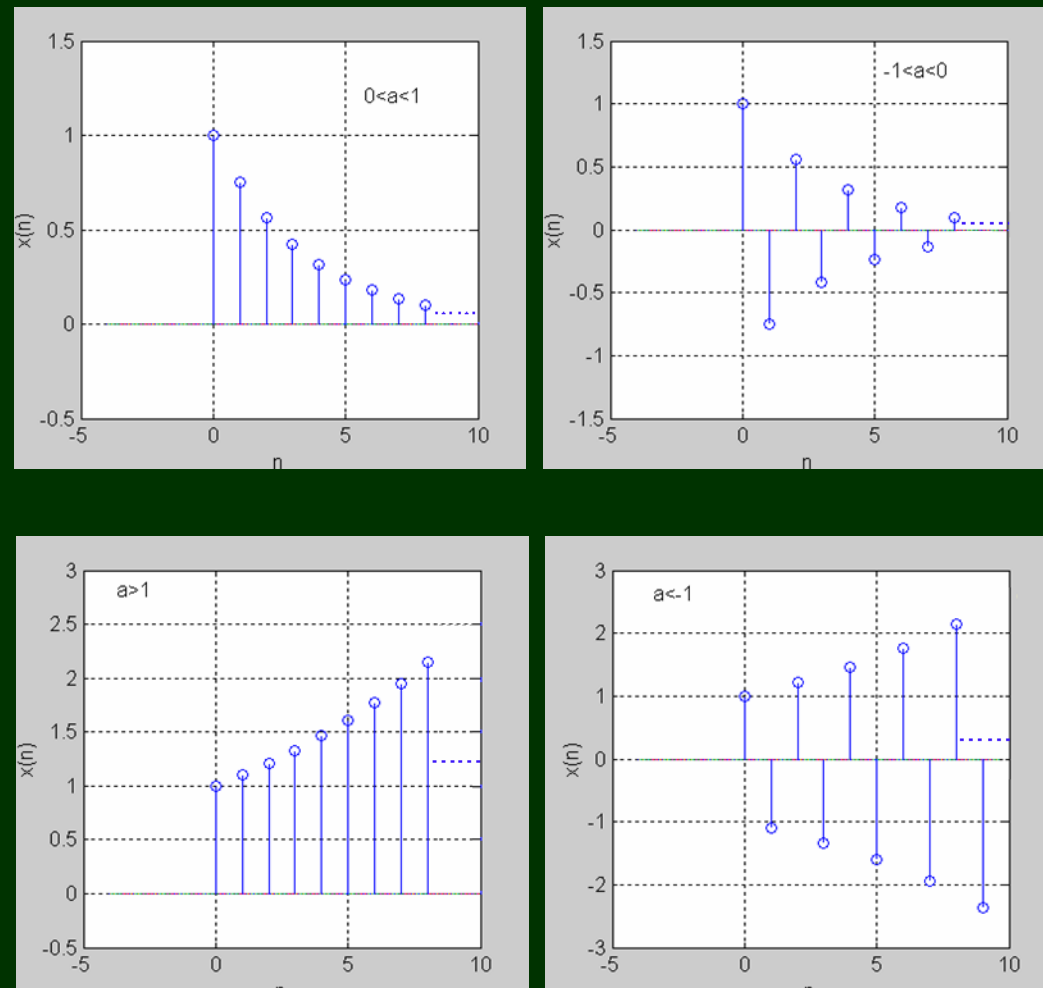
$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

$$R_N(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\delta(n-m)=\delta(n)+\delta(n-1)+\ldots+\delta[n-(N-1)]$$

4）实指数序列

$$x(n)=a^{n}u(n)$$

a 为实数



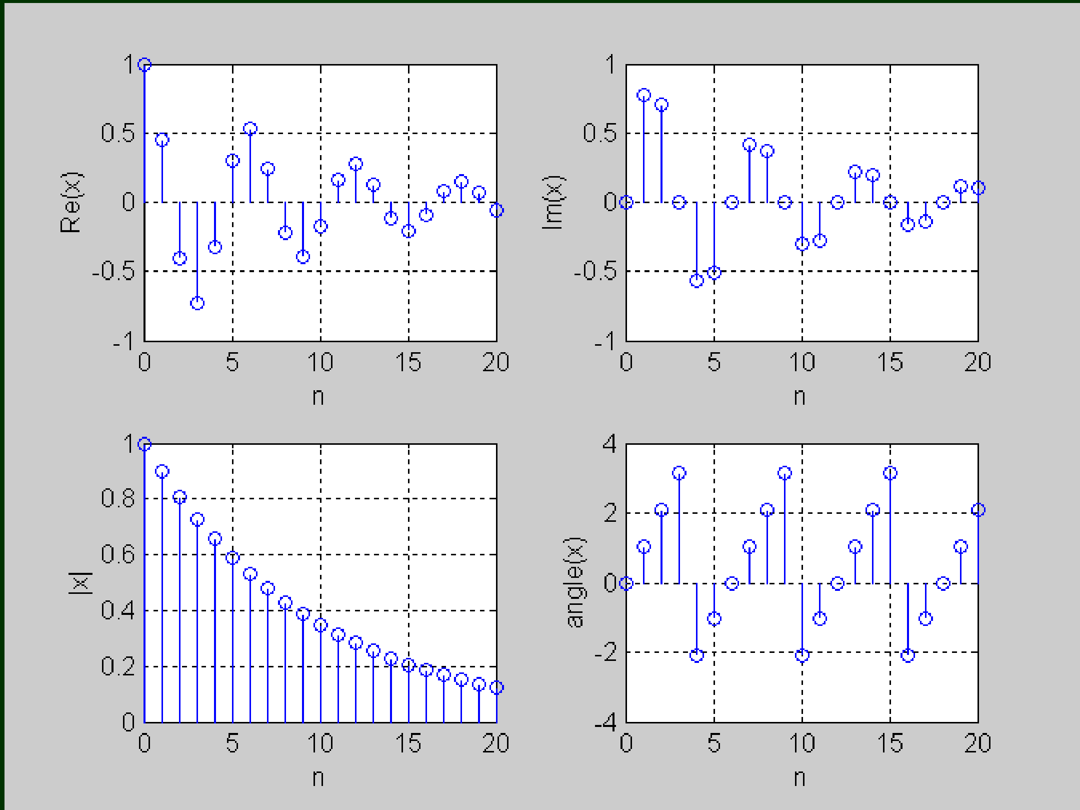
5）复指数序列

$$x(n)=e^{(\sigma+j\omega_0)n}=e^{\sigma n}\cdot e^{j\omega_0 n}$$

$$=e^{\sigma n}\cos(\omega_0 n)+je^{\sigma n}\sin(\omega_0 n)$$

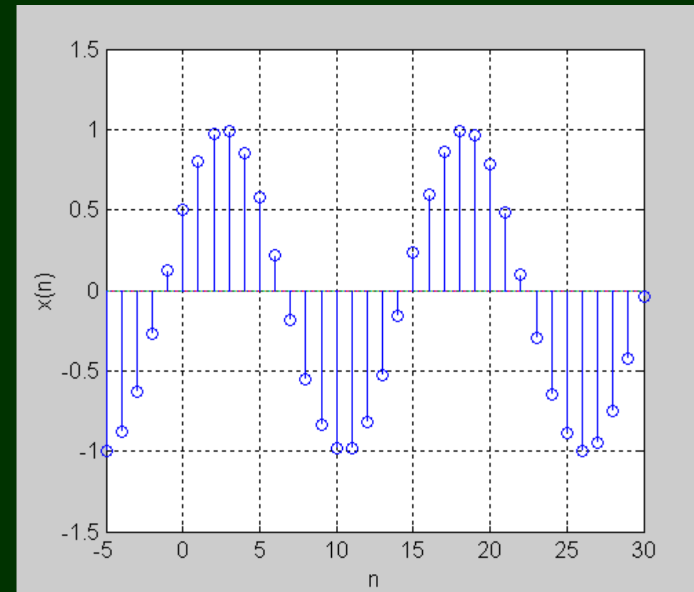
ω_0 为数字域频率

例：$x(n)=0.9^n e^{j\frac{\pi}{3}n}$



6）正弦序列

$$x(n)=A\sin(\omega_0 n+\phi)$$



模拟正弦信号：

$$x_a(t)=A\sin(\Omega t+\phi)$$

$$x(n)=x_a(t)\big|_{t=nT}=A\sin(\Omega nT+\phi)$$

$$\omega_0=\Omega T=\Omega/f_s$$

ω_0：数字域频率　　Ω：模拟域频率

T：采样周期　　f_s：采样频率

数字域频率是模拟域频率对采样频率的归一化频率

7）任意序列

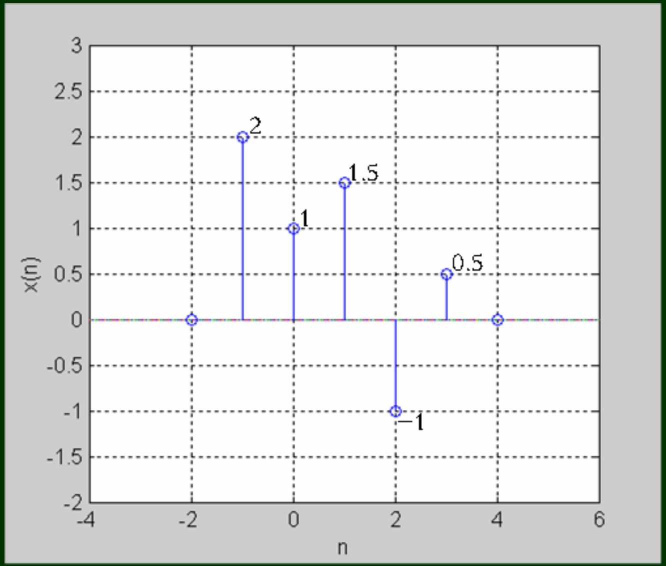
x(n)可以表示成单位取样序列的移位加权和，也可表示成与单位取样序列的卷积和。

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)=x(n)*\delta(n)$$

例：$x(n)=2\delta(n+1)+\delta(n)$

$+1.5\delta(n-1)-\delta(n-2)$

$+0.5\delta(n-3)$



3、序列的周期性

若对所有n存在一个最小的正整数N，满足

$$x(n) = x(n+N) \quad -\infty < n < \infty$$

则称序列x(n)是周期性序列，周期为N。

例：

$$x(n)=\sin(\frac{\pi}{4}n)=\sin[\frac{\pi}{4}(n+8)]$$

因此，x(n)是周期为8的周期序列

讨论一般正弦序列的周期性

$$x(n)=A\sin(\omega_0 n+\phi)$$

$$x(n+N)=A\sin[\omega_0(n+N)+\phi]=A\sin(\omega_0 n+\phi+\omega_0 N)$$

要使$x(n+N)=x(n)$，即$x(n)$为周期为N的周期序列

则要求$\omega_0 N=2\pi k$，即$N=\dfrac{2\pi}{\omega_0}k$，$N$，$k$为整数，

且k的取值保证N是最小的正整数

分情况讨论

1）当 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 为整数时

2）当 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 为有理数时

3）当 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 为无理数时

1）当$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为整数时，

取$k=1$，$x(n)$即是周期为$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$的周期序列

如$\sin(\dfrac{\pi}{4}n)$，　$\omega_0=\dfrac{\pi}{4}$，　$\dfrac{2\pi}{\omega_0}=8=N$

该序列是周期为8的周期序列

2）当$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为有理数时，

表示成$\dfrac{2\pi}{\omega_0}=\dfrac{P}{Q}$，$P$，$Q$为互为素数的整数

取$k=Q$，则$N=P$，$x(n)$即是周期为P的周期序列

如$\sin(\dfrac{4\pi}{5}n)$，　$\omega_0=\dfrac{4\pi}{5}$，　$\dfrac{2\pi}{\omega_0}=\dfrac{5}{2}$，

该序列是周期为5的周期序列

3）当$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为无理数时，

取任何整数k都不能使N为正整数，

$x(n)$不是周期序列

如$\sin(\frac{1}{4}n)$，　$\omega_0 = \frac{1}{4}$，　$\dfrac{2\pi}{\omega_0} = 8\pi$

该序列不是周期序列

例：判断

$$x(n) = e^{j(\frac{n}{6}-\pi)}$$

是否是周期序列

解：$x(n+N) = e^{j(\frac{n+N}{6}-\pi)} = e^{j(\frac{n}{6}-\pi+\frac{N}{6})}$

若$x(n)$为周期序列，则必须满足$x(n) = x(n+N)$，

即满足$\dfrac{N}{6} = 2\pi k$，且N，k为整数

而不论k取什么整数，$N = 12\pi k$都是一个无理数

$\therefore x(n)$不是周期序列

讨论：若一个正弦信号是由连续信号抽样得到，则抽样时间间隔T和连续正弦信号的周期T_0之间应是什么关系才能使所得到的抽样序列仍然是周期序列？

设连续正弦信号：

$$x(t) = A\sin(\Omega_0 t + \phi)$$

$$\Omega_0 = 2\pi f_0$$

$$T_0 = 1/f_0 = 2\pi/\Omega_0$$

抽样序列：

$$x(n) = x(t)\big|_{t=nT} = A\sin(\Omega_0 nT + \phi) = A\sin(\omega_0 n + \phi)$$

当 $\dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{T_0}{T}$

$$\omega_0 = \Omega_0 T = 2\pi f_0 T = 2\pi \frac{T}{T_0}$$

为整数或有理数时，x(n)为周期序列

令：$\frac{T_0}{T}=\frac{N}{k}$　　　N，k为互为素数的正整数

即　$NT=kT_0$

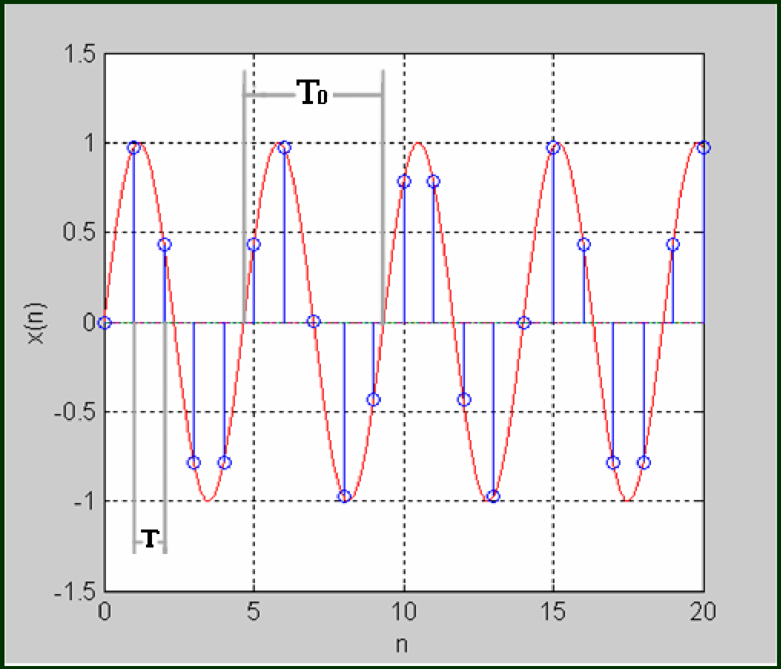
N个抽样间隔应等于k个连续正弦信号周期

例：

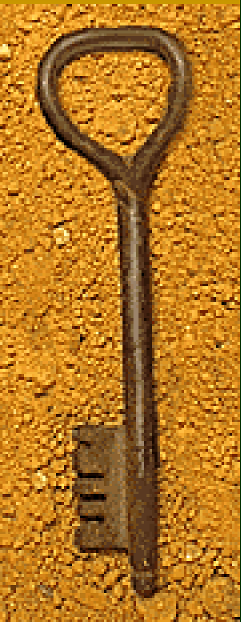
$$x(n)=\sin(\frac{3}{14}\times 2\pi n)$$

$$\omega_0=\frac{3}{14}\times 2\pi$$

$$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{14}{3}=\frac{N}{k}=\frac{T_0}{T}$$



当$14T=3T_0$时，$x(n)$为周期为14的周期序列



4、序列的能量

序列的能量为序列各抽样值的平方和

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|^{2}$$

二、线性移不变系统

一个离散时间系统是将输入序列变换成输出序列的一种运算。

记为：$T[\cdot]$

$$y(n)=T[x(n)]$$

1、线性系统

若系统 $T[\cdot]$

$$y_1(n)=T[x_1(n)] \qquad y_2(n)=T[x_2(n)]$$

满足叠加原理：

$$T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=a_1y_1(n)+a_2y_2(n)$$

或同时满足：

可加性：$T[x_1(n)+x_2(n)]=y_1(n)+y_2(n)$

比例性/齐次性：$T[ax_1(n)]=ay_1(n)$

其中：a,a_1,a_2为常数

则此系统为线性系统。

例：判断系统$y(n)=x(n)\sin(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7})$是否线性

解：设$y_1(n)=T[x_1(n)]=x_1(n)\sin(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7})$

$$y_2(n)=T[x_2(n)]=x_2(n)\sin(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7})$$

$$T[x_1(n)+x_2(n)]=[x_1(n)+x_2(n)]\sin(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7})$$

$$=x_1(n)\sin(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7})+x_2(n)\sin(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7})$$

$=y_1(n)+y_2(n)$　　满足可加性

$$T[ax_1(n)]=ax_1(n)\sin(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7})$$

$=ay_1(n)$，a为常数　　满足比例性

$\therefore$该系统是线性系统

例：证明由线性方程表示的系统

$$y(n)=ax(n)+b \qquad a,b\text{为常数}$$

是非线性系统

证：设$y_1(n)=T[x_1(n)]=ax_1(n)+b$

$$y_2(n)=T[x_2(n)]=ax_2(n)+b$$

$$T[x_1(n)+x_2(n)]=a[x_1(n)+x_2(n)]+b$$

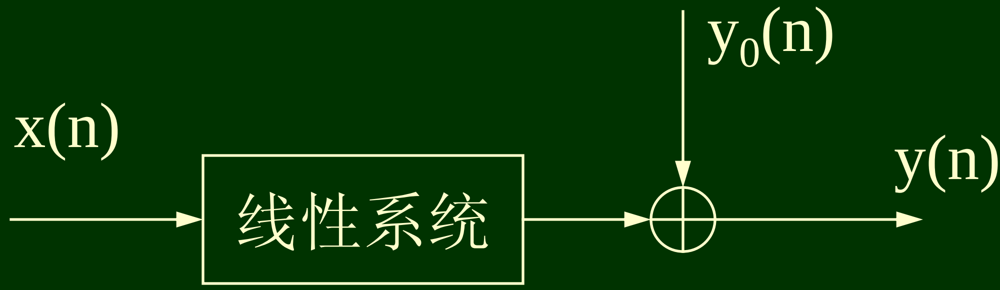
$$=ax_1(n)+ax_2(n)+b$$

$$\neq y_1(n)+y_2(n) \qquad \text{不满足可加性}$$

$\therefore$该系统是非线性系统

增量线性系统

$$y(n) = ax(n) + b$$



2、移不变系统

若系统响应与激励加于系统的时刻无关，则称为移不变系统（或时不变系统）

对移不变系统，若$\mathrm{T}[\mathrm{x}(\mathrm{n})] = y(n)$

则　$T[x(n-m)] = y(n-m)$，m为任意整数

例：试判断

$$y(n)=x(n)\sin(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7})$$

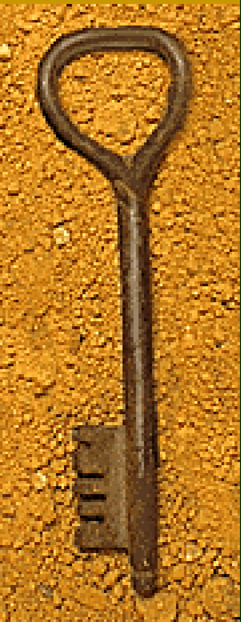
是否是移不变系统

解：$T[x(n-m)]=x(n-m)\sin(\frac{2\pi}{9}n+\frac{\pi}{7})$

$$y(n-m)=x(n-m)\sin[\frac{2\pi}{9}(n-m)+\frac{\pi}{7}]$$

$$\neq T[x(n-m)]$$

$\therefore$ 该系统不是移不变系统

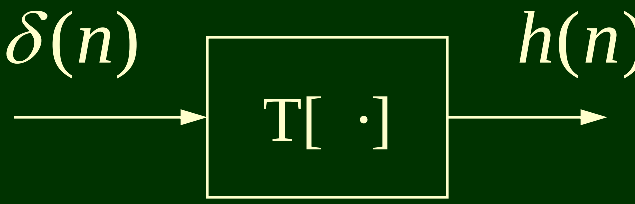


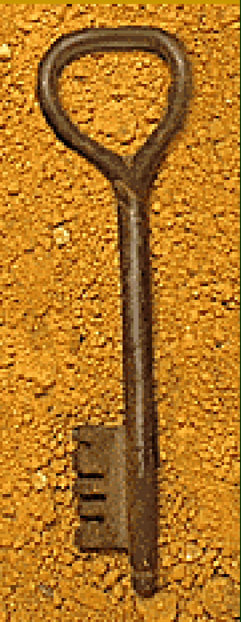
- 同时具有线性和移不变性的离散时间系统称为线性移不变系统
- LSI：Linear Shift Invariant

3、单位抽样响应和卷积和

单位抽样响应h(n)是指输入为单位抽样序列 $\delta(n)$ 时的系统输出：

$$h(n) = T[\delta(n)]$$





对LSI系统，讨论对任意输入的系统输出

$$x(n) \longrightarrow \boxed{T[\ \cdot\ ]} \longrightarrow y(n)$$

任意输入序列： $x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$

系统输出：

$$y(n)=T[x(n)]=T[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)]$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T[\delta(n-m)], \quad \text{线性性}$$

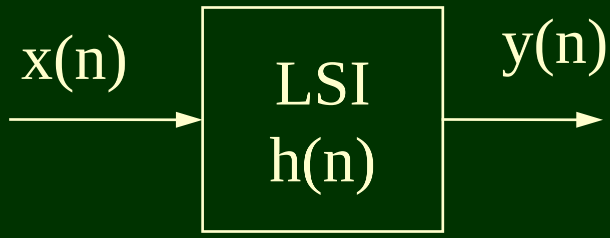
$$T[\sum_i a_i x_i(n)] = \sum_i a_i T[x_i(n)]$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m), \quad \text{移不变性}$$

$$h(n)=T[\delta(n)]$$

$$h(n-m)=T[\delta(n-m)]$$

$$=x(n)*h(n)$$



$$y(n) = x(n) * h(n)$$

一个LSI系统可以用单位抽样响应h(n)来表征，任意输入的系统输出等于输入序列和该单位抽样响应h(n)的卷积和。

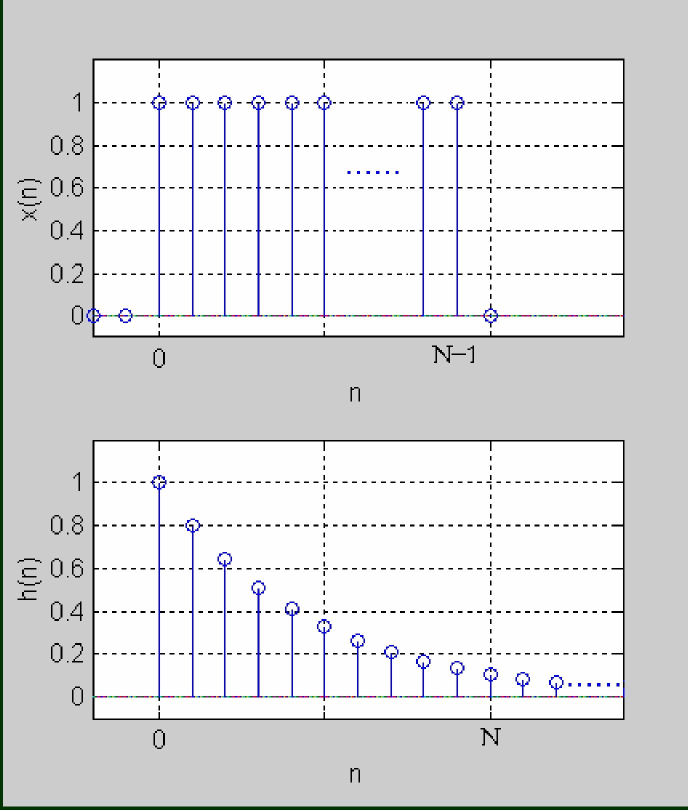
例：某LSI系统，其单位抽样响应为：

$$h(n) = a^n u(n) \quad 0 < a < 1$$

输入序列为：

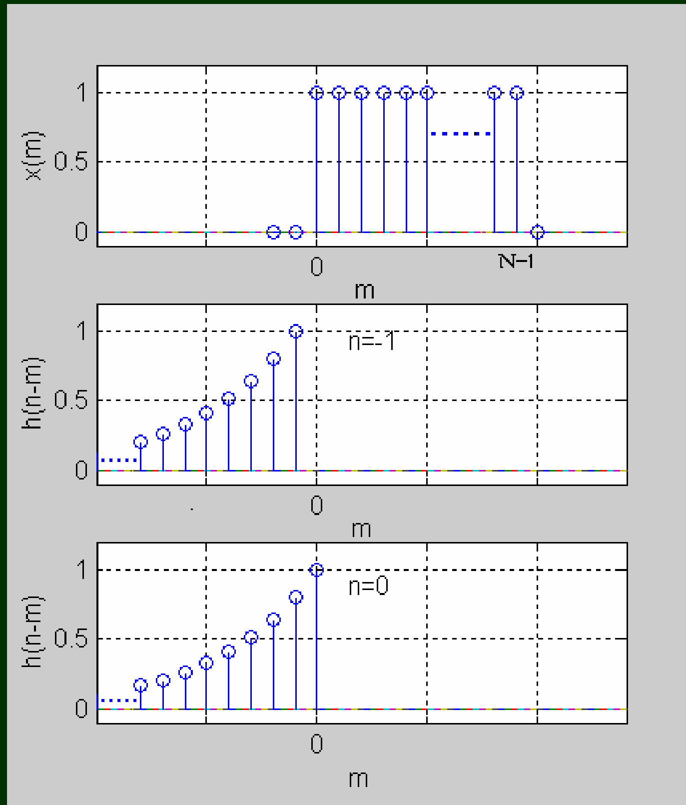
$$x(n) = u(n) - u(n-N)$$

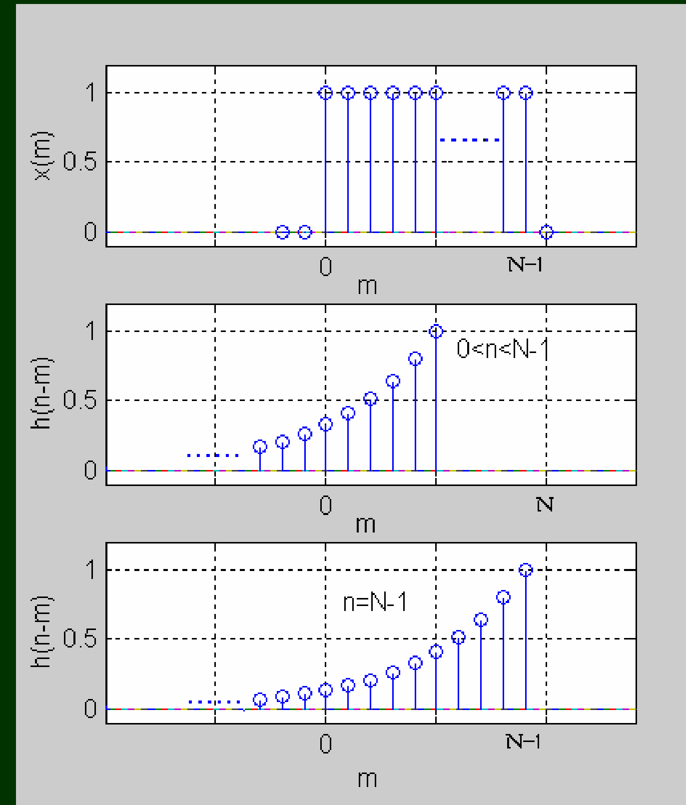
求系统输出。



解：$y(n) = x(n) * h(n)$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$





当$n<0$时 $\quad y(n)=0$

当$0\le n<N$时 $\quad y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=\sum_{m=0}^{n}1\cdot a^{n-m}$

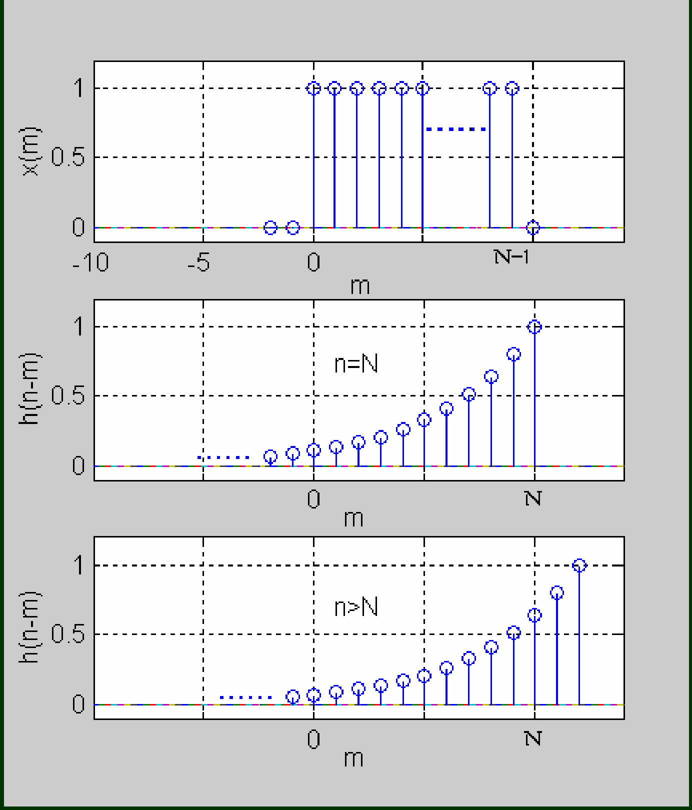
$$=a^{n}\sum_{m=0}^{n}a^{-m}=a^{n}\frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}}$$

当$n \ge N$时

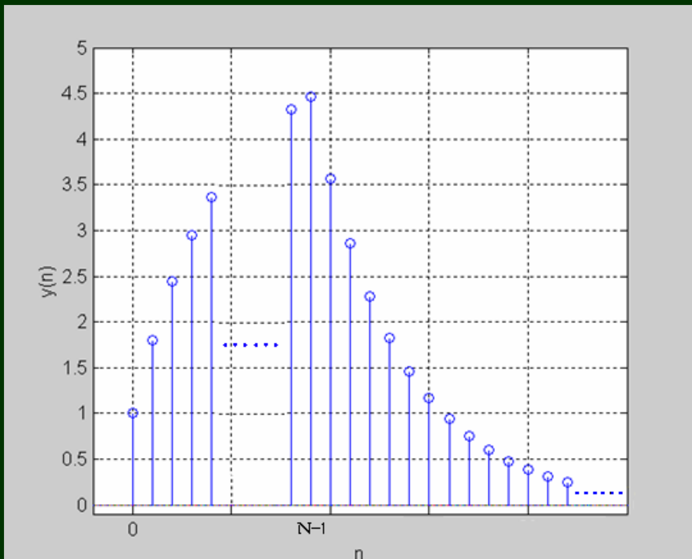
$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1} 1\cdot a^{n-m}=a^{n}\sum_{m=0}^{N-1} a^{-m}$$

$$=a^{n}\frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}}$$



$$\therefore \quad y(n)=\begin{cases} 0 & n<0 \\ a^{n}\dfrac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}} & 0\le n<N \\ a^{n}\dfrac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}} & n\ge N \end{cases}$$

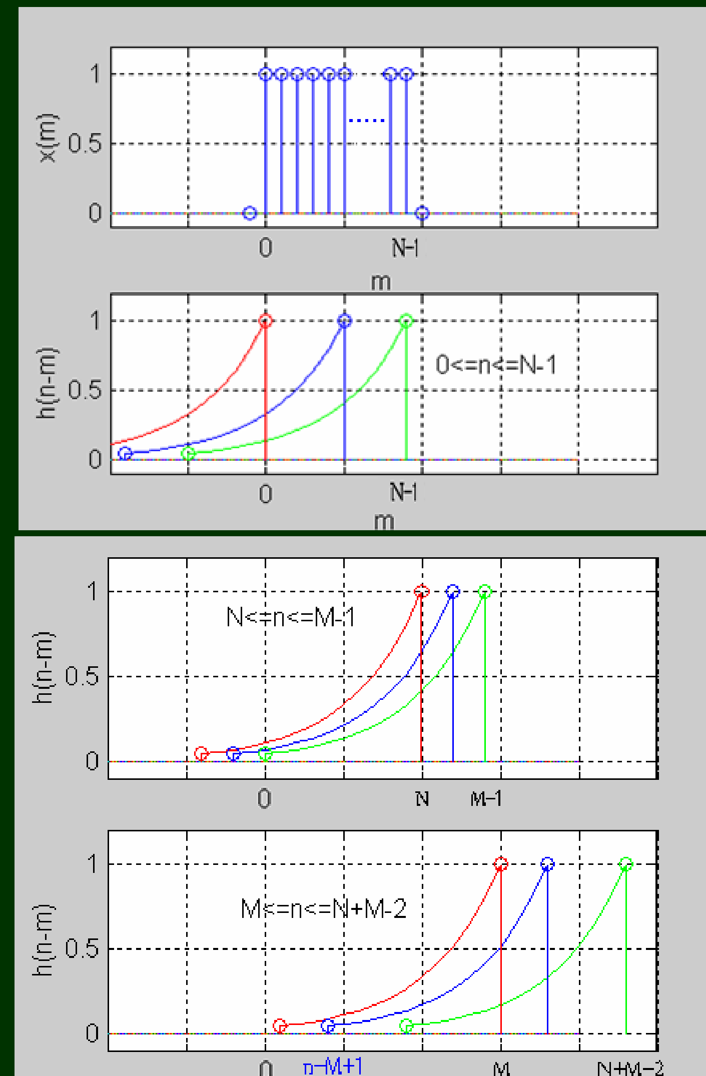


若 $x(n)=x(n)R_N(n)$

$h(n)=h(n)R_M(n)$

求输出 $y(n)$

1） 当 $M \ge N$



$n<0$ 时 $\quad y(n)=0$

$0 \le n \le N-1$ 时

$$y(n)=\sum_{m=0}^{n} x(m)h(n-m)$$

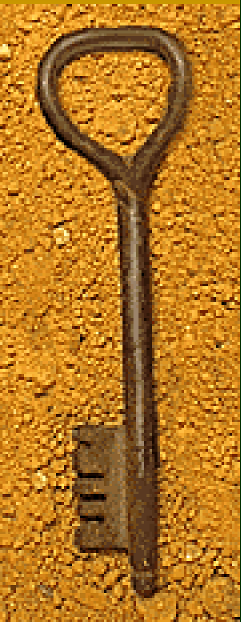
$N \le n \le M-1$ 时

$$y(n)=\sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n-m)$$

$M \le n \le N+M-2$ 时

$$y(n)=\sum_{m=n-M+1}^{N-1} x(m)h(n-m)$$

$n \ge N+M-1$ 时 $\quad y(n)=0$



2） 当$M < N$

$n < 0$时　$y(n) = 0$

$0 \le n \le M-1$时

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} x(m)h(n-m)$$

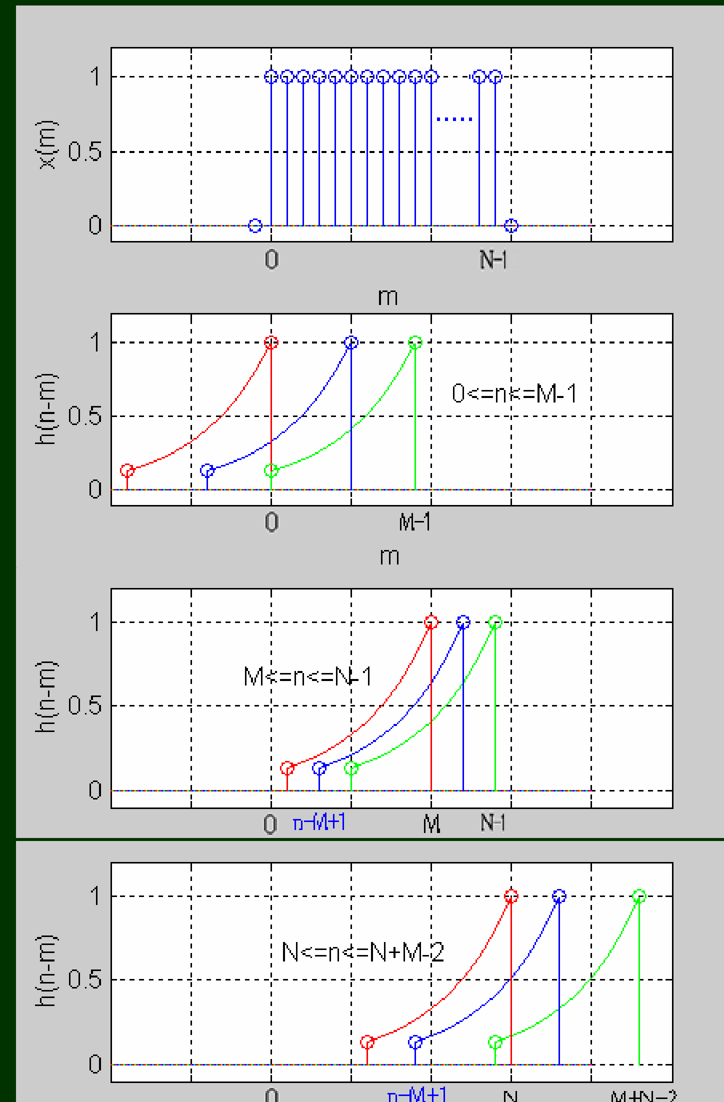
$M \le n \le N-1$时

$$y(n) = \sum_{m=n-M+1}^{n} x(m)h(n-m)$$

$N \le n \le N+M-2$时

$$y(n) = \sum_{m=n-M+1}^{N-1} x(m)h(n-m)$$

$n \ge N+M-1$时　$y(n) = 0$



思考:

当x(n)的非零区间为[N1,N2]，h(n)的非零区间为[M1,M2]时，求解系统的输出y(n)又如何分段？

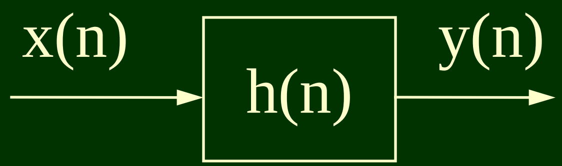
结论：

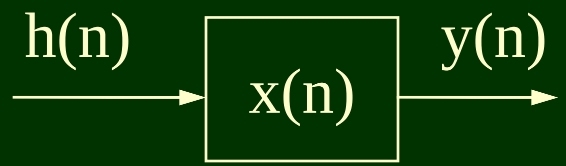
若有限长序列x(n)的长度为N，h(n)的长度为M，则其卷积和的长度L为：

L=N+M-1

4、LSI系统的性质

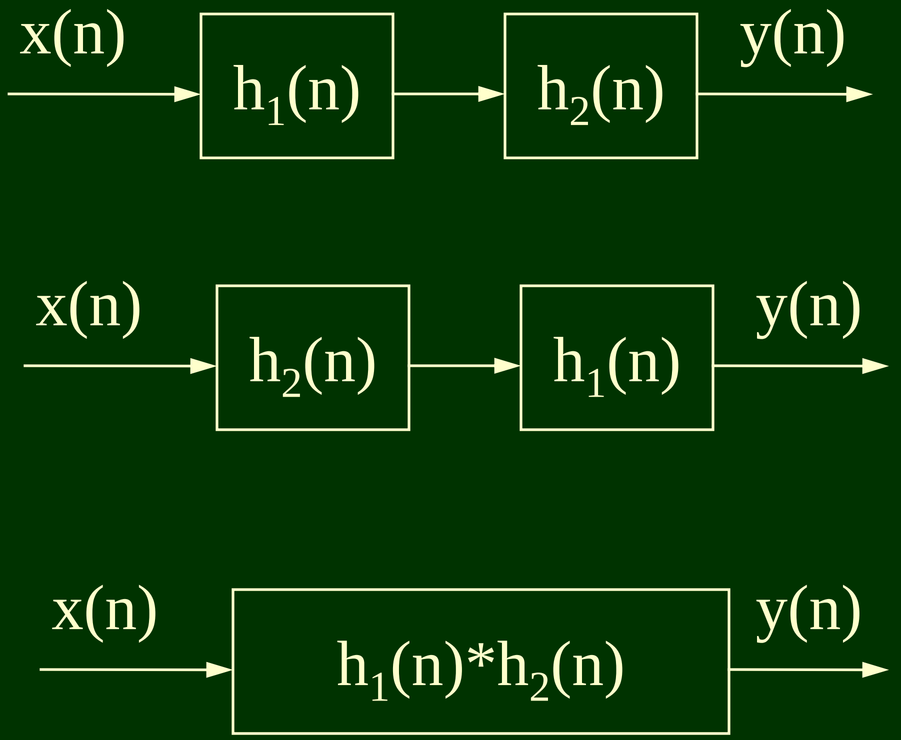
交换律





$$y(n)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

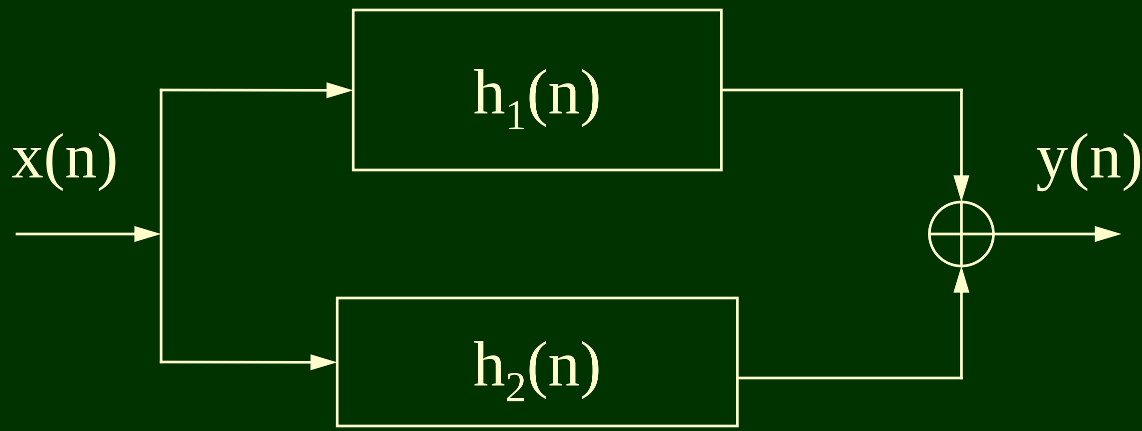
结合律

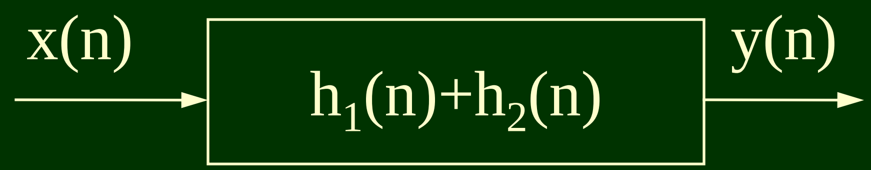


$$x(n)*h_1(n)*h_2(n)=x(n)*h_2(n)*h_1(n)$$

$$h(n)=h_1(n)*h_2(n) \qquad y(n)=x(n)*h(n)$$

分配律





$$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)] = x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$$

5、因果系统

若系统 n时刻的输出，只取决于n时刻以及n时刻以前的输入序列，而与n时刻以后的输入无关，则称该系统为因果系统。

LSI系统是因果系统的充要条件：

$$h(n) = 0 \quad n < 0$$

6、稳定系统

稳定系统是有界输入产生有界输出的系统

若 $|x(n)| \le M < \infty$

则 $|y(n)| \le P < \infty$

LSI系统是稳定系统的充要条件：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = P < \infty$$

例：某LSI系统，其单位抽样响应为

$$h(n)=a^n u(-n)$$

试讨论其是否是因果的、稳定的。

解：讨论因果性： $\because n<0$时 $h(n)\neq 0$

$\therefore$ 该系统是非因果系统

讨论稳定性：

$$\because \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{0}\left|a^n\right|=\sum_{n=0}^{\infty}|a|^{-n}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|a|^{-1}} & |a|>1\\ \infty & |a|\le 1\end{cases}$$

$\therefore$ 当$|a|>1$时系统稳定，当$|a|\le 1$时系统不稳定

结论：

因果稳定的LSI系统的单位抽样响应是因果的，且是绝对可和的，即：

$$\begin{cases} h(n) = h(n)u(n) \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \end{cases}$$

三、*常系数线性差分方程*

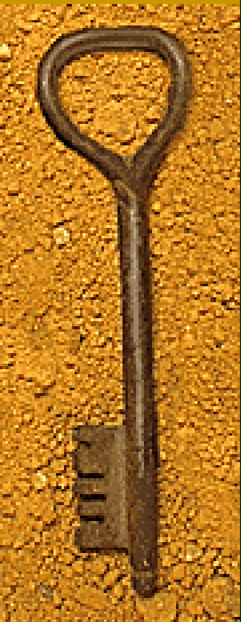
用差分方程来描述时域离散系统的输入输出关系。

一个N阶常系数线性差分方程表示为：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$$

其中：

$a_0 = 1$，a_k，b_m 是常数



求解常系数线性差分方程的方法：

1）经典解法

2）递推解法

3）变换域方法

例1：已知常系数线性差分方程

$$y(n)-ay(n-1)=x(n)$$

若边界条件

$$y(-1)=0$$

求其单位抽样响应。

解：令输入$x(n)=\delta(n)$，则输出$y(n)=h(n)$，

又已知$y(-1)=0$

由$y(n)=ay(n-1)+x(n)$，得

$$y(0)=ay(-1)+x(0)=1$$

$$y(1)=ay(0)+x(1)=a$$

$$y(2)=ay(1)+x(2)=a^2$$

$$y(3)=ay(2)+x(3)=a^3$$

$$\vdots$$

$$y(n)=a^n,\quad n\geq 0$$

由$y(n-1)=\dfrac{1}{a}[y(n)-x(n)]$，得

$$y(-2)=\frac{1}{a}[y(-1)-x(-1)]=0$$

$$y(-3)=\frac{1}{a}[y(-2)-x(-2)]=0$$

$$\vdots$$

$$y(n)=0,\quad n\leq -1$$

$$\therefore h(n)=y(n)=a^n u(n)$$

例2：已知常系数线性差分方程同上例

若边界条件

$$y(0)=0$$

求其单位抽样响应。

解：令输入$x(n)=\delta(n)$，则输出$y(n)=h(n)$，

又已知$y(0)=0$

由$y(n-1)=\frac{1}{a}[y(n)-x(n)]$，得

$$y(-1)=\frac{1}{a}[y(0)-x(0)]=-\frac{1}{a}=-a^{-1}$$

$$y(-2)=\frac{1}{a}[y(-1)-x(-1)]=-a^{-2}$$

$$y(-3)=\frac{1}{a}[y(-2)-x(-2)]=-a^{-3}$$

$$\vdots$$

$$y(n)=-a^{n}，\quad n\le -1$$

由$y(n)=ay(n-1)+x(n)$，得

$$y(1)=ay(0)+x(1)=0$$

$$y(2)=ay(1)+x(2)=0$$

$$\vdots$$

$$y(n)=0，\quad n\ge 1$$

$$\therefore h(n)=y(n)=-a^{n}u(-n-1)$$

例3：已知常系数线性差分方程同上例

若边界条件

$$y(-1)=1$$

讨论系统的线性性和移不变性。

解：1）令输入$x_1(n)=\delta(n)$，由$y_1(-1)=1$，求输出$y_1(n)$

由$y_1(n)=ay_1(n-1)+x_1(n)$，得

$$y_1(0)=ay_1(-1)+x_1(0)=a+1$$

$$y_1(1)=ay_1(0)+x_1(1)=a(a+1)$$

$$y_1(2)=ay_1(1)+x_1(2)=a^2(a+1)$$

$$y_1(3)=ay_1(2)+x_1(3)=a^3(a+1)$$

$$\vdots$$

$$y_1(n)=a^n(a+1),\quad n\geq 0$$

由$y_1(n-1)=\dfrac{1}{a}[y_1(n)-x_1(n)]$，得

$$y_1(-2)=\frac{1}{a}[y_1(-1)-x_1(-1)]=a^{-1}$$

$$y_1(-3)=\frac{1}{a}[y_1(-2)-x_1(-2)]=a^{-2}$$

$$\vdots$$

$$y_1(n)=a^{n+1},\quad n\leq -1$$

$$\therefore y_1(n)=(1+a)a^n u(n)+a^{n+1}u(-n-1)$$

2）令输入$x_2(n)=\delta(n-1)$，由$y_2(-1)=1$，求输出$y_2(n)$

由$y_2(n)=ay_2(n-1)+x_2(n)$，得

$$y_2(0)=ay_2(-1)+x_2(0)=a$$

$$y_2(1)=ay_2(0)+x_2(1)=a^2+1$$

$$y_2(2)=ay_2(1)+x_2(2)=a(a^2+1)$$

$$y_2(3)=ay_2(2)+x_2(3)=a^2(a^2+1)$$

$\vdots$

$$y_2(n)=a^{n-1}(a^2+1),\quad n\geq 1$$

同步骤1），由

$$y_2(n-1)=\frac{1}{a}[y_2(n)-x_2(n)]$$

得$y_2(n)=a^{n+1}$，$n\leq -1$

$$\therefore y_2(n)=a\delta(n)+(1+a^2)a^{n-1}u(n-1)+a^{n+1}u(-n-1)$$

3）令输入$x_3(n)=x_1(n)+x_2(n)=\delta(n)+\delta(n-1)$,

由$y_3(-1)=1$，求输出$y_3(n)$

由$y_3(n)=ay_3(n-1)+x_3(n)$，得

$$y_3(0)=ay_3(-1)+x_3(0)=a+1$$

$$y_3(1)=ay_3(0)+x_3(1)=a^2+a+1$$

$$y_3(2)=ay_3(1)+x_3(2)=a(a^2+a+1)$$

$$y_3(3)=ay_3(2)+x_3(3)=a^2(a^2+a+1)$$

$\vdots$

$$y_3(n)=a^{n-1}(a^2+a+1),\quad n\geq 1$$

同步骤1），由

$$y_3(n-1)=\frac{1}{a}[y_3(n)-x_3(n)]$$

得$y_3(n)=a^{n+1}$，$n\leq -1$

$$\therefore y_3(n)=(1+a)\delta(n)+(1+a+a^2)a^{n-1}u(n-1)$$

$$+a^{n+1}u(-n-1)$$

4）结论：

$\because$ 当输入$x_1(n)=\delta(n)$时，输出

$$y_1(n)=(1+a)a^n u(n)+a^{n+1}u(-n-1)$$

当输入$x_2(n)=\delta(n-1)$时，输出

$$y_2(n)=a\delta(n)+(1+a^2)a^{n-1}u(n-1)+a^{n+1}u(-n-1)$$

由于$x_2(n)=x_1(n-1)$，而$y_2(n)\neq y_1(n-1)$

$\therefore y(-1)=1$边界条件下的系统不是移不变系统

当输入$x_3(n)=x_1(n)+x_2(n)=\delta(n)+\delta(n-1)$时，输出

$$y_3(n)=(1+a)\delta(n)+(1+a+a^2)a^{n-1}u(n-1)$$

$$+a^{n+1}u(-n-1)\neq y_1(n)+y_2(n)$$ 不满足可加性

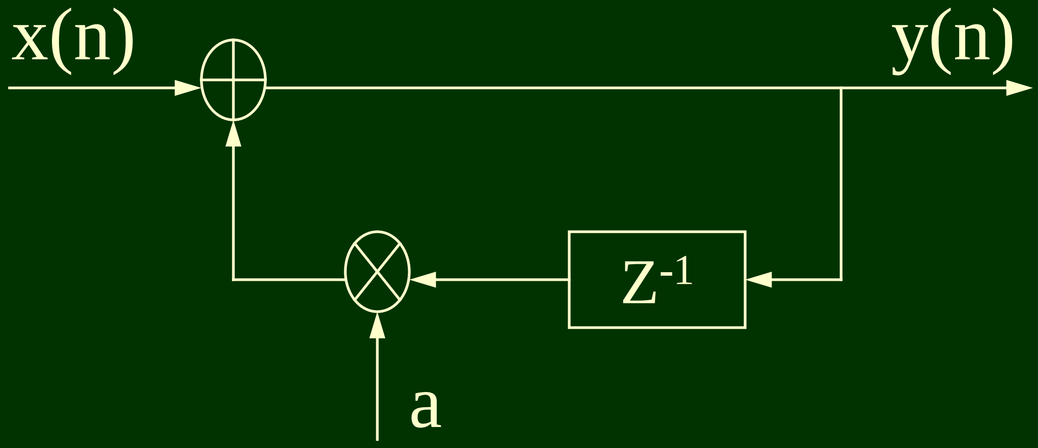
$\therefore y(-1)=1$边界条件下的系统不是线性系统

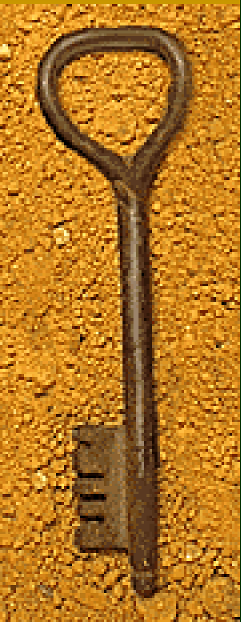
一些关于差分方程的结论：

- 一个差分方程不能唯一确定一个系统
- 常系数线性差分方程描述的系统不一定是线性移不变的
- 不一定是因果的
- 不一定是稳定的

差分方程 ——→ 系统结构

$$y(n)-ay(n-1)=x(n)$$





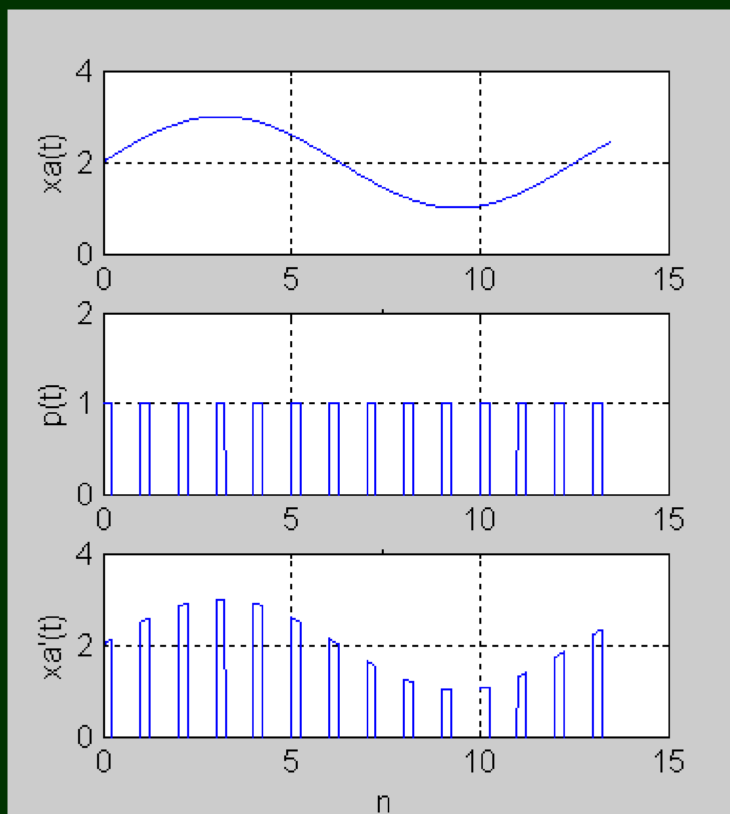
四、连续时间信号的抽样

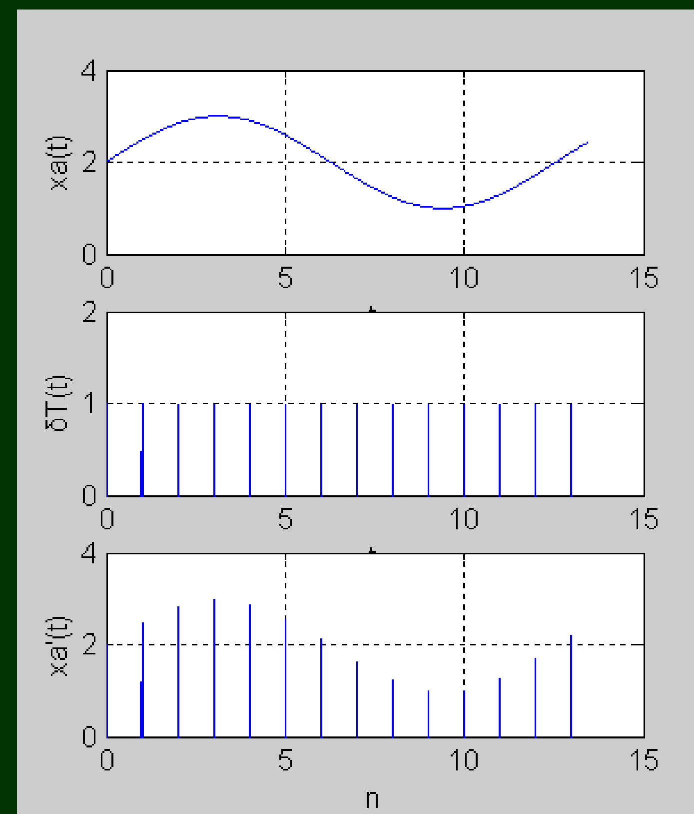
$$x_a(t) \to \hat{x}_a(t)$$

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot p_T(t)$$

当 $\tau \to 0$

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot \delta_T(t)$$





讨论：

- 采样前后信号频谱的变化
- 什么条件下，可以从采样信号不失真地恢复出原信号

1、理想抽样 $\tau \to 0$

冲激函数：$\delta_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$

理想抽样输出：

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot \delta_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT)\delta(t - mT)$$

求理想抽样的频谱$\hat{X}_a(j\Omega)$

$$X_a(j\Omega) = DTFT[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$\Delta_T(j\Omega) = DTFT[\delta_T(t)] = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - k\Omega_s)$$

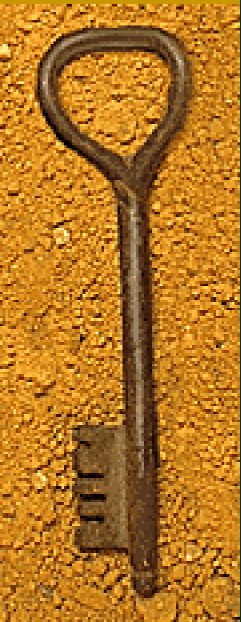
$$\hat{X}_a(j\Omega) = DTFT[\hat{x}_a(t)] = \frac{1}{2\pi}[X_a(j\Omega) * \Delta_T(j\Omega)]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\theta)\Delta_T(j\Omega - j\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}[\int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\theta)\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - k\Omega_s - \theta)d\theta]$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\theta)\delta(\Omega - k\Omega_s - \theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s)$$



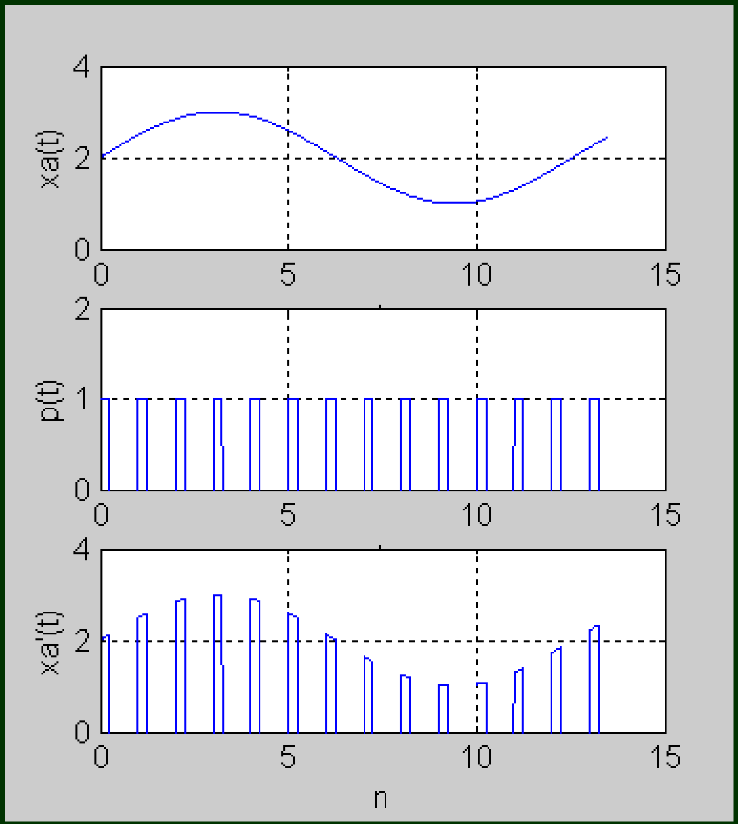
四、连续时间信号的抽样

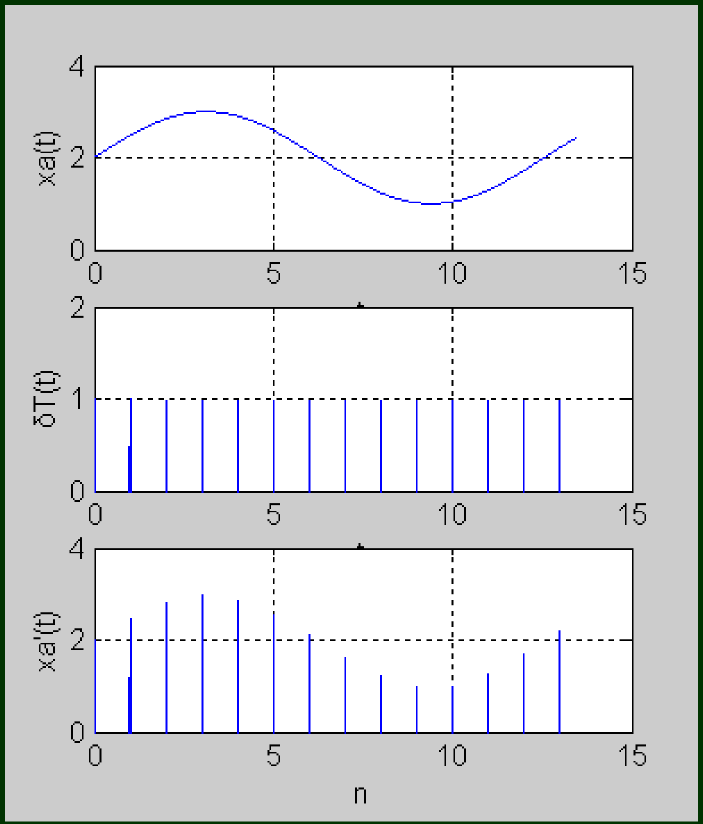
$$x_a(t) \rightarrow \hat{x}_a(t)$$

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot p_T(t)$$

当$\tau \rightarrow 0$

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot \delta_T(t)$$





讨论：

- 采样前后信号频谱的变化
- 什么条件下，可以从采样信号不失真地恢复出原信号

1、理想抽样 $\tau \to 0$

冲激函数：$\delta_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$

理想抽样输出：

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot \delta_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT)\delta(t - mT)$$

求理想抽样的频谱$\hat{X}_a(j\Omega)$

$$X_a(j\Omega) = DTFT[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$\Delta_T(j\Omega) = DTFT[\delta_T(t)] = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

$$\hat{X}_a(j\Omega) = DTFT[\hat{x}_a(t)] = \frac{1}{2\pi}[X_a(j\Omega) * \Delta_T(j\Omega)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\theta) \Delta_T(j\Omega - j\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} [\int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\theta) \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s - \theta) d\theta]$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\theta) \delta(\Omega - k\Omega_s - \theta) d\theta$$

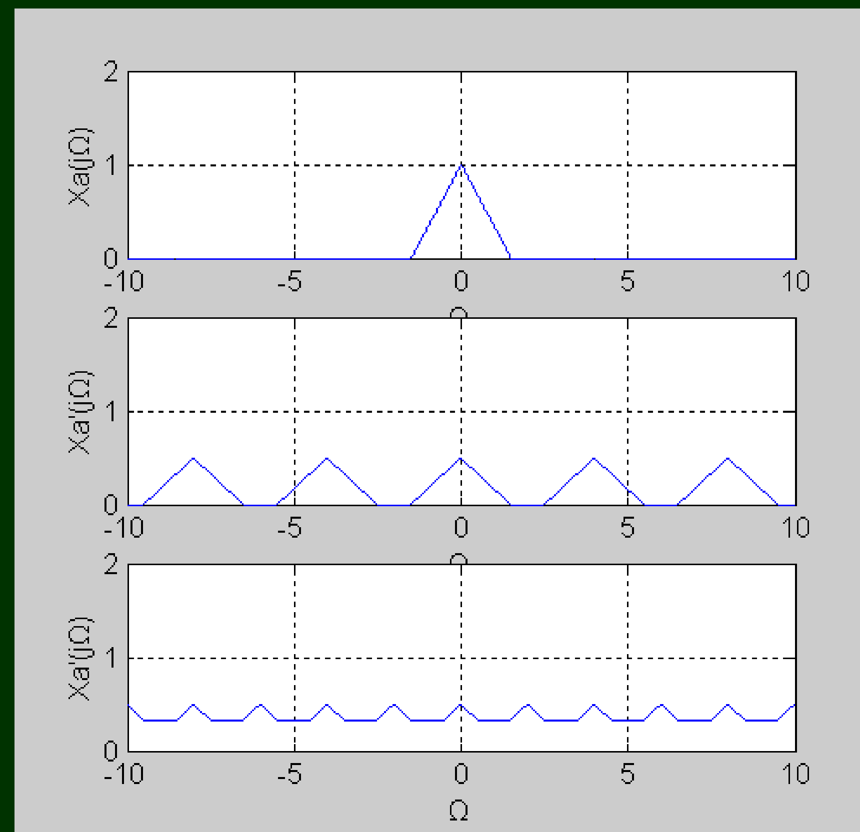
$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s)$$

- 抽样信号的频谱是模拟信号频谱以抽样频率为周期进行周期延拓而成
- 频谱幅度是原信号频谱幅度的1/T倍
- 若信号的最高频率

$$\Omega_h > \frac{\Omega_s}{2},$$

$\frac{\Omega_s}{2}$为折叠频率

则延拓分量产生频谱混叠



奈奎斯特抽样定理

要想抽样后能够不失真地还原出原信号，则抽样频率必须大于两倍信号谱的最高频率

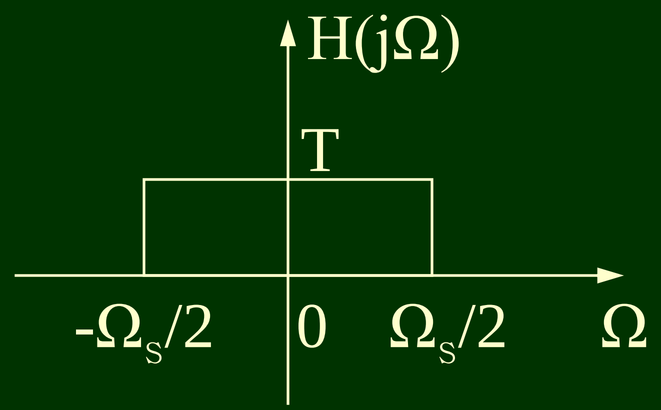
$$\Omega_s > 2\Omega_h \quad 即 f_s > 2f_h$$

2、抽样的恢复

利用低通滤波器还原满足奈奎斯特抽样定理的抽样信号。

理想低通滤波器:

$$H(j\Omega)=\begin{cases} T & |\Omega|<\dfrac{\Omega_s}{2} \\ 0 & |\Omega|\geq\dfrac{\Omega_s}{2} \end{cases}$$



$$Y_a(j\Omega)=\hat{X}_a(j\Omega)\cdot H(j\Omega)=X_a(j\Omega)$$

讨论 $\hat{x}_a(t) \rightarrow x_a(t)$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

$$= \frac{T}{2\pi}\int_{-\Omega_s}^{\Omega_s} e^{j\Omega t}d\Omega = \frac{\sin(\frac{\Omega_s}{2}t)}{\frac{\Omega_s}{2}t} = \frac{\sin(\frac{\pi}{T}t)}{\frac{\pi}{T}t}$$

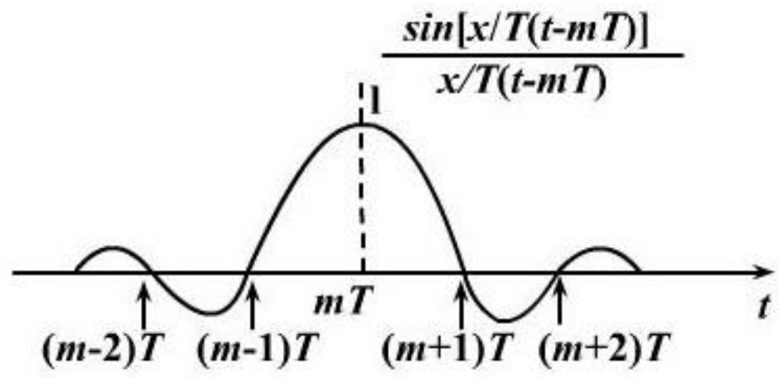
输出： $y_a(t) = x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(\tau)\delta(\tau - mT)]h(t-\tau)d\tau$$

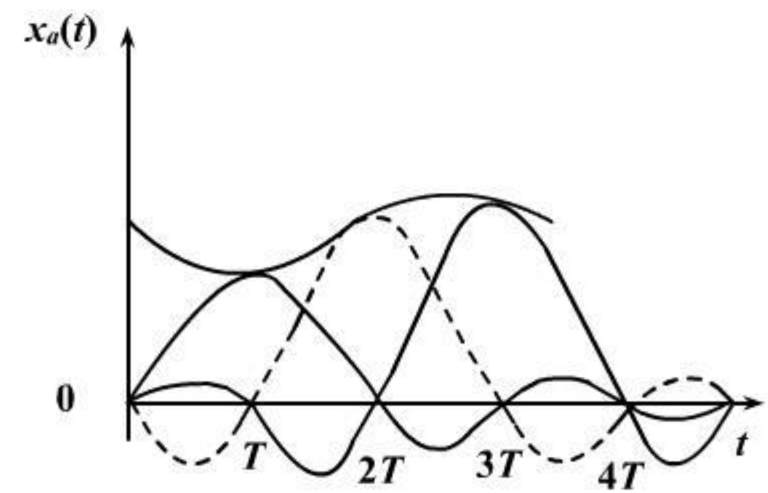
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_a(\tau)h(t-\tau)\delta(\tau - mT)d\tau$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT)h(t-mT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT)\frac{\sin[\frac{\pi}{T}(t-mT)]}{\frac{\pi}{T}(t-mT)}$$

$$\text{内插函数：}h(t-mT)=\frac{\sin[\frac{\pi}{T}(t-mT)]}{\frac{\pi}{T}(t-mT)}$$



内插函数



抽样的内查恢复

信号的抽样值$x_a(mT)$经内插函数得到连续信号$x_a(t)$

3、实际抽样

- 抽样脉冲不是冲激函数，而是一定宽度的矩形周期脉冲

$$p_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{jk\Omega_s t}$$

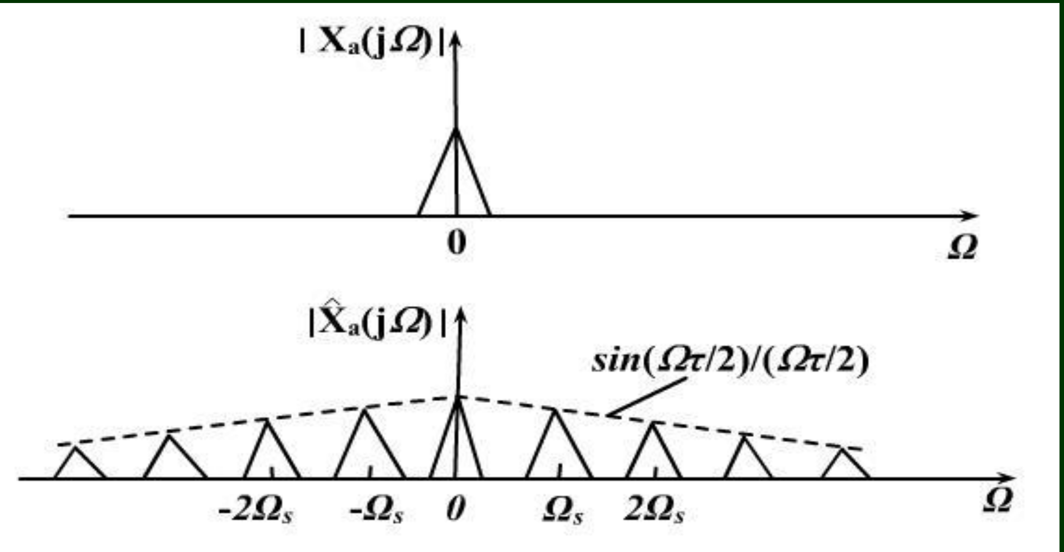
其中系数C_k随k变化

- 抽样信号频谱

$$\hat{X}_a(j\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k X_a(j\Omega-jk\Omega_s)$$

- 抽样信号的频谱是连续信号频谱的周期延拓，周期为Ωs
- 若满足奈奎斯特抽样定理，则不产生频谱混叠失真
- 抽样后频谱幅度随着频率的增加而下降
- 幅度变化并不影响信号恢复，只要取

$$\hat{X}_a(j\Omega) = C_0 X_a(j\Omega) \qquad C_0 = \frac{\tau}{T} \qquad |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2}$$



实际抽样时，频谱包络的变化

例：模拟信号$x_a(t)=\sin(2\pi f_0 t+\frac{\pi}{8})$，其中$f_0=50Hz$

1）求$x_a(t)$的周期，采样频率应为多少？采样间隔应为多少？

2）若选采样频率$f_s=200Hz$，采样间隔为多少？

写出采样信号$\hat{x}_a(t)$的表达式；

3）画出对应$\hat{x}_a(t)$的时域离散信号$x(n)$的波形，

并求出$x(n)$的周期。

解：1）由 $f_0 = 50Hz$，得

$x_a(t)$的周期为： $T_0 = 1/f_0 = 0.02s$

采样频率应： $f_s > 2f_0 = 100Hz$

采样间隔应为：$T < 1/f_s = 0.01s$

2）选$f_s = 200Hz$

则采样间隔为：$T = 1/f_s = 0.005s$

$$x_a(nT) = \sin(2\pi f_0 nT + \pi/8) = \sin(2\pi f_0 n/f_s + \pi/8)$$

$$= \sin(2\pi \frac{50}{200} n + \pi/8) = \sin(\frac{1}{2}\pi n + \pi/8)$$

$$\therefore \hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT)$$

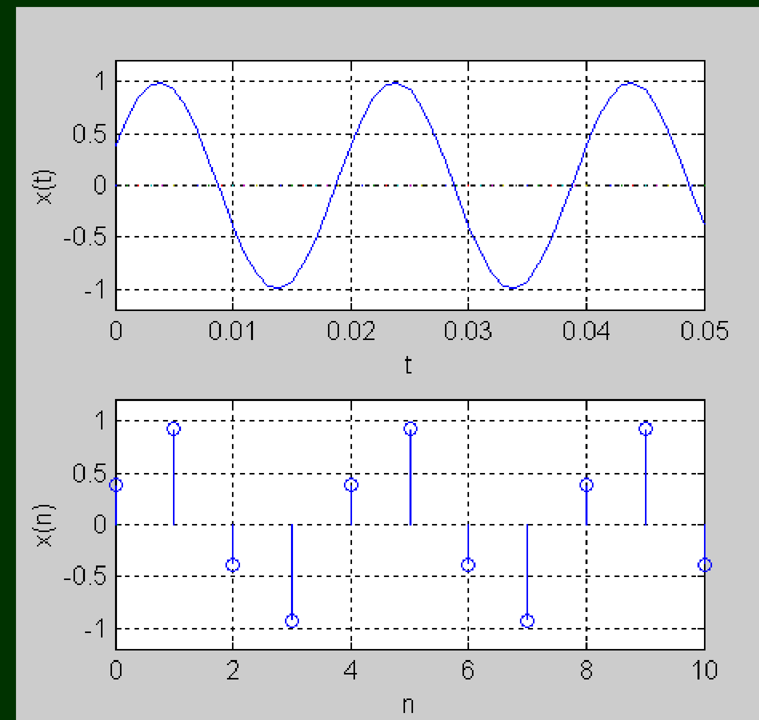
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(\frac{1}{2}\pi n + \frac{\pi}{8})\delta(t - \frac{n}{200})$$

$$x(n) = x_a(t)\Big|_{t=nT} = \sin(\frac{1}{2}\pi n + \frac{\pi}{8})$$

$$\because \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{1/2\pi} = 4 = \frac{N}{k}$$

$N = 4$为最小正整数

$\therefore x(n)$的周期为$N = 4$



4、正弦信号的抽样

连续时间正弦信号：

$$x(t) = A\sin(\Omega_0 t + \phi) = A\sin(2\pi f_0 t + \phi)$$

取 $f_s = 2f_0$ 时， $x(n) = A\sin(\pi n + \phi)$

当 $\phi = 0$ $\quad x(n) = A\sin(\pi n) \quad x(0) = x(1) = 0$

当 $\phi = \pi/2$ $\quad x(n) = A\sin(\pi n + \pi/2)$

$$x(0) = A \quad x(1) = -A$$

$\therefore$ 对正弦信号采样，须满足 $f_s > 2f_0$