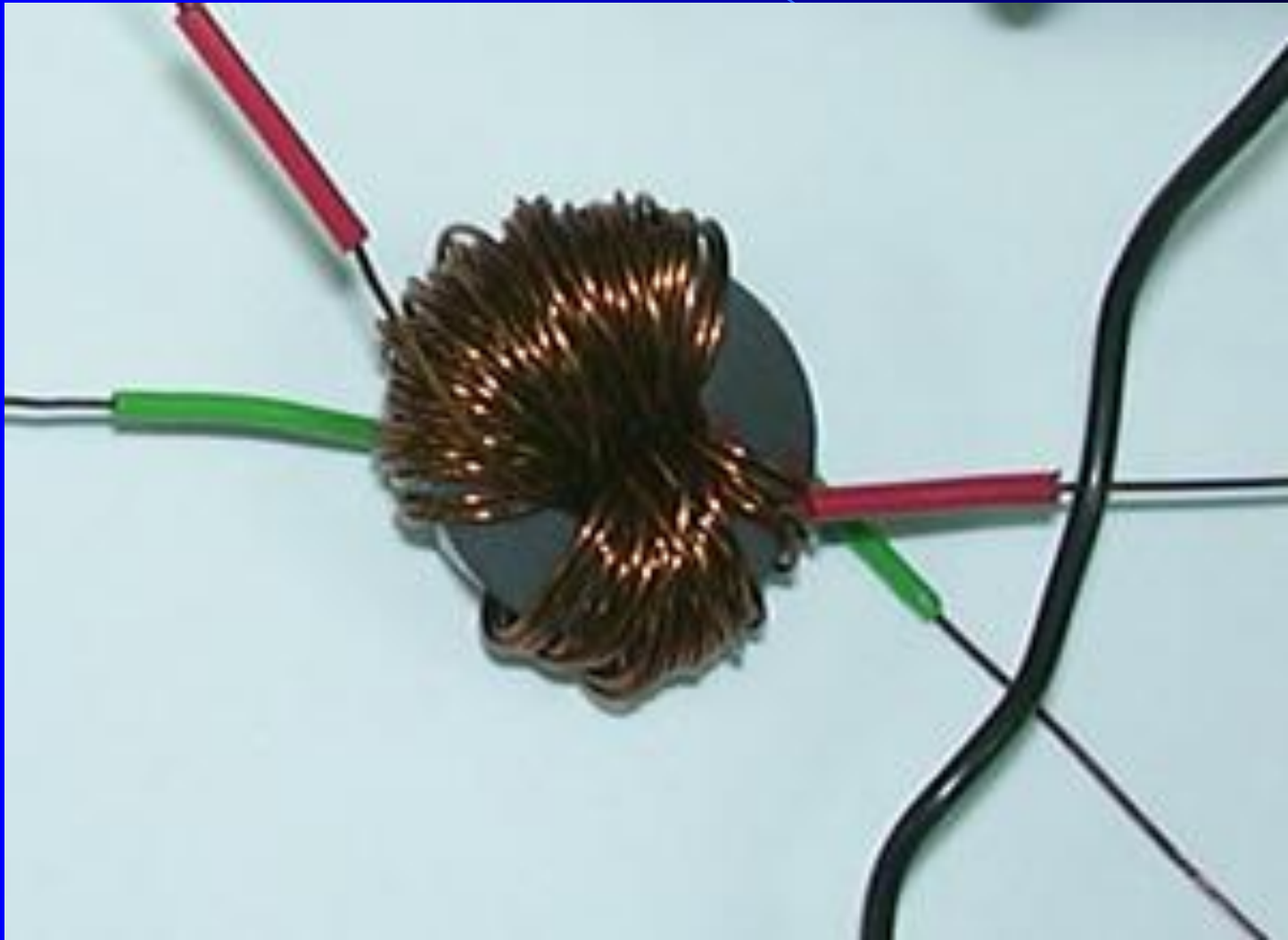


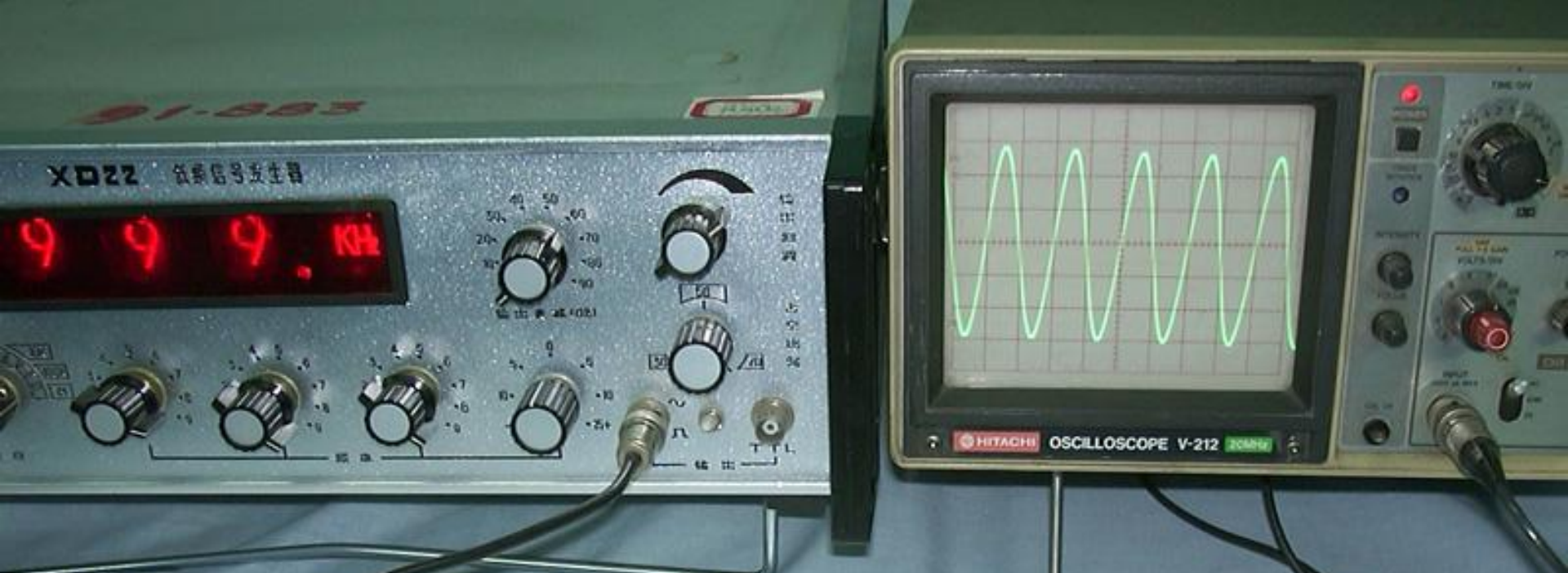
## 第十三章 含耦合电感的电路分析

磁耦合线圈在电子工程、通信工程和测量仪器等方面得到了广泛应用。为了得到实际耦合线圈的电路模型，现在介绍一种动态双口元件——**耦合电感**，并讨论含耦合电感的电路分析。

在介绍耦合电感元件以前，下面先用示波器观察磁耦合线圈初级和次级的波形。

在环形磁芯上用漆包线绕一个耦合电感，初级60匝，次级30匝，如图所示。

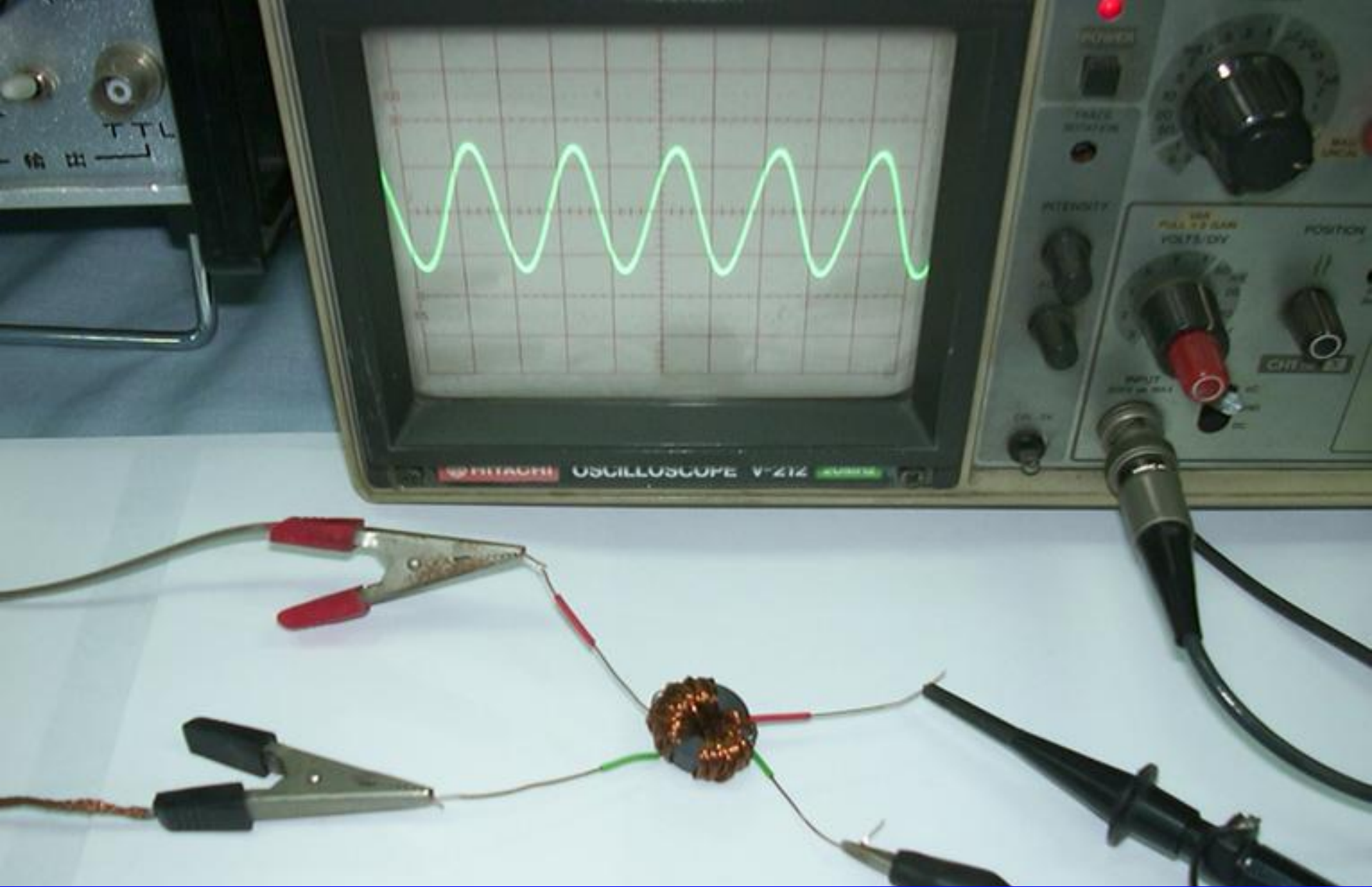




在环形磁芯上用漆包线绕一个耦合电感，初级60匝，次级30匝，如图所示。

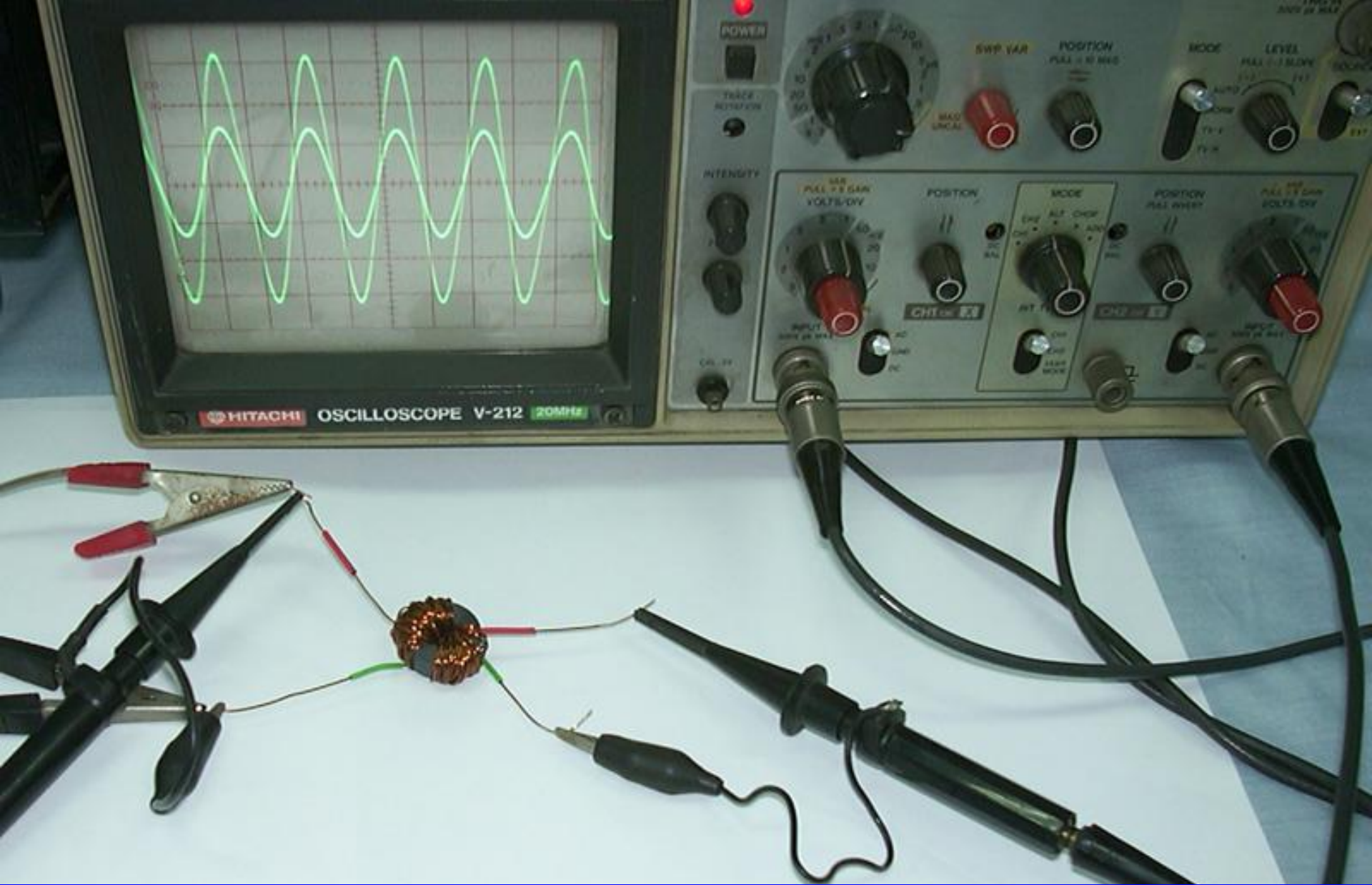


在初级加上999kHz的正弦信号，用示波器观察到正弦波形。

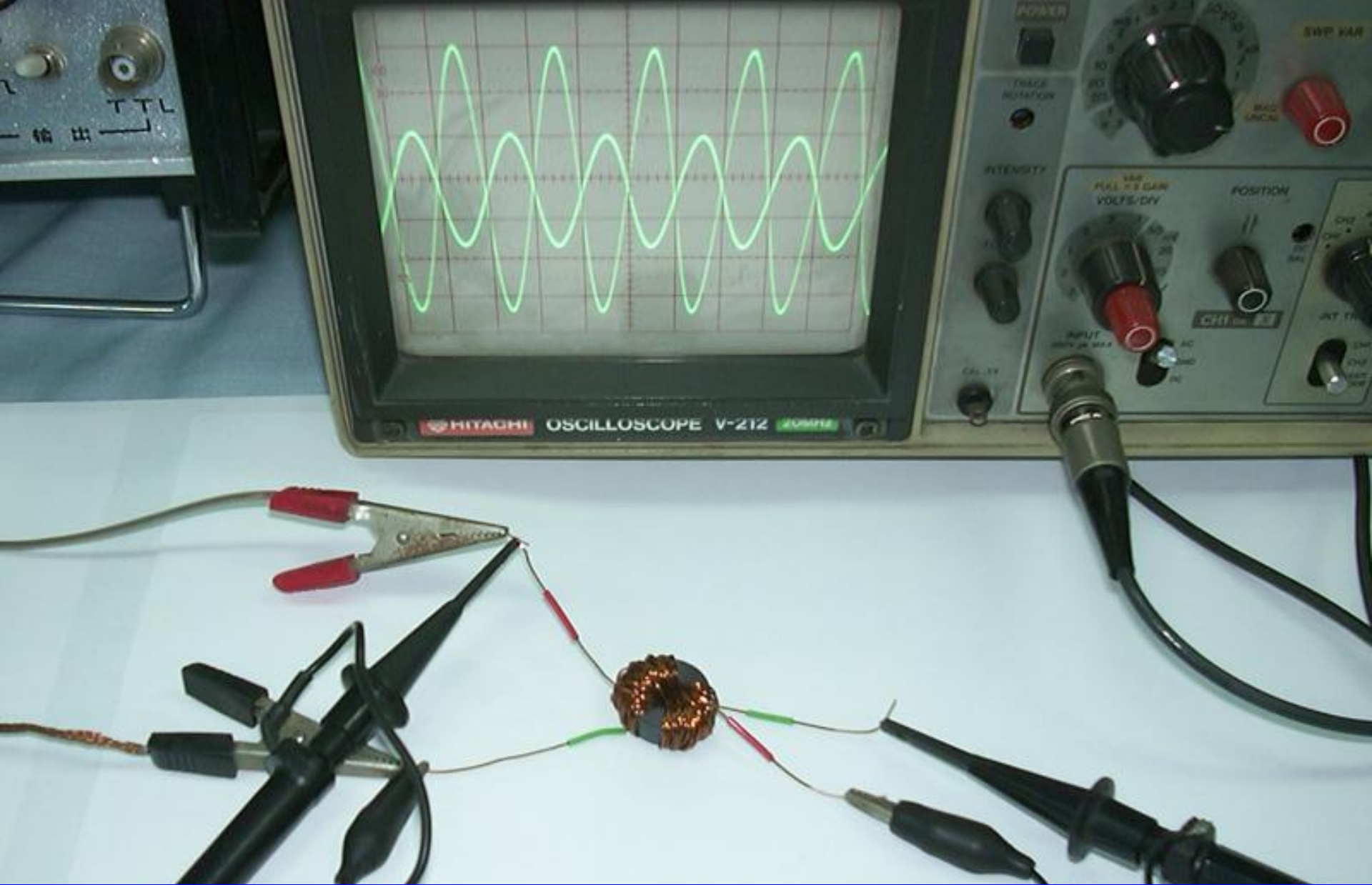


在耦合电感的次级上，可以观察到正弦波形，其幅度约为初级电压的一半。



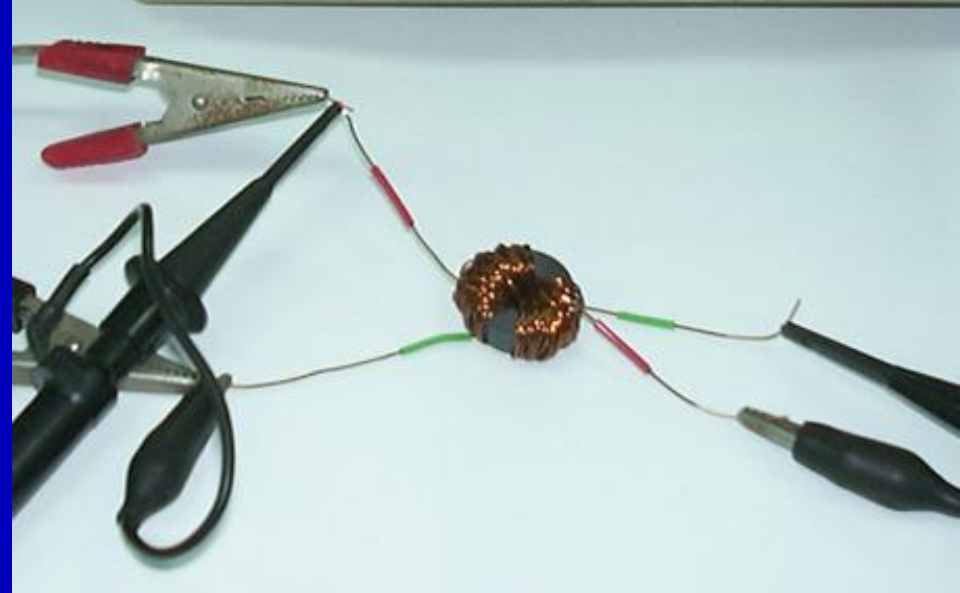
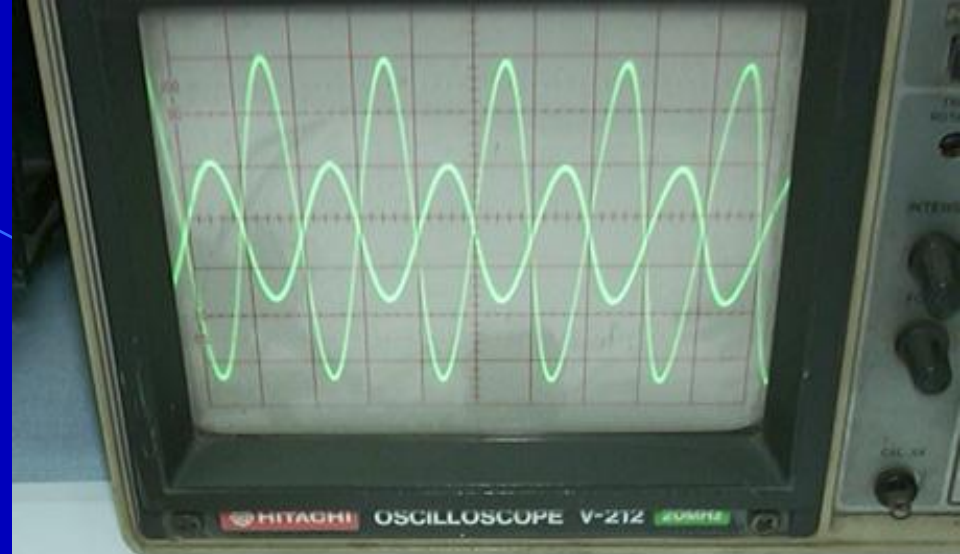
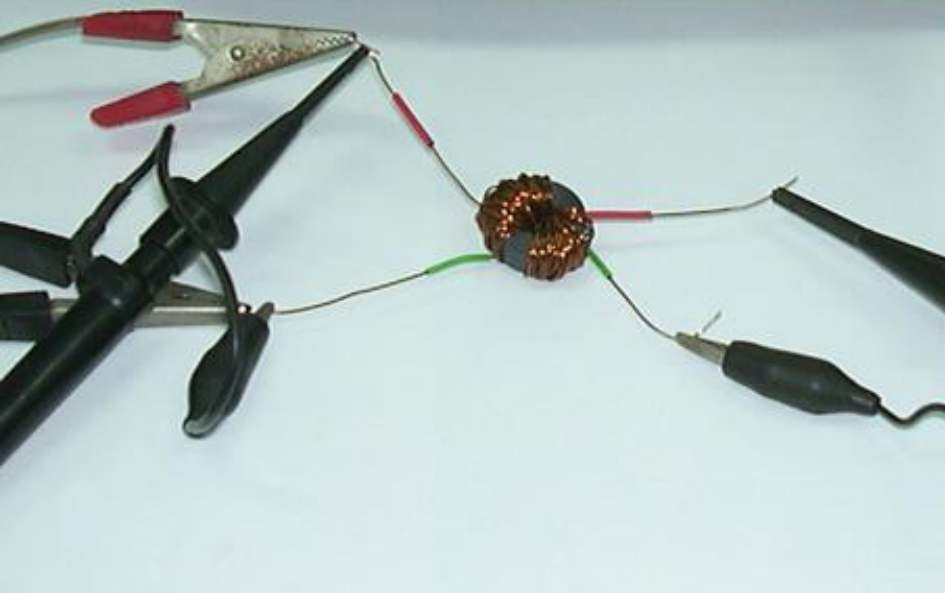
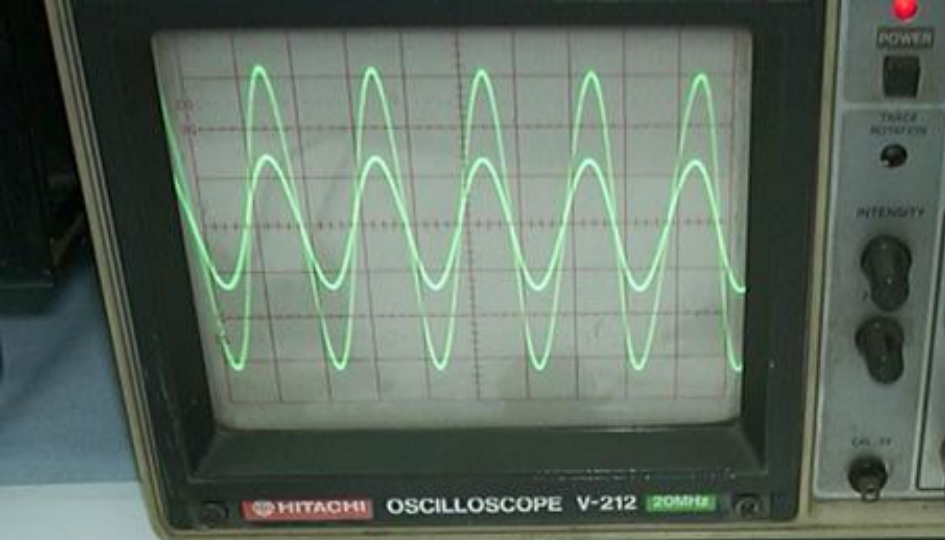


用双踪示波器可以同时观察耦合电感初级和次级线圈上的正弦电压波形，它们的相位是相同的。



当我们改变次级线圈的绕向时，耦合电感初级和次级线圈上电压波形的相位是相反的。





为了区别这两种情况，需确定耦合电感的同名端，图示耦合电感线圈的两个红色(或绿色)端钮是一对同名端。当初次级电压参考方向的正极都在同名端时，它们的相位相同。

## § 13-1 耦合电感的电压电流关系

图13-1所示为两个相互有磁耦合关系的线圈。第一个线圈中电流 $i_1$ 在线圈本身中形成的总磁通或磁链记为 $\psi_{11}$ ，它与电流 $i_1$ 成正比，即 $\psi_{11}=L_1i_1$ ， $L_1$ 称为线圈1的自感。电流 $i_1$ 在第二个线圈全部匝数 $N_2$ 中形成的总磁通或磁链记为 $\psi_{21}$ ，它也与电流 $i_1$ 成正比，即 $\psi_{21}=M_{21}i_1$ ，比例系数 $M_{21}$ 称为线圈1与线圈2的互感。

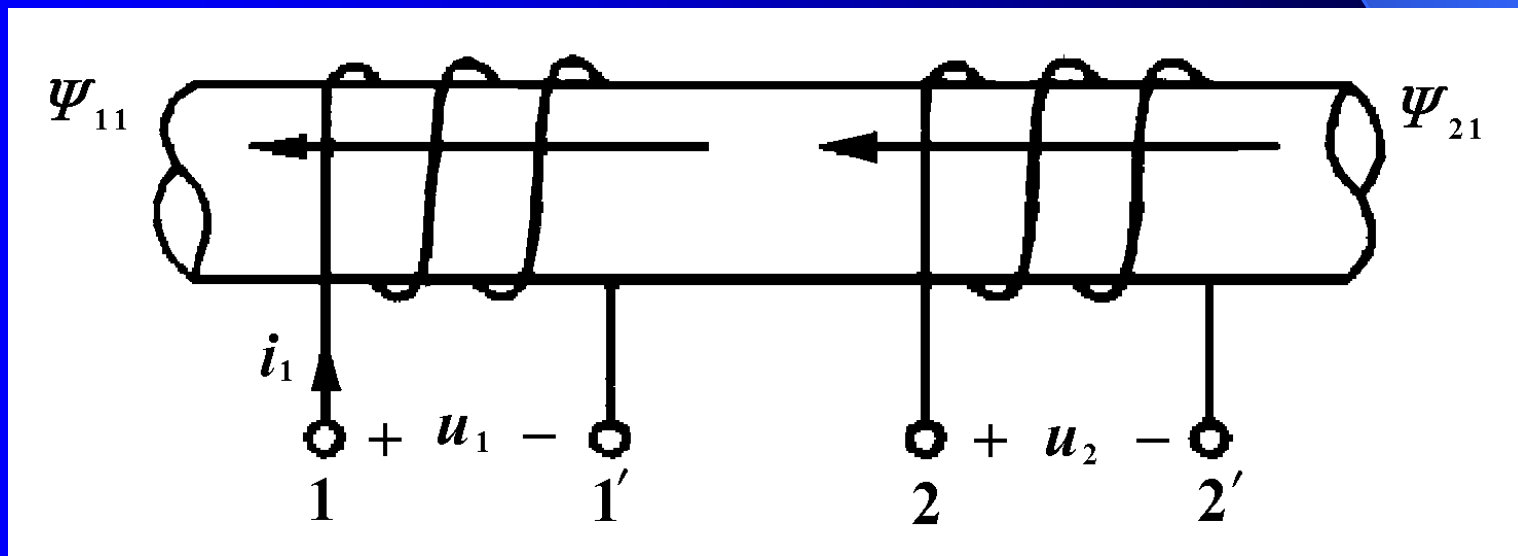


图13-1(a)



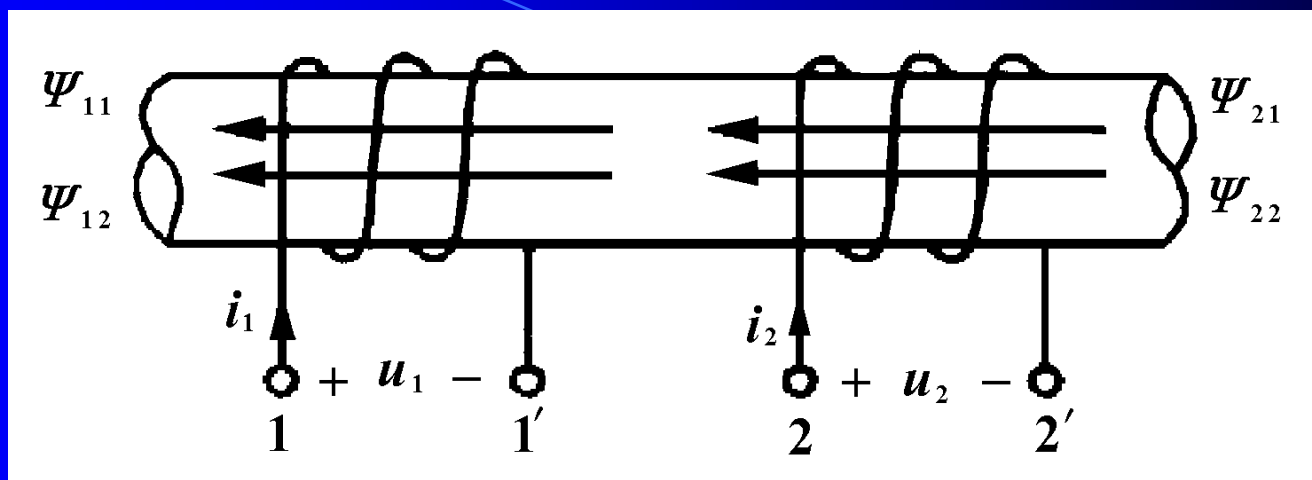
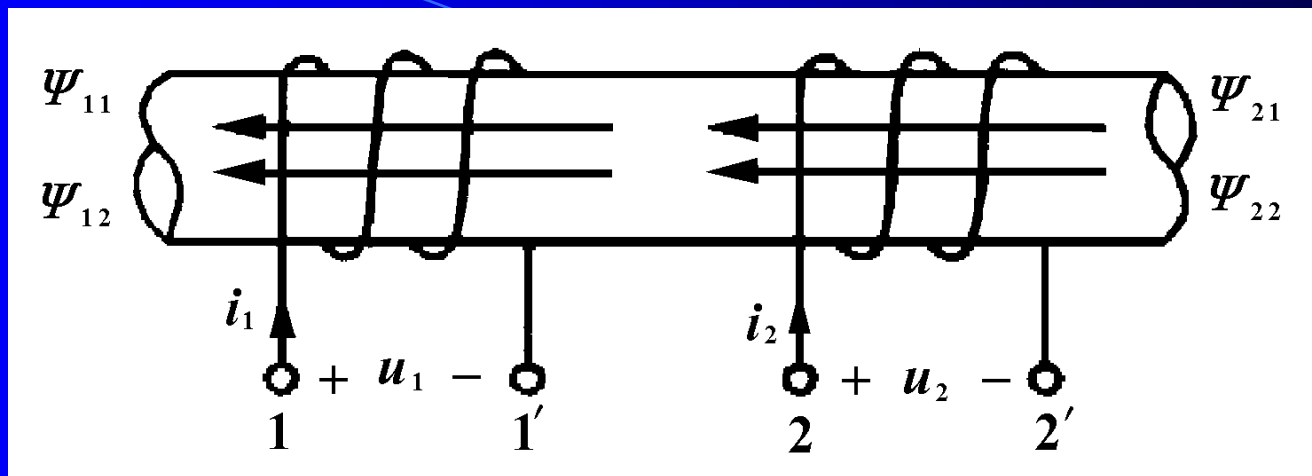


图13-1(b)

与上面的情况相似，若第二个线圈中电流 $i_2$ 在第二个线圈形成的磁链 $\psi_{22}=L_2i_2$ ，其中 $L_2$ 称为线圈2的自感。电流 $i_2$ 在第一个线圈全部匝数 $N_1$ 中形成的磁链 $\psi_{12}=M_{12}i_2$ ，比例系数 $M_{12}$ 称为线圈2与线圈1的互感。



若两个线圈中同时有电流 $i_1$ 和 $i_2$ 存在，则每个线圈中总磁链为本身的磁链和另一个线圈中电流形成的磁链的代数和。

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \psi_{11} + \psi_{12} = L_1 i_1 + M_{12} i_2 \\ \psi_2 &= \psi_{21} + \psi_{22} = M_{21} i_1 + L_2 i_2 \end{aligned} \right\} \quad (13-1)$$

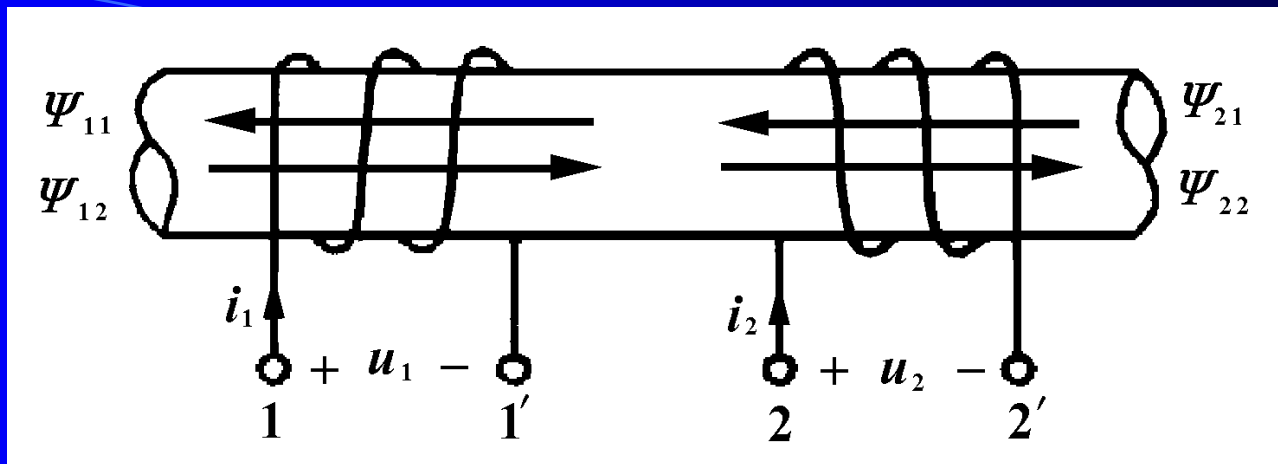


图13-1(b)

对于图13-1(b)所示的情况有：

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \psi_{11} - \psi_{12} = L_1 i_1 - M_{12} i_2 \\ \psi_2 &= -\psi_{21} + \psi_{22} = -M_{21} i_1 + L_2 i_2 \end{aligned} \right\} \quad (13-2)$$

式中  $\psi_{11}$ 、 $\psi_{22}$  表示电流在本身线圈形成的磁链，称为自感磁链。 $\psi_{12}$ 、 $\psi_{21}$  表示另一个线圈中电流产生的磁场在本线圈中形成的磁链，称为互感磁链。也就是说每个线圈中的总磁链为自感磁链与互感磁链的代数和。



当电流 $i_1$ 和 $i_2$ 随时间变化时，线圈中磁场及其磁链也随时间变化，将在线圈中产生感应电动势。

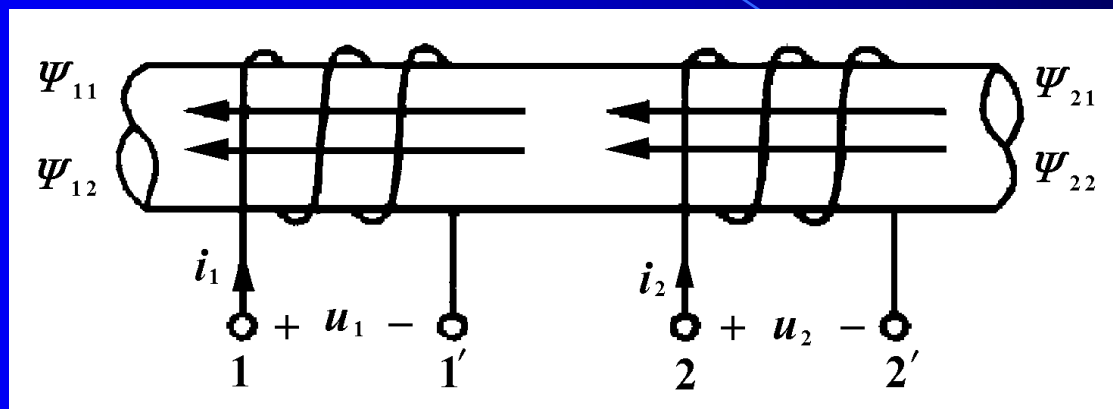


图13-1(a)

对于图(a)的情况，根据电磁感应定律可以得到：

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (13-3)$$

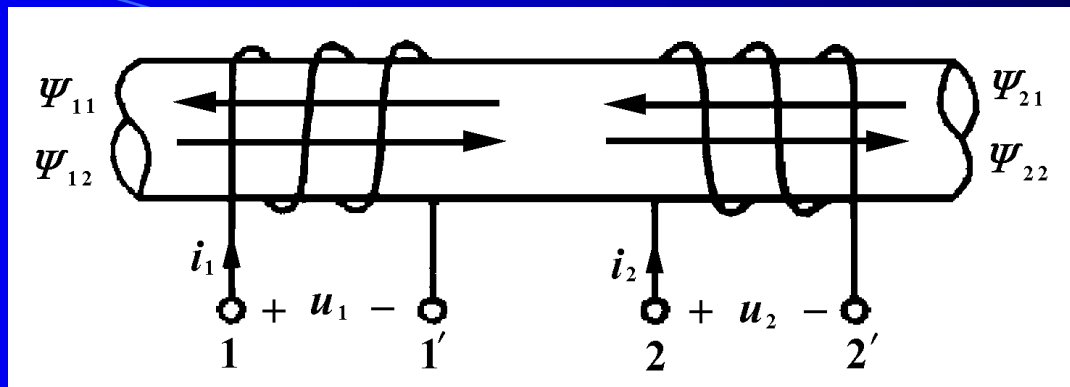


图13-1(b)

与此相似，对于图(b)情况可以得到：

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{d\psi_{11}}{dt} - \frac{d\psi_{12}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{d\psi_{21}}{dt} + \frac{d\psi_{22}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (13-4)$$

每个线圈的电压均由自感磁链产生的自感电压和互感磁链产生的互感电压两部分组成。

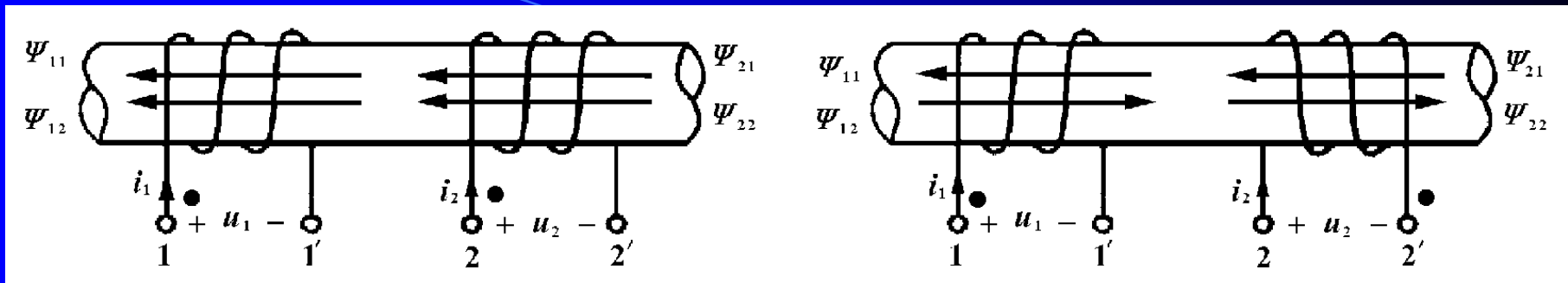


图13-1

为了在看不见线圈相对位置和绕法的情况下，确定互感电压取正号或负号，人们在耦合线圈的两个端钮上标注一对特殊的符号，称为同名端。这一对符号是这样确定的，当电流 $i_1$ 和 $i_2$ 在耦合线圈中产生的磁场方向相同而相互增强时，电流 $i_1$ 和 $i_2$ 所进入(或流出)的两个端钮，称为同名端，常用一对符号“ $\cdot$ ”或“ $*$ ”表示。例如，图(a)的1和2(或1'和2')是同名端；图(b)的1和2'或(1'和2)是同名端。



根据以上叙述，定义一种称为耦合电感的双口电路元件，其元件符号和电压电流关系分别如下所示：

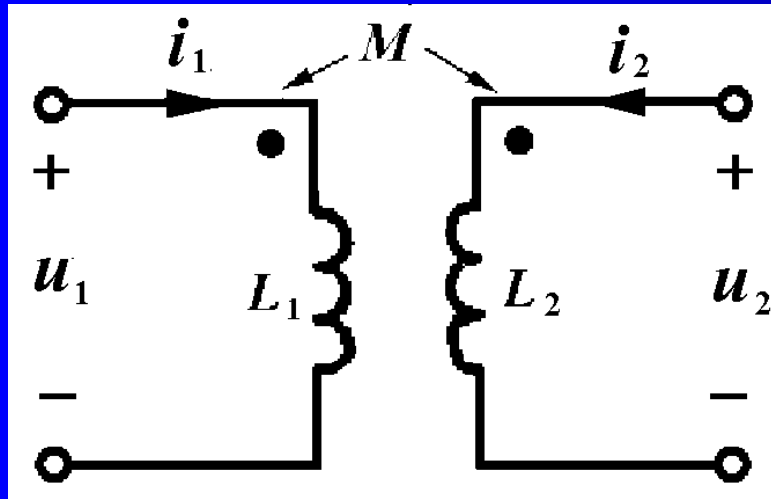


图 13-2(a)

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\} (13-5a)$$

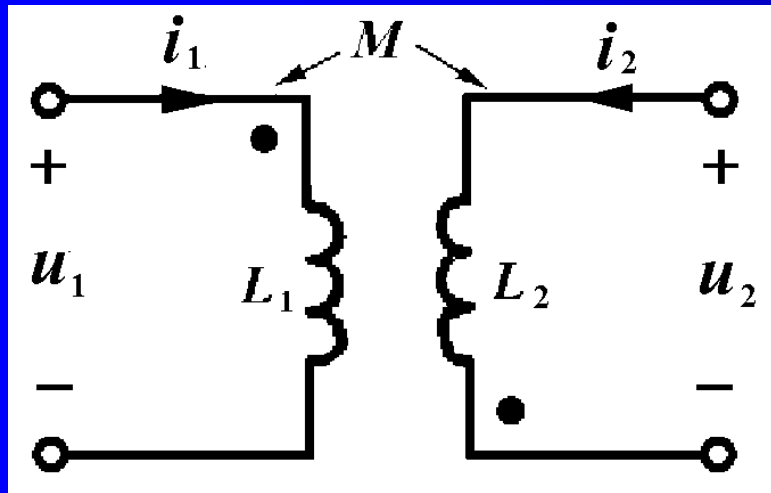


图 13-2(b)

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\} (13-5b)$$

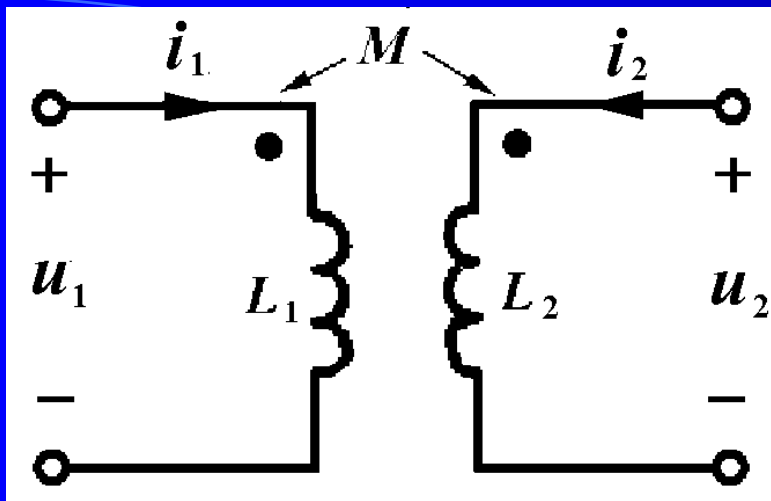


图 13-2(a)

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\} (13-5a)$$

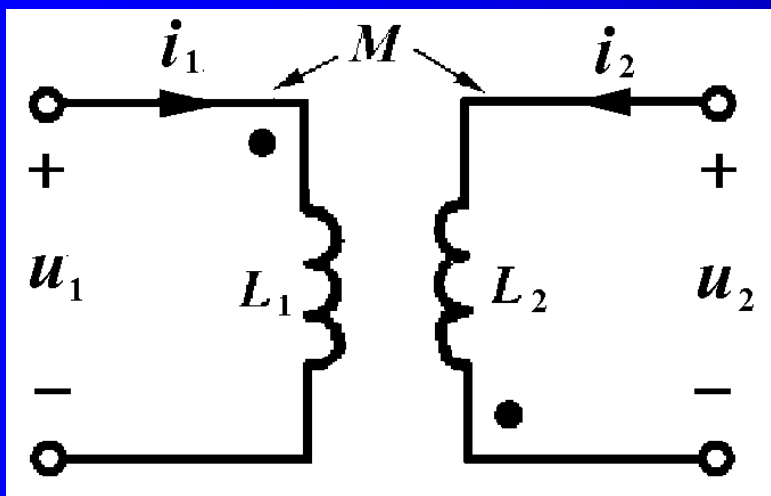


图 13-2(b)

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\} (13-5b)$$

耦合电感是一种线性时不变双口元件，它由 $L_1$ 、 $L_2$ 和 $M$ 三个参数来表征。它是一种动态电路元件。

耦合线圈的同名端是这样确定的，当电流 $i_1$ 和 $i_2$ 在耦合线圈中产生的磁场方向相同而相互增强时，电流 $i_1$ 和 $i_2$ 所进入(或流出)的两个端钮，称为同名端。

耦合线圈的同名端可用图示实验电路来确定。

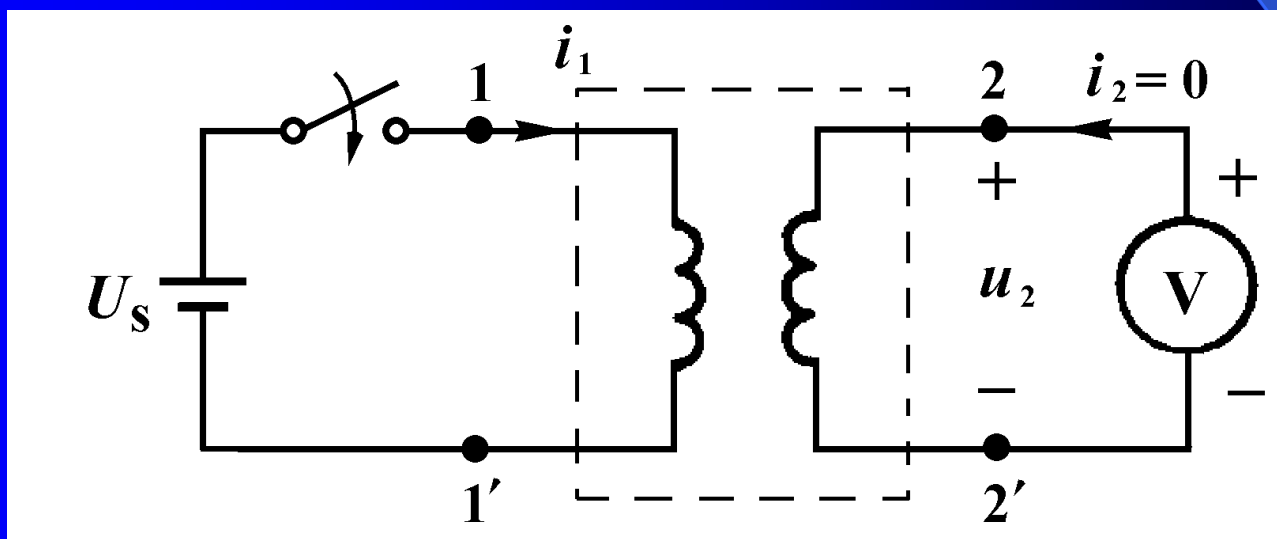


图13-4 测定同名端的电路



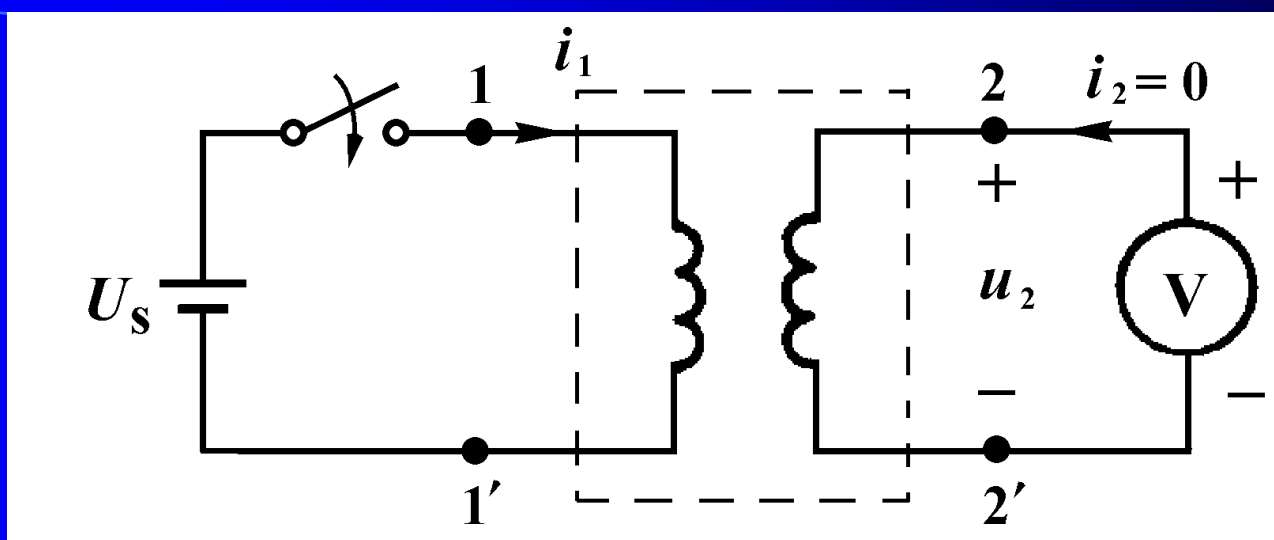


图13-4 测定同名端的电路

图中  $U_s$  表示直流电源，例如1.5V干电池。V表示高内阻直流电压表，当开关闭合时，电流由零急剧增加到某一量值，电流对时间的变化率大于零，即  $\frac{di_1}{dt} > 0$ 。

如果发现电压表指针正向偏转，说明

$$u_2 = u_{2M} = M \frac{di_1}{dt} > 0, \text{ 则可断定 1和2是同名端.}$$

例13-1 试求图13-5所示耦合电感的电压电流关系。

解：耦合电感的电压由自感电压和互感电压两部分组成。

自感电压正负号确定方法与二端电感相同。互感电压正负号的确定与同名端有关。

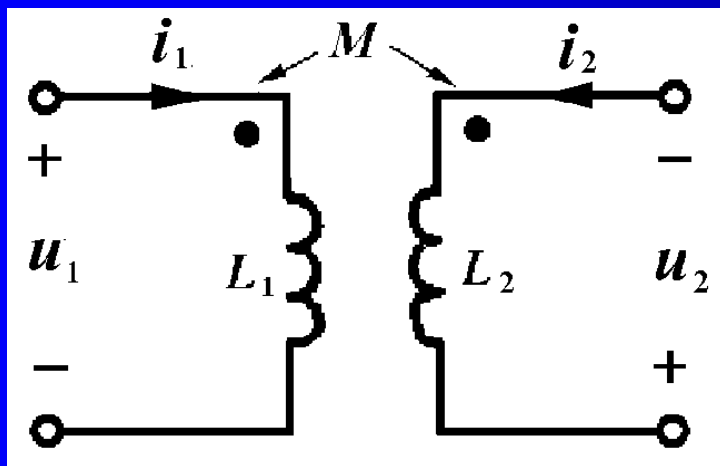
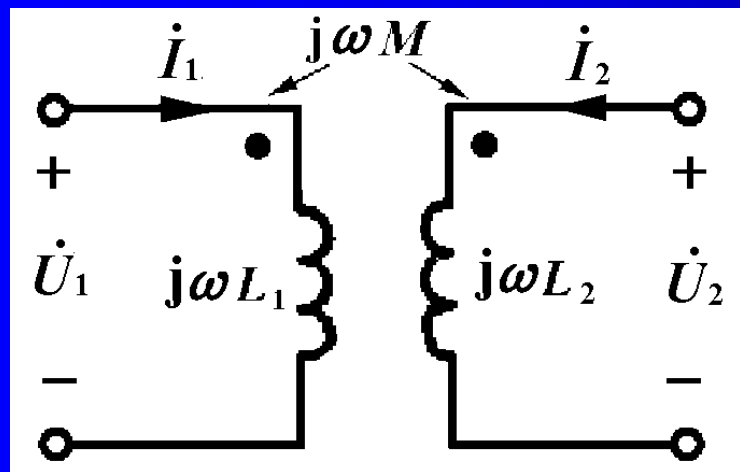


图13-5

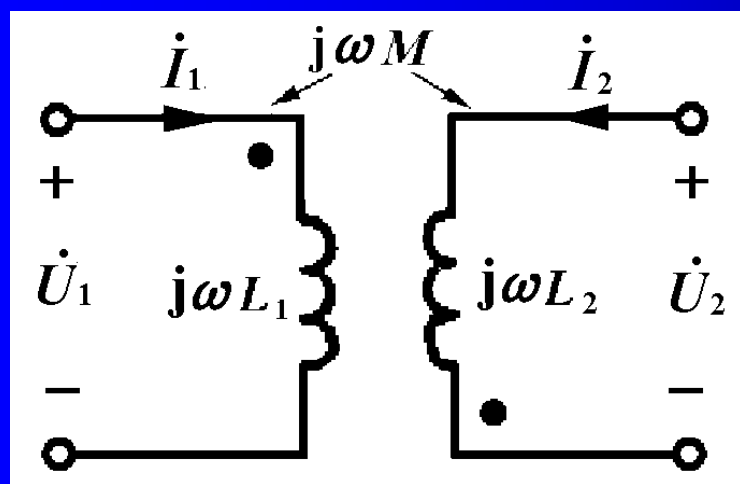
$$\begin{aligned} u_1 &= u_{1L} + u_{1M} \\ &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_{2L} + u_{2M} \\ &= -M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

工作在正弦稳态条件下的耦合电感，其相量模型如图所示，相应的电压电流关系为：



$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= -j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{aligned} \right\}$$

图13-6

## 思考与练习

13-1-1 试确定图示耦合线圈的同名端。

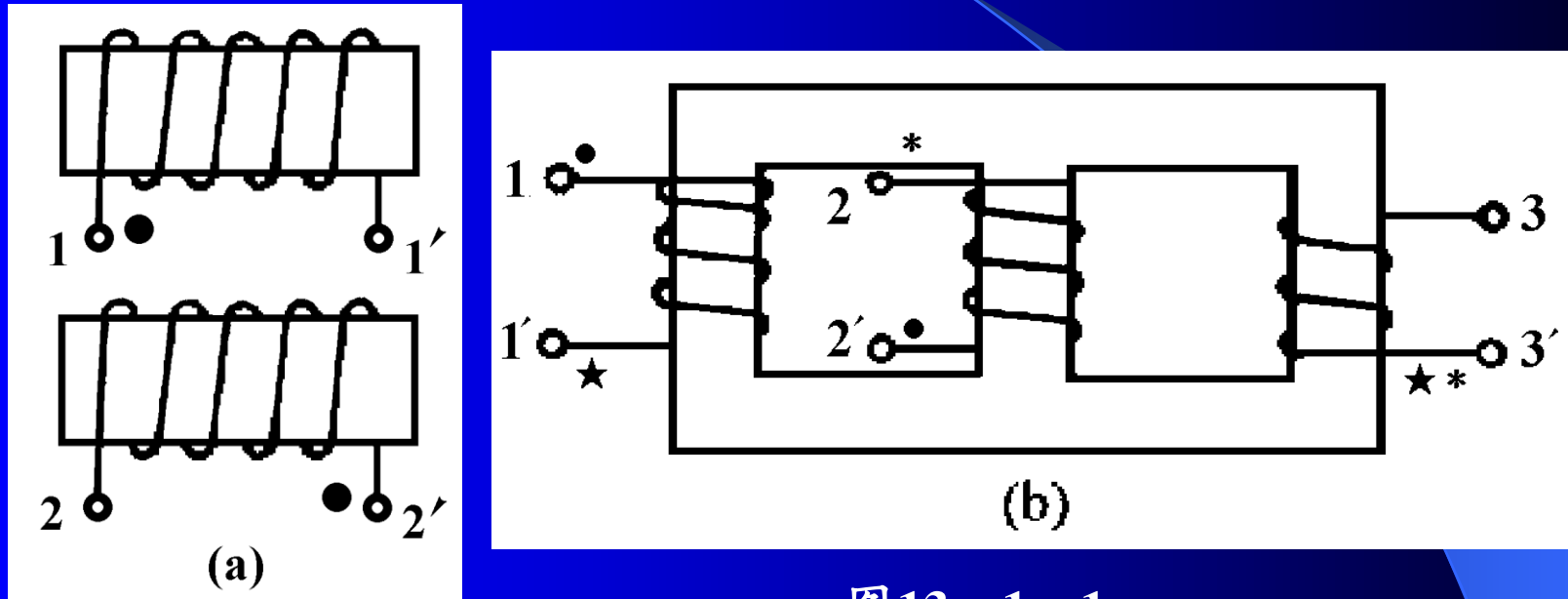


图13-1-1

13-1-2 图13-4电路中，当开关由闭合状态突然断开时，发现直流电压表指针正向偏转。试确定耦合线圈的同名端。

## § 13-2 耦合电感的串联与并联

耦合电感的串联有两种方式——顺接和反接。

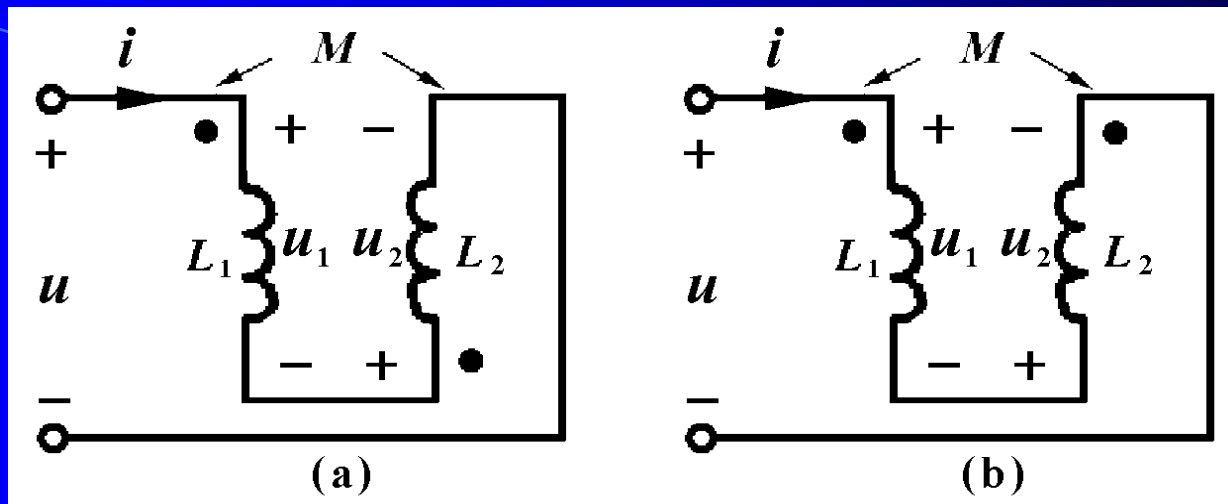
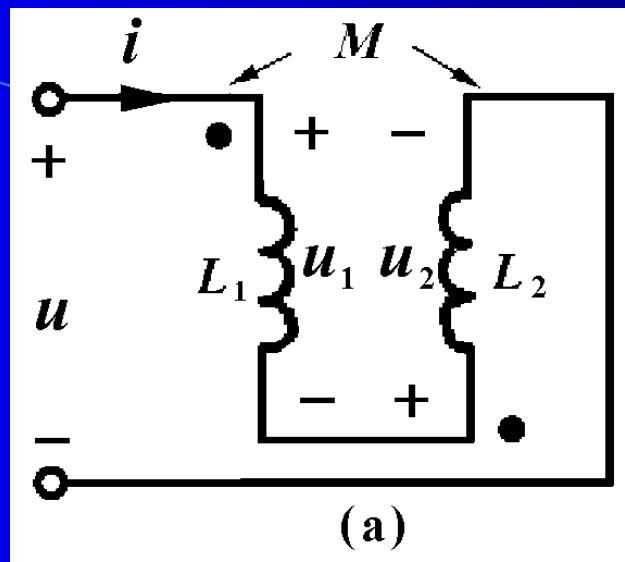


图13-7

顺接是将 $L_1$ 和 $L_2$ 的异名端相连[图(a)], 电流 $i$ 均从同名端流入, 磁场方向相同而相互增强。反接是将 $L_1$ 和 $L_2$ 的同名端相连[图(b)], 电流 $i$ 从 $L_1$ 的有标记端流入, 则从 $L_2$ 的有标记端流出, 磁场方向相反而相互削弱。

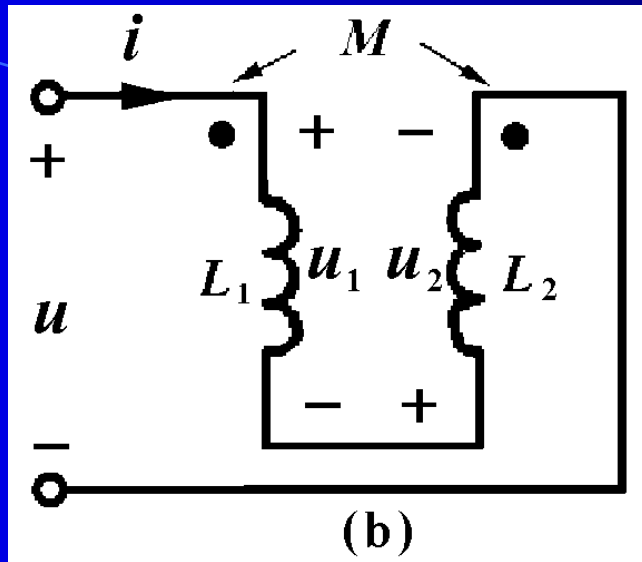




图示单口网络的电压电流关系为

$$\begin{aligned}
 u &= L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} \\
 &= (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} = L' \frac{di}{dt}
 \end{aligned}$$

此式表明耦合电感顺接串联的单口网络，就端口特性而言，等效为一个电感值为  $L' = L_1 + L_2 + 2M$  的二端电感。



图(b)单口网络的电压电流关系为

$$\begin{aligned}
 u &= L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} \\
 &= (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} = L'' \frac{di}{dt}
 \end{aligned}$$

此式表明耦合电感反接串联的单口网络，就端口特性而言，等效为一个电感值为  $L'' = L_1 + L_2 - 2M$  的二端电感。

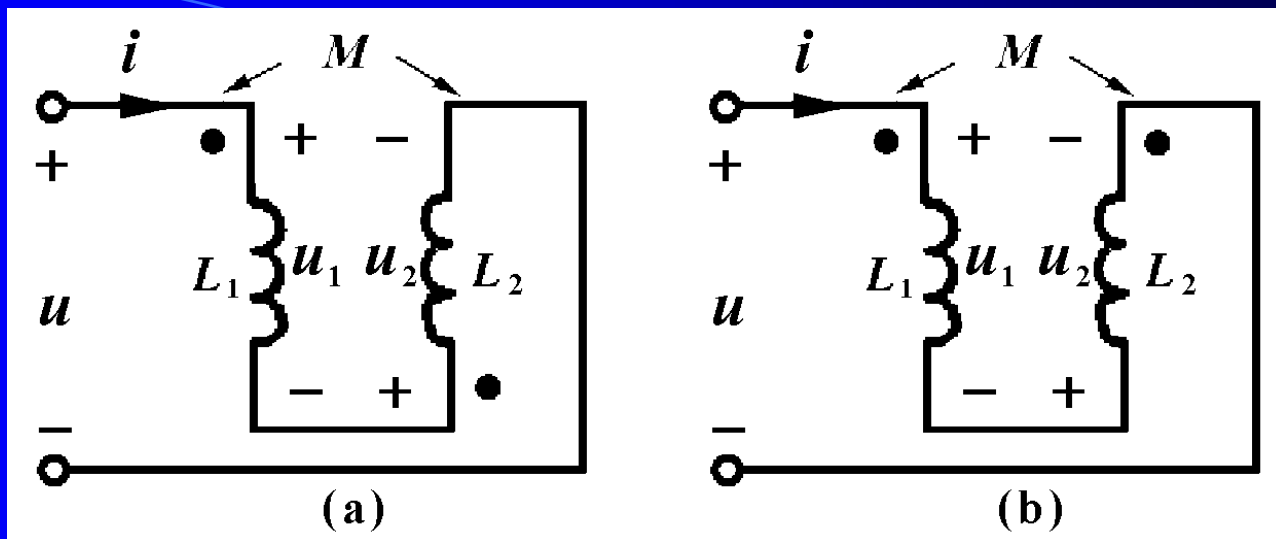


图13-7

综上所述，耦合电感串联时的等效电感为

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M \quad (13-9)$$

实际耦合线圈的互感值与顺接串联和反接串联时的电感 $L'$ 和 $L''$ 之间，存在以下关系。

$$M = \frac{L' - L''}{4} \quad (13-10)$$

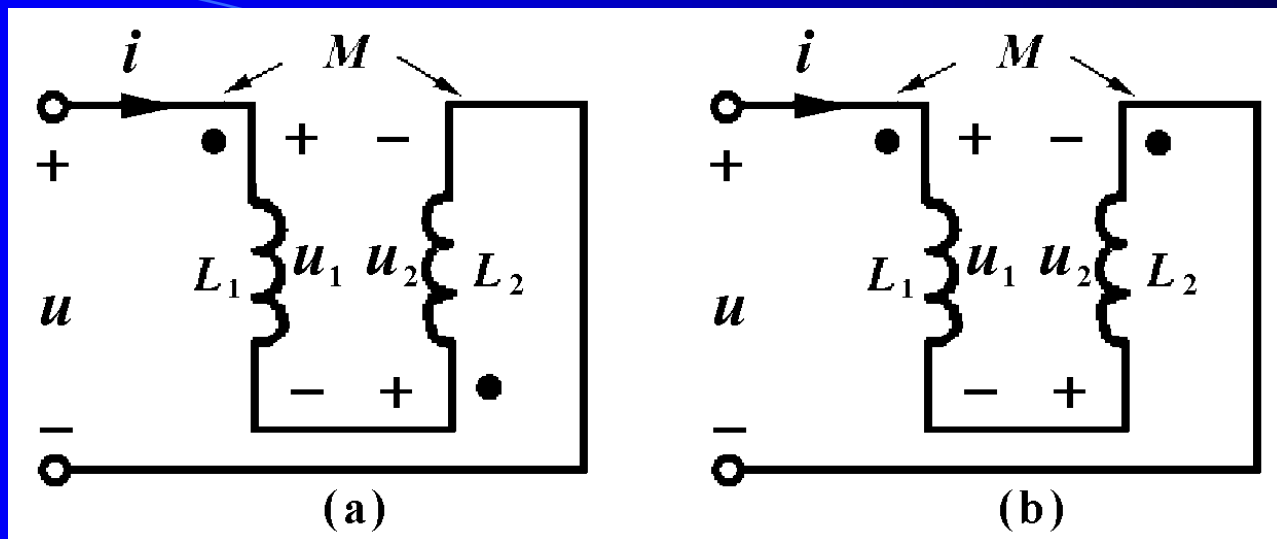


图13-7

$$M = \frac{L' - L''}{4} \quad (13-10)$$

如果能用仪器测量实际耦合线圈顺接串联和反接串联时的电感 $L'$ 和 $L''$ ，则可用式(13-10)算出其互感值，这是测量互感量值的一种方法。还可根据电感值较大(或较小)时线圈的连接情况来判断其同名端。

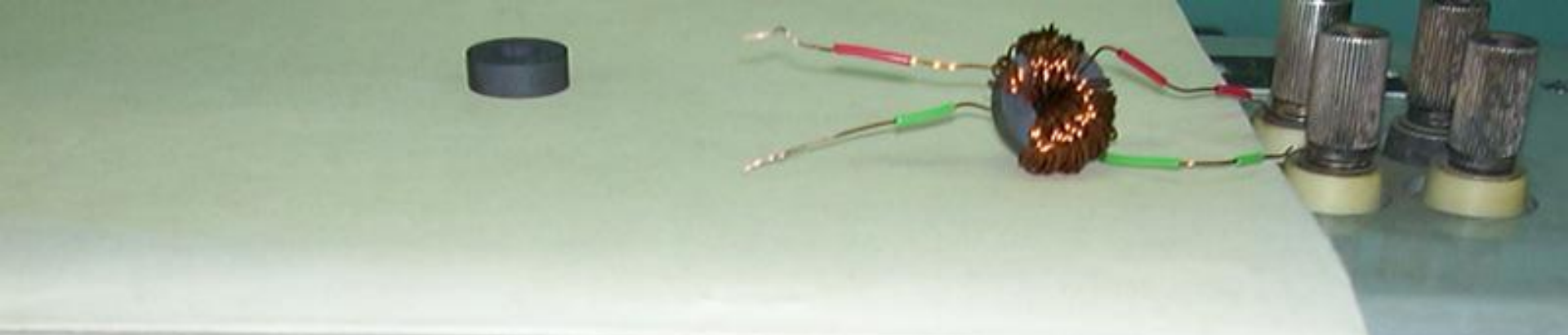
耦合线圈

参数的测量



实验室常用高频Q表来测量电感线圈和耦合电感的参数。





数Q为86。







测量30匝的次级线圈电感为0.17mH，品质因数Q为100。



测量耦合电感线圈顺接串联时的等效电感为1.25mH，品质因数 $Q = 150$ 。





测量耦合电感线圈反接串联时的等效电感为 $0.21\text{mH}$ ，品质因数 $Q = 50$ 。





根据以上测量的耦合电感线圈顺接串联等效电感  $L' = 1.25\text{mH}$  和耦合电感线圈反接串联时的等效电感  $L'' = 0.21\text{mH}$ 。可以计算出耦合电感的互感为

$$M = \frac{L' - L''}{4} = \frac{1.25 - 0.21}{4} = 0.26\text{mH}$$

研究耦合电感的并联。图(a)表示同名端并联的情况。

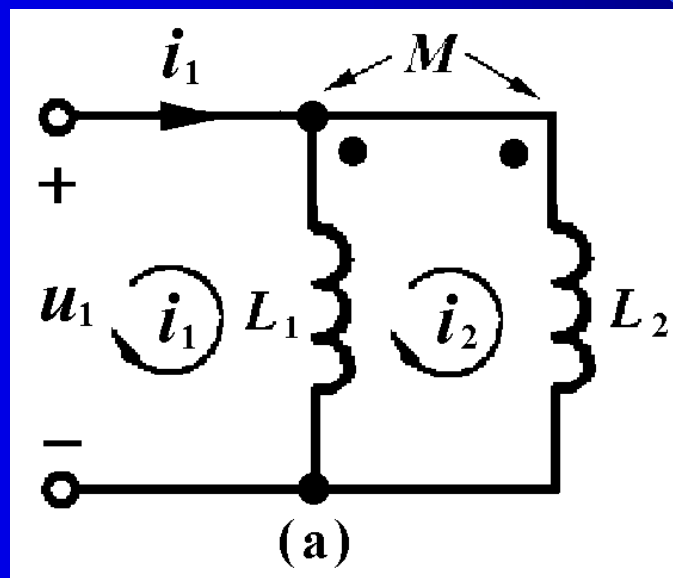
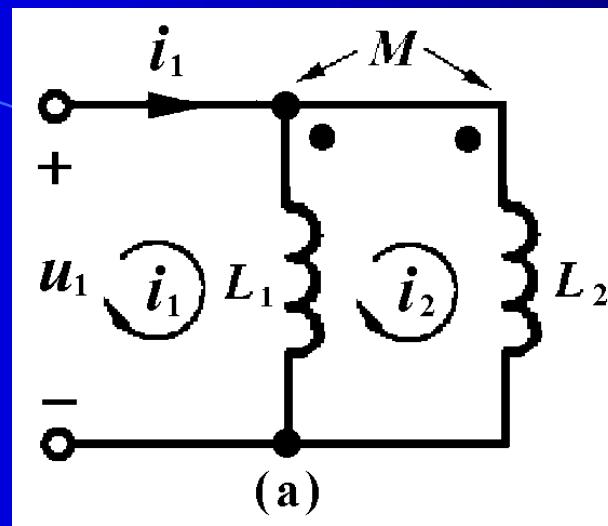


图13-8



网孔方程为

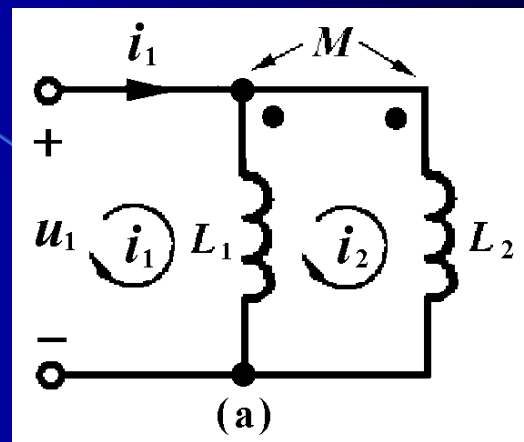
$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} - L_1 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = u_1 \\ -L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di_2}{dt} = 0 \end{cases}$$

可以求得

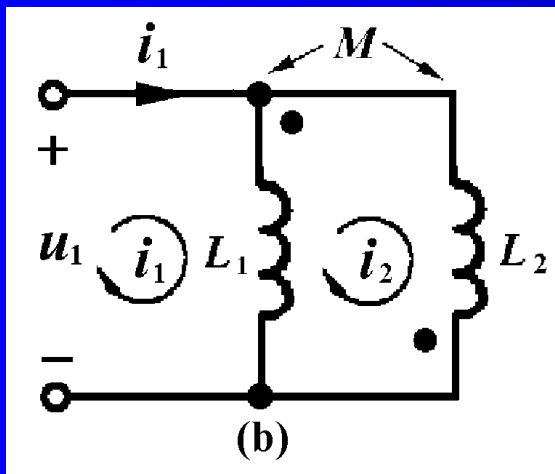
$$u_1 = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \cdot \frac{di_1}{dt} = L' \frac{di_1}{dt}$$

此式表明耦合电感同名端并联等效于一个电感，其电感值为

$$L' = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$



耦合电感异名端并联[图(b)]的等效电感为



$$L'' = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

图13-8

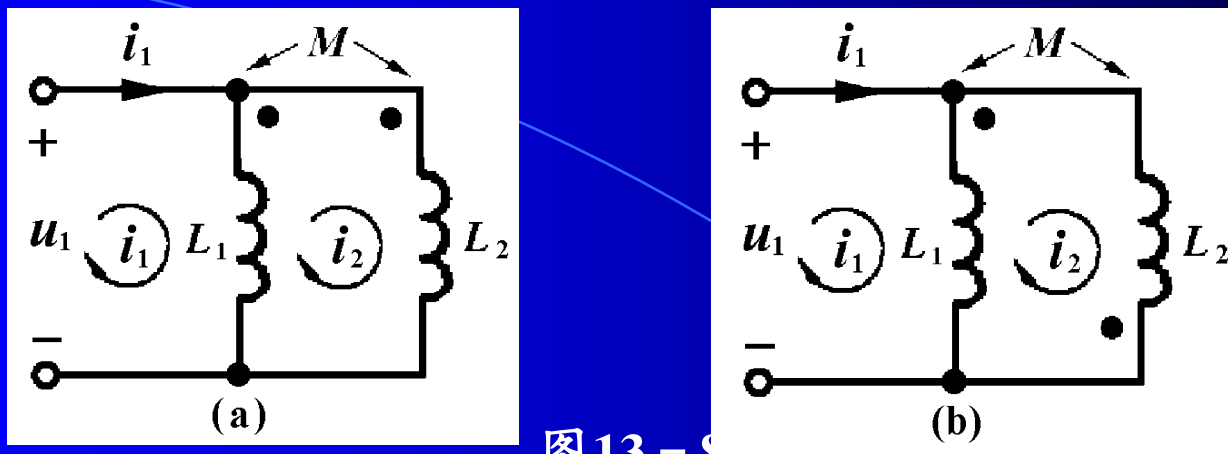


图13-8

综合所述，得到耦合电感并联时的等效电感为

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M} \quad (13-11)$$

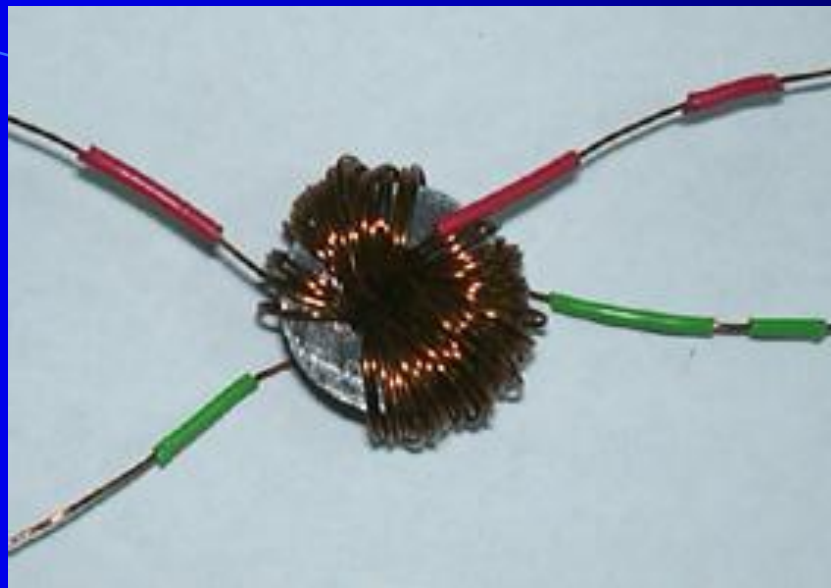
同名端并联时，磁场增强，等效电感增大，分母取负号；异名端并联时，磁场削弱，等效电感减小，分母取正号。



为了说明耦合电感的耦合程度，定义一个耦合因数

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (13-12)$$

耦合因数 $k$ 的最小值为零，此时 $M=0$ ，表示无互感的情况。 $k$ 的最大值为1，此时  $M = \sqrt{L_1 L_2}$  这反映一个线圈电流产生的磁感应线与另一个线圈的每一匝都完全交链的情况。 $k=1$ 时称为全耦合， $k$ 接近于1称为紧耦合， $k$ 很小时称为松耦合。



在前面的实验中已经测量出上图所示耦合电感初级线圈自电感 $L_1=0.66\text{mH}$ 和耦合电感线圈次级的等效自电感 $L_2=0.17\text{mH}$ 。由此可以计算出该耦合线圈的耦合系数为

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{0.26}{\sqrt{0.66 \times 0.17}} = 0.776$$

该耦合线圈接近紧耦合，其原因是磁环的导磁系数很高。

例13-2 图13-9电路原已稳定。已知 $R=20\Omega$ ,  $L_1=L_2=4\text{H}$ ,  
 $k=0.25$ ,  $U_S=8\text{V}$ 。  $t=0$ 时开关闭合, 求 $t>0$ 时的 $i(t)$ 和  
 $u(t)$ 。

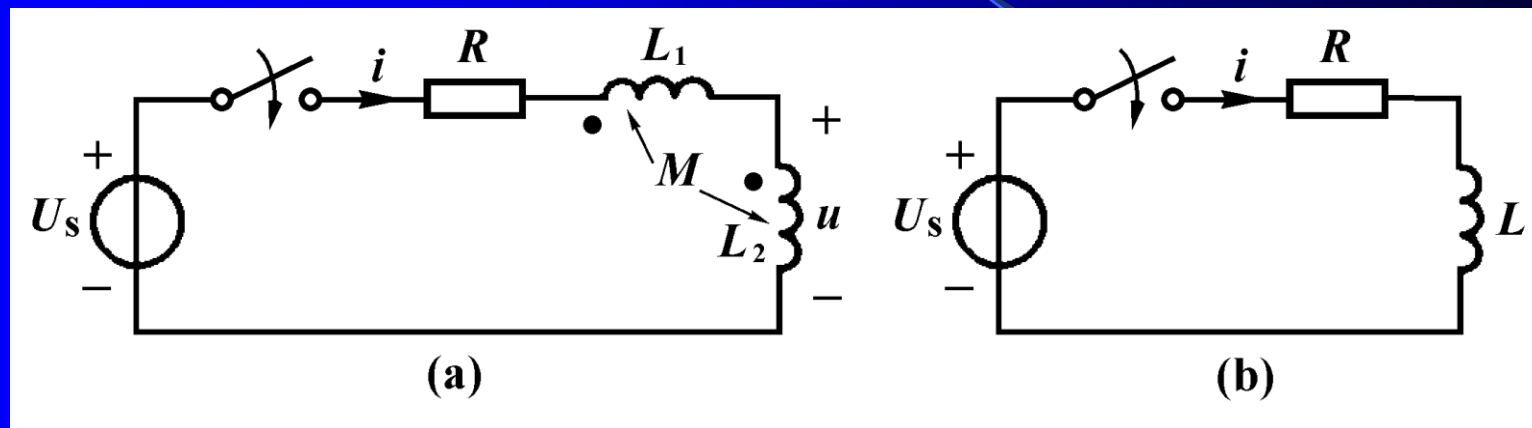


图13-9

解: 先求出互感

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0.25 \times 4\text{H} = 1\text{H}$$

耦合电感串联的等效电感

$$L = L_1 + L_2 + 2M = (4 + 4 + 2)\text{H} = 10\text{H}$$

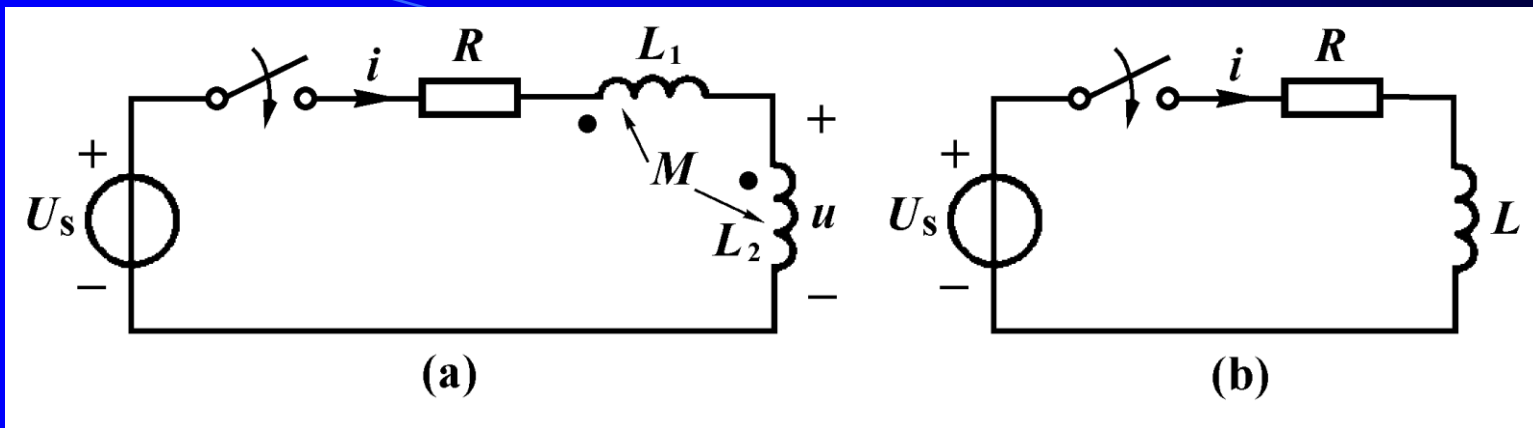


图13-9

$$L = L_1 + L_2 + 2M = (4 + 4 + 2)\text{H} = 10\text{H}$$

得到图(b)的等效电路。用三要素法求得电流和电压为

$$i(t) = \frac{U_s}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = 0.4(1 - e^{-2t})\text{A} \quad (t \geq 0)$$

$$u(t) = L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = (4 + 1) \times 0.4 \times 2e^{-2t}\text{V} = 4e^{-2t}\text{V} \quad (t > 0)$$

## 思考与练习

13-2-1 已知耦合电感的 $L_1=6\text{H}$ ,  $L_2=4\text{H}$ ,  $M=3\text{H}$ 。试求耦合电感串联和并联的等效电感以及耦合因数。

13-2-2 图示变压器的初级由两个额定电压为110 V的绕组构成。若要接入220V电源工作，问这两个绕组应如何连接？若连接错误，会发生什么情况？

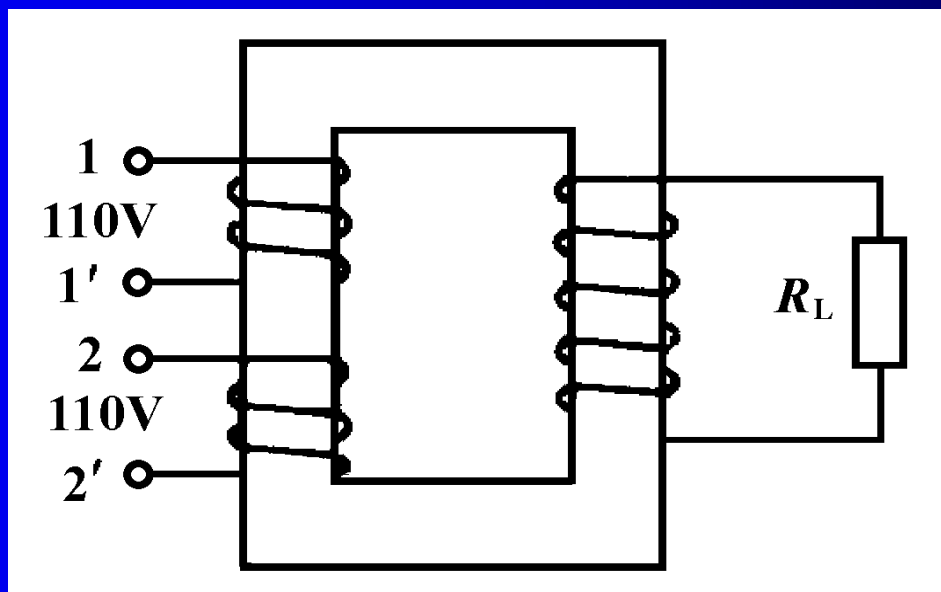


图13-2-2

## § 13-3 耦合电感的去耦等效电路

图13-10(a)表示有一个公共端的耦合电感，就端口特性来说，可用三个电感连接成星形网络[图(b)]来等效。

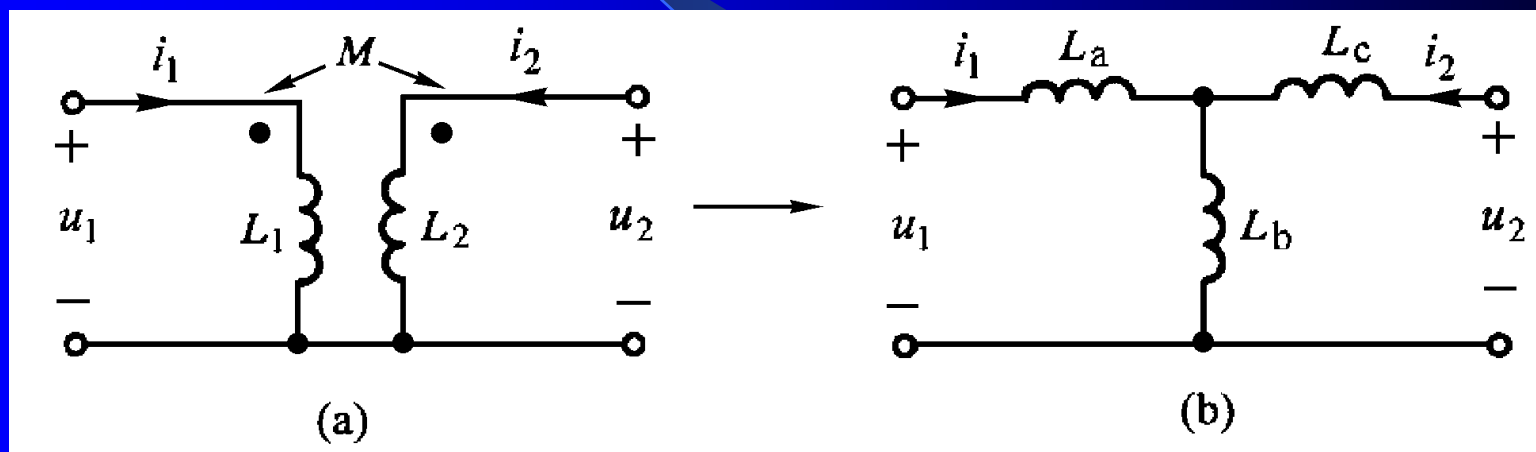


图13-10

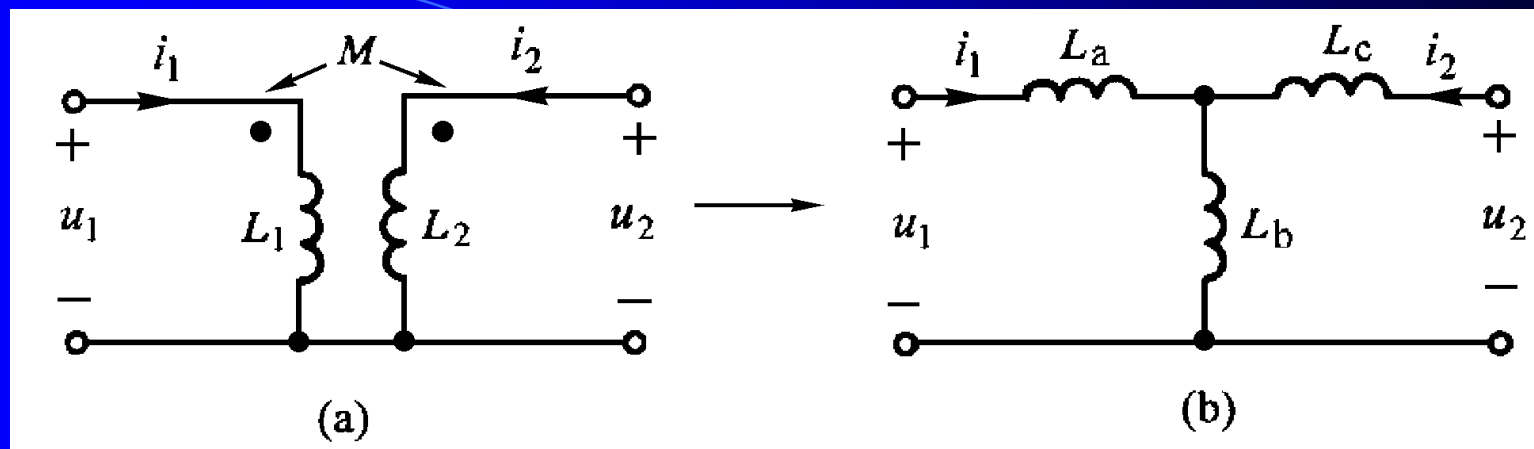


图13-10

列出图(a)和(b)电路的电压、电流关系方程:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= (L_a + L_b) \frac{di_1}{dt} + L_b \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= L_b \frac{di_1}{dt} + (L_b + L_c) \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\}$$

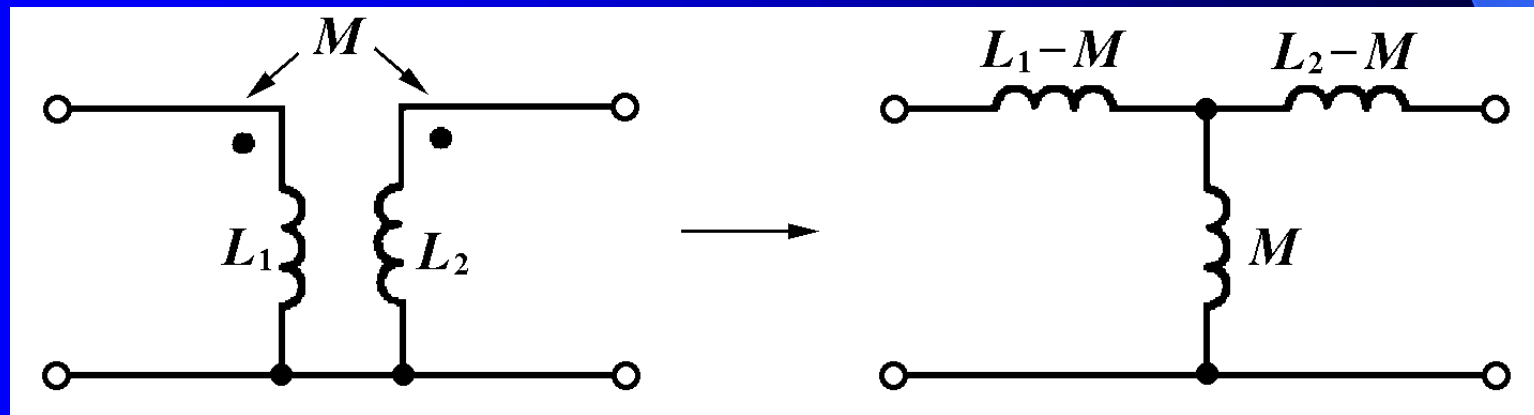
$$\left. \begin{aligned} u_1 &= (L_a + L_b) \frac{di_1}{dt} + L_b \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= L_b \frac{di_1}{dt} + (L_b + L_c) \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\}$$

令以上两式各系数分别相等，得到：

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= L_a + L_b \\ L_2 &= L_b + L_c \\ M &= L_b \end{aligned} \right\}$$

由此解得：

$$\left. \begin{aligned} L_a &= L_1 - M \\ L_b &= M \\ L_c &= L_2 - M \end{aligned} \right\}$$



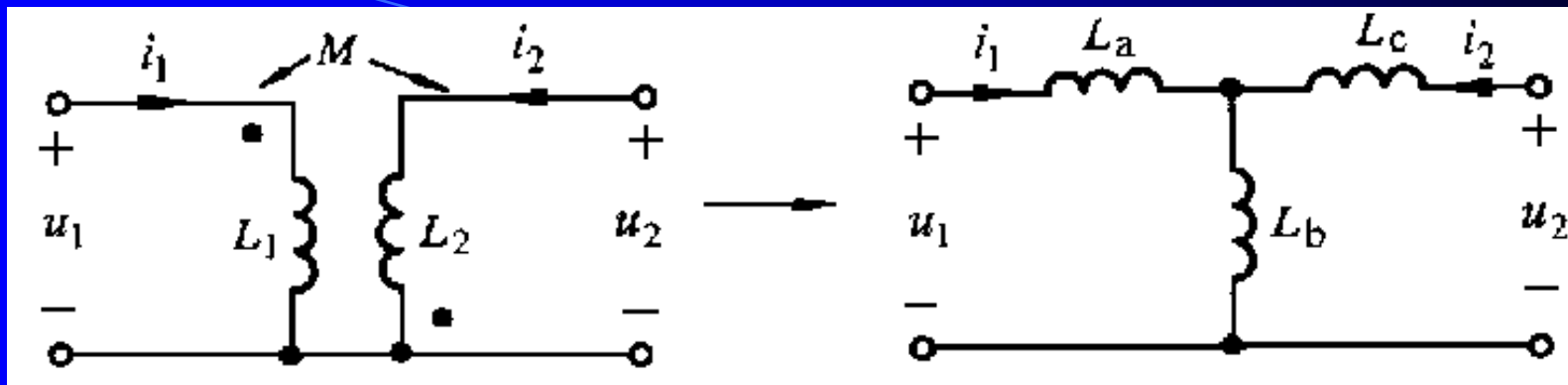


图 13 - 11

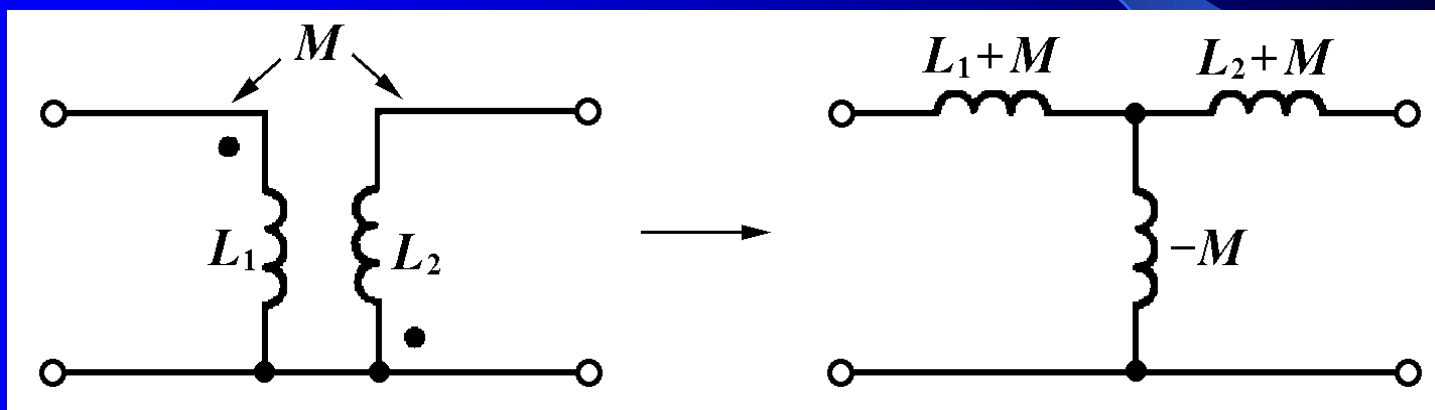


图 13 - 11(d)

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= L_a + L_b \\ L_2 &= L_b + L_c \\ M &= -L_b \end{aligned} \right\}$$

由此解得:

$$\left. \begin{aligned} L_a &= L_1 + M \\ L_b &= -M \\ L_c &= L_2 + M \end{aligned} \right\}$$

例13-3 用去耦等效电路求图(a)单口网络的等效电感。

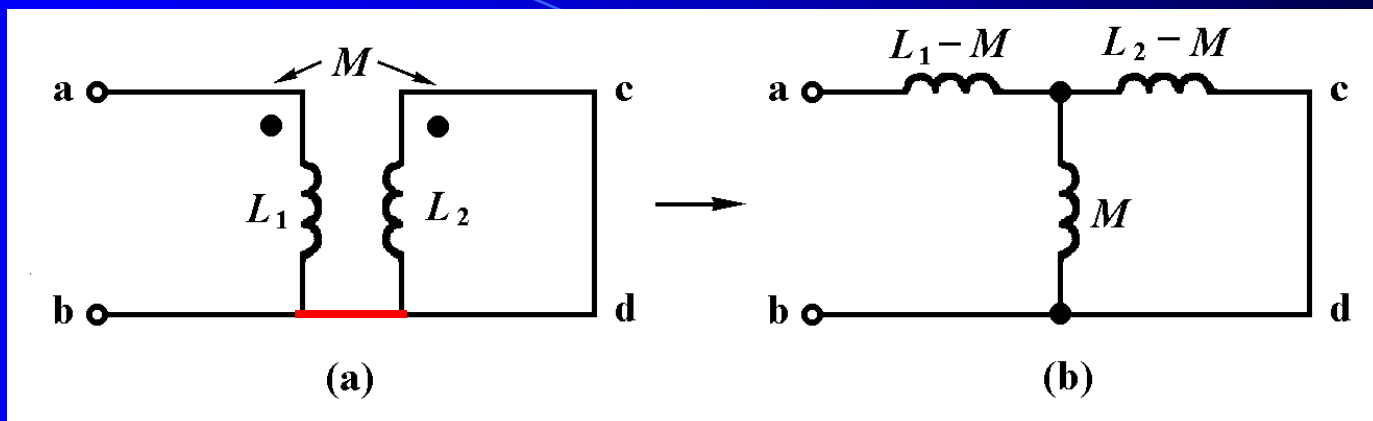


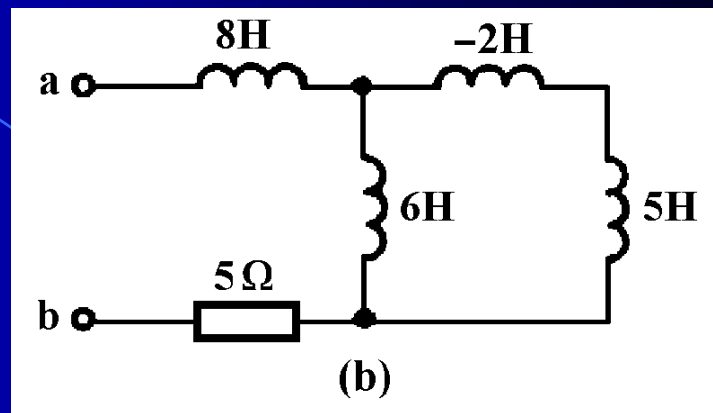
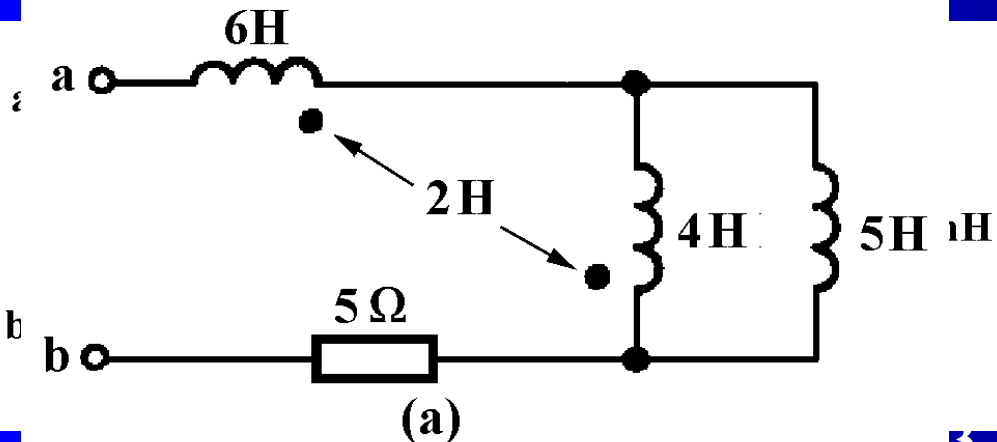
图13-12

解：若将耦合电感 b、d 两端相连，其连接线中的电流为零，不会影响单口网络的端口电压电流关系，此时可用图 (b) 电路来等效。再用电感串并联公式求得等效电感

$$L_{ab} = L_1 - M + \frac{M(L_2 - M)}{M + L_2 - M} = L_1 - \frac{M^2}{L_2} \quad (13-17)$$

也可将耦合电感 b、c 两端相连，所求得的等效电感与式(13-17)相同。

例13-4 试求图13-13(a)所示单口网络的等效电路。



解：先化简电路。将2Ω电阻合并到3Ω电阻成为5Ω，将端接50mH电感的理想变压器等效为5H电感，再将耦合电感去耦以得到图(b)所示等效电路。最后用电感串并联公式求得总电感为

$$L = 8\text{H} + \frac{6(5-2)}{6+5-2}\text{H} = 8\text{H} + 2\text{H} = 10\text{H}$$

最后得到图(a)单口网络的等效电路为5Ω电阻与10H电感的串联。

## 思考与练习

13-3-1 如果改变图13-13(a)电路中理想变压器的同名端位置,对单口等效电路有无影响?如果改变耦合电感的同名端位置,对单口网络的等效电路有无影响?为什么?

13-3-2 你能用互易双口网络的星形等效电路的公式,导出耦合电感的去耦等效电路的公式吗?

## § 13-4 空心变压器电路的分析

不含铁心(或磁芯)的耦合线圈称为空心变压器,它在电子与通信工程和测量仪器中得到广泛应用。空心变压器的电路模型如图所示,  $R_1$ 和 $R_2$ 表示初级和次级线圈的电阻。

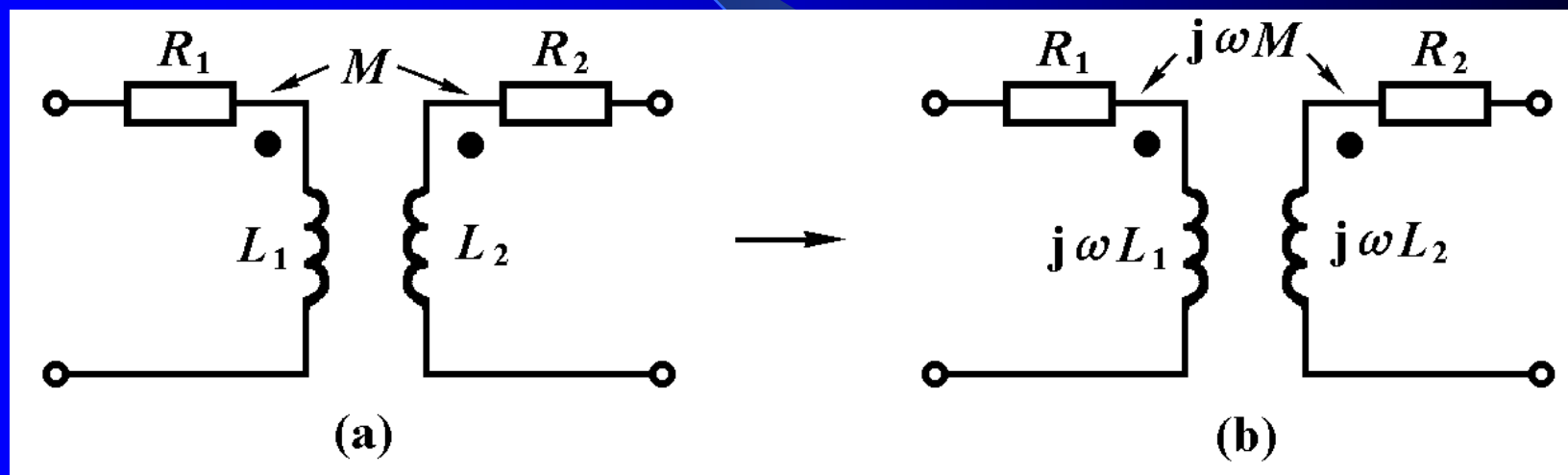


图 13-14

# 一、端接负载的空心变压器

空心变压器次级接负载的相量模型如图所示。

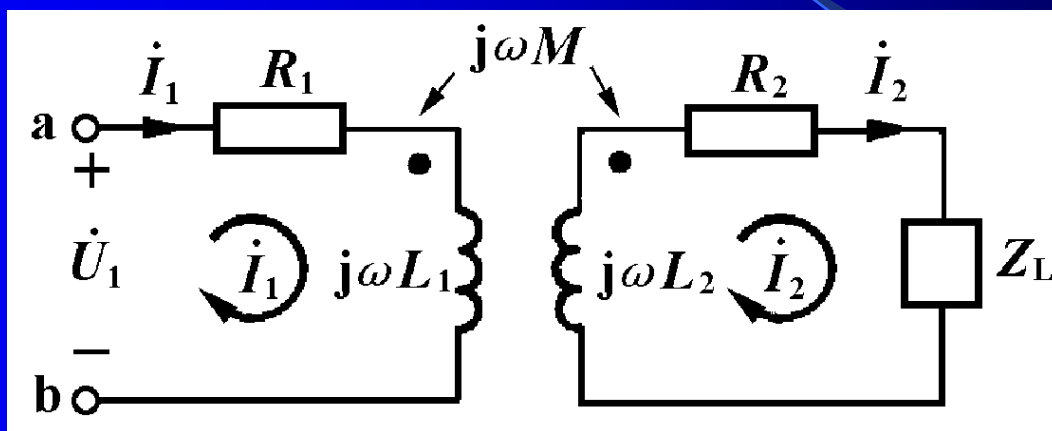


图13-15(a)

该电路的网孔方程为：

$$\begin{cases} (R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2 = \dot{U}_1 & (13-18) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -j\omega M\dot{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + Z_L)\dot{I}_2 = 0 & (13-19) \end{cases}$$



求得

$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{R_2 + j\omega L_2 + Z_L} = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{Z_{22}} \quad (13-20)$$

$$Z_i = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} = Z_{11} + Z_{\text{ref}} \quad (13-21)$$

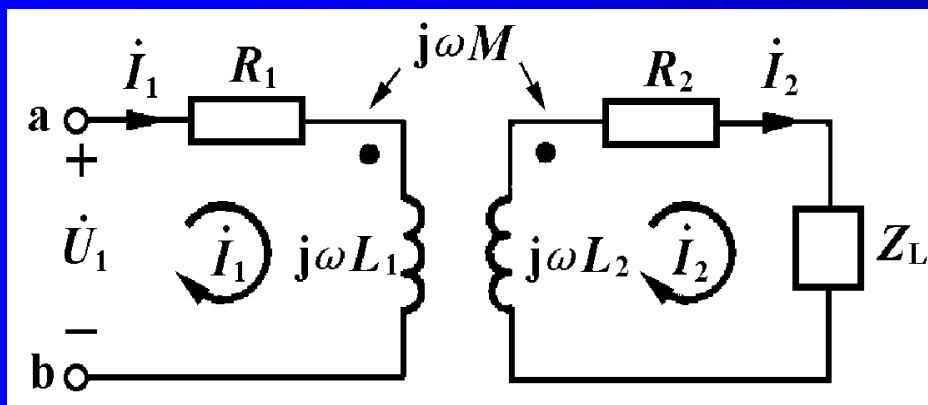


图 13-15(a)

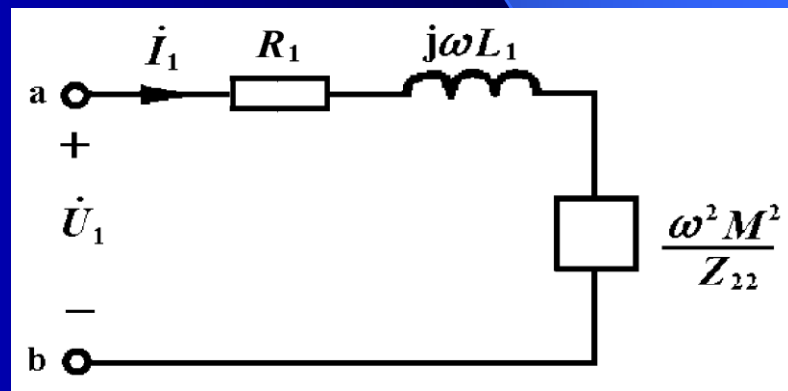
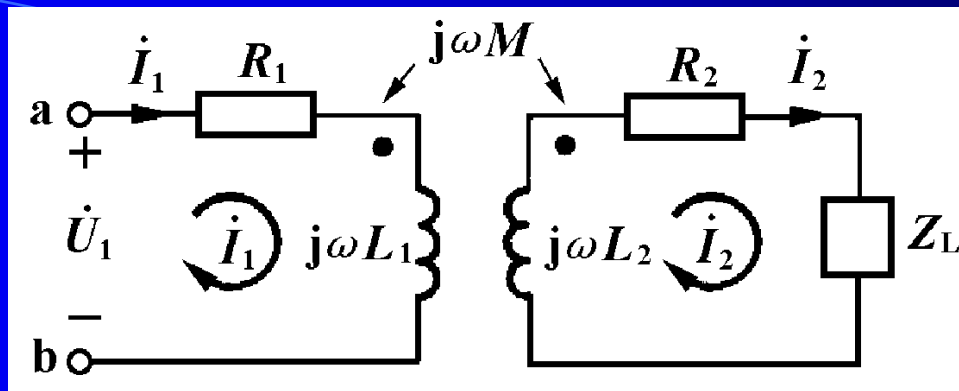


图 13-15(b)

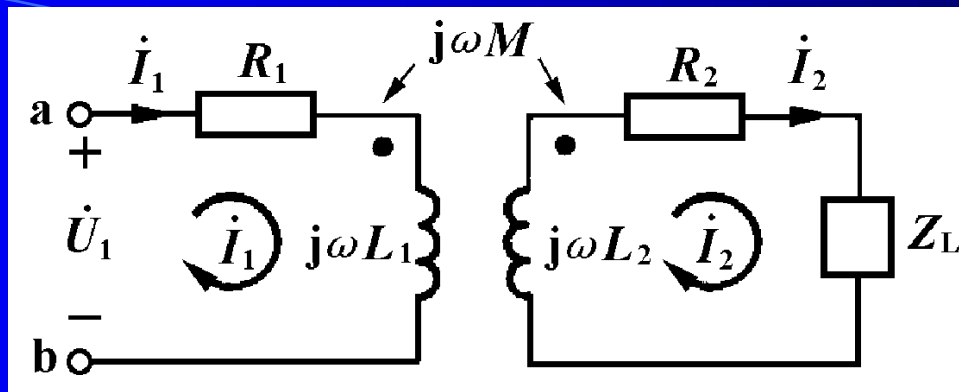


式中  $Z_{11} = R_1 + j\omega L_1$  是初级回路阻抗， $Z_{\text{ref}}$  是次级回路在初级回路的反映阻抗

$$Z_{\text{ref}} = \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z_L} = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \quad (13-22)$$

若负载开路， $Z_{22} \rightarrow \infty$ ， $Z_{\text{ref}} = 0$ ，则  $Z_i = Z_{11} = R_1 + j\omega L_1$ ，不受次级回路的影响；

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_i} = \frac{\dot{U}_1}{Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}}} \quad (13-23)$$



再用式(13-20)即可求得次级电流  $\dot{I}_2$

$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{R_2 + j\omega L_2 + Z_L} = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{Z_{22}} \quad (13-20)$$

若改变图13-15(a)电路中同名端位置, 则式(13-18)、(13-19)和(13-20)中 $M$ 前的符号要改变。但不会影响输入阻抗、反映阻抗和等效电路。

$$Z_i = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} = Z_{11} + Z_{\text{ref}} \quad (13-21)$$

例13-5 电路如图13-16(a)所示。已知  $u_S(t) = 10\sqrt{2} \cos 10t \text{ V}$

试求：(1)  $i_1(t), i_2(t)$ ;

(2)  $1.6\Omega$  负载电阻吸收的功率。

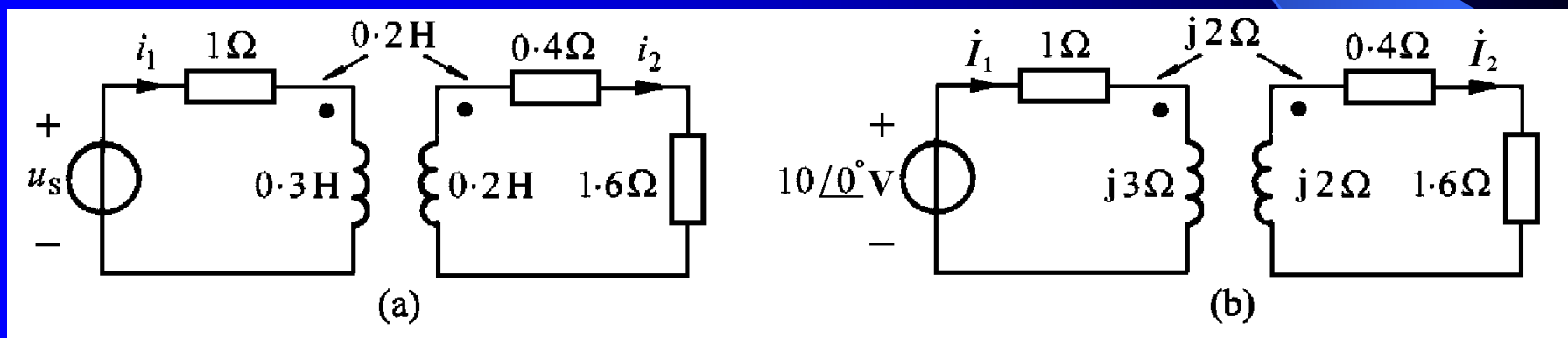
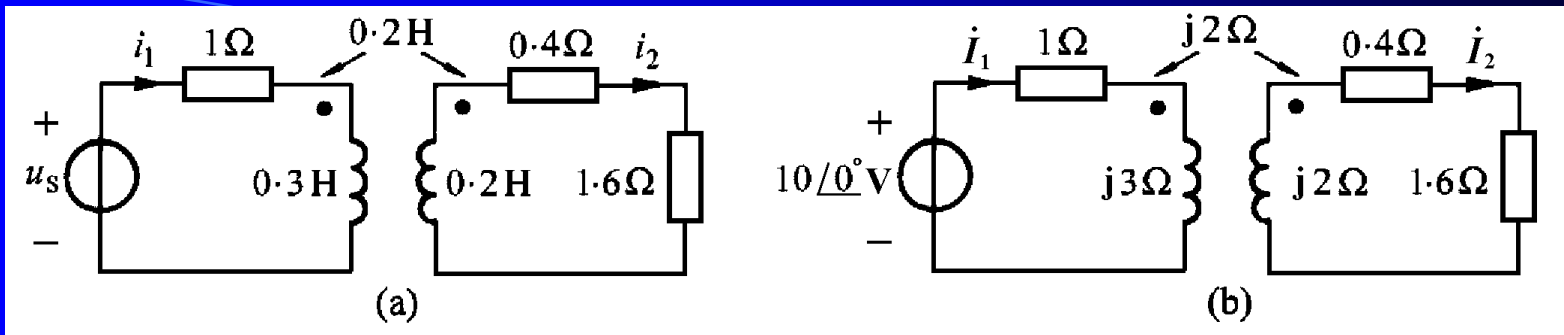


图13-16



解：画出相量模型，如图(b)所示。求出反映阻抗

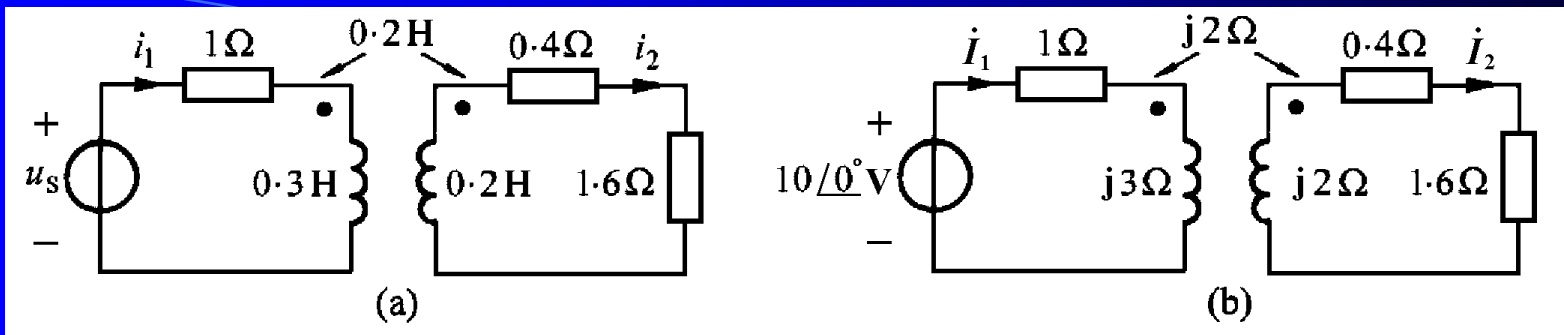
$$Z_{\text{ref}} = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} = \frac{2^2}{2 + j2} \Omega = (1 - j1) \Omega$$

求出输入阻抗

$$\begin{aligned} Z_i &= Z_{11} + Z_{\text{ref}} \\ &= (1 + j3 + 1 - j1) \Omega = (2 + j2) \Omega \end{aligned}$$

求出初级电流

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{Z_i} = \frac{10 \angle 0^\circ}{2 + j2} \text{ A} = 2.5\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A}$$



求出次级电流

$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega MI_1}{Z_{22}} = \frac{j2 \times 2.5\sqrt{2} \angle -45^\circ}{2 + j2} \text{ A} = 2.5 \text{ A}$$

最后得到:

$$i_1(t) = 5 \cos(10t - 45^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 2.5\sqrt{2} \cos 10t \text{ A}$$

1.6Ω负载电阻吸收的平均功率为

$$P = R_L I_2^2 = 1.6 \times 2.5^2 \text{ W} = 10 \text{ W}$$



## 二、端接电源的空心变压器

现在讨论除负载以外含源单口网络的戴维宁等效电路。

该单口网络的相量模型如图13-17 (a) 所示。

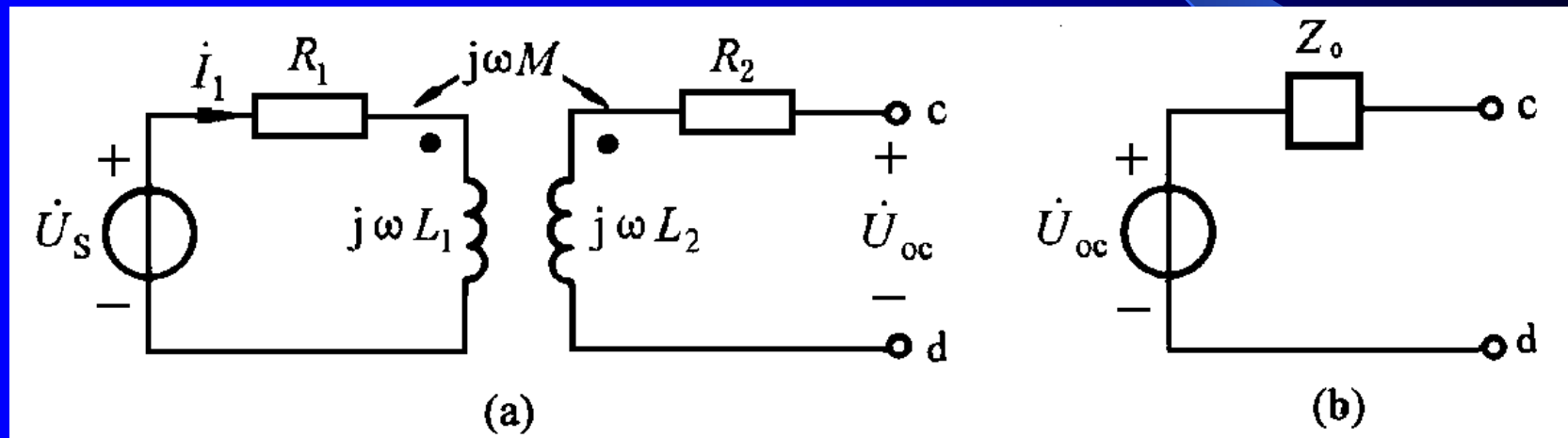


图13-17

$$\dot{U}_{oc} = j\omega M \dot{I}_1 = \frac{j\omega M \dot{U}_s}{R_1 + j\omega L_1} \quad (13-24)$$

$$Z_o = R_2 + j\omega L_2 + \frac{\omega^2 M^2}{R_1 + j\omega L_1} = R_o + jX_o \quad (13-25)$$

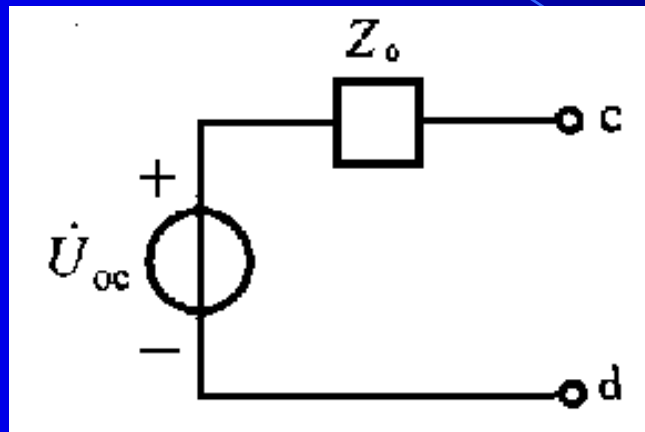


图13-17(b)

得到图示戴维宁等效电路。根据最大功率传输定理，当负载 $Z_L$ 与 $Z_o$ 共轭匹配，即

$$Z_L = Z_o^*$$

可获得最大功率为

$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_o}$$

例13-6 求图13-16电路中 $1.6\Omega$ 负载电阻经调整获得的最大功率。

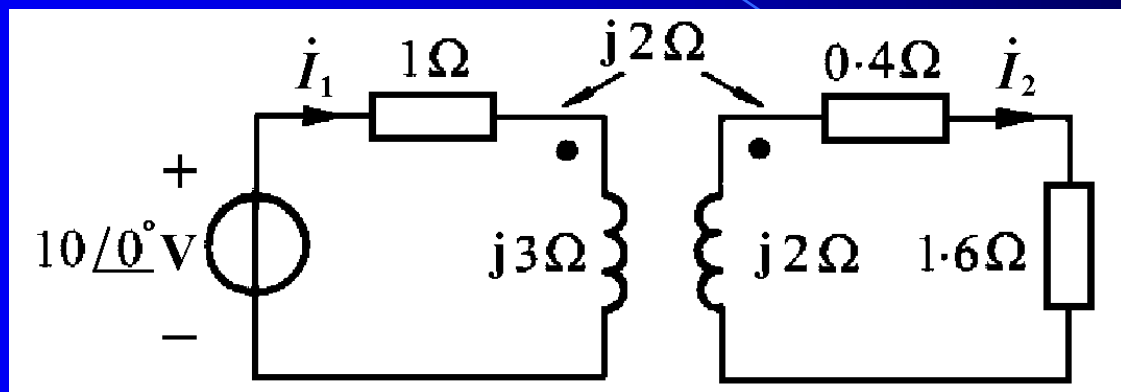
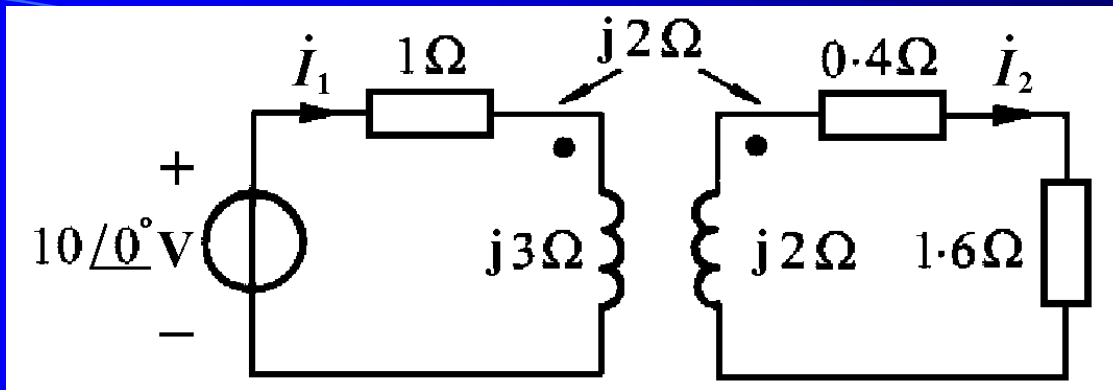


图13-16

解：将 $1.6\Omega$ 电阻断开，求含源单口网络的戴维宁等效电路。  
求出开路电压

$$\dot{U}_{oc} = \frac{j\omega M \dot{U}_s}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{j2 \times 10}{1 + j3} \text{ V} = 6.325 \angle 18.44^\circ \text{ V}$$



用与输入阻抗相类似的公式计算输出阻抗

$$\begin{aligned}
 Z_o &= R_2 + j\omega L_2 + \frac{\omega^2 M^2}{R_1 + j\omega L_1} \\
 &= (0.4 + j2 + \frac{4}{1 + j3})\Omega = (0.8 + j0.8)\Omega
 \end{aligned}$$

当  $Z_L = Z_o^* = (0.8 - j0.8)\Omega$  时获得最大功率

$$P_{\max} = \frac{U_{\text{oc}}^2}{4R_o} = \frac{(6.325)^2}{4 \times 0.8} \text{ W} = 12.5 \text{ W}$$

### 三、用去耦等效电路简化电路分析

含耦合电感的电路，若能将耦合电感用去耦等效电路代替，可避免使用耦合电感的VCR方程，常可简化电路分析。现举例说明

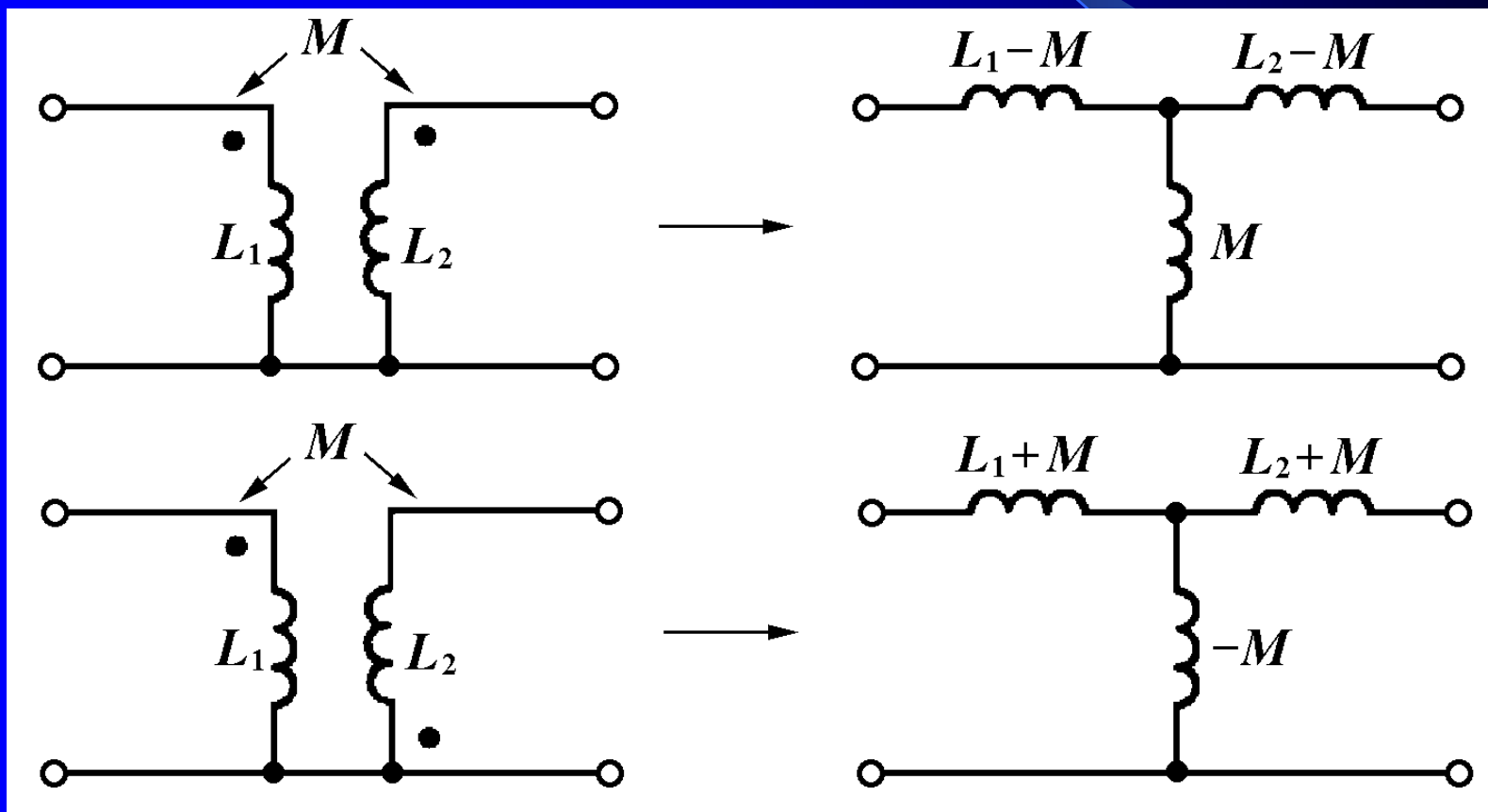


图 13 - 11

例13-7 电路如图(a)所示。已知  $u_S(t) = 10\sqrt{2} \cos 10^3 t \text{ V}$ 。

试求电流  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  和负载可获得的最大功率。

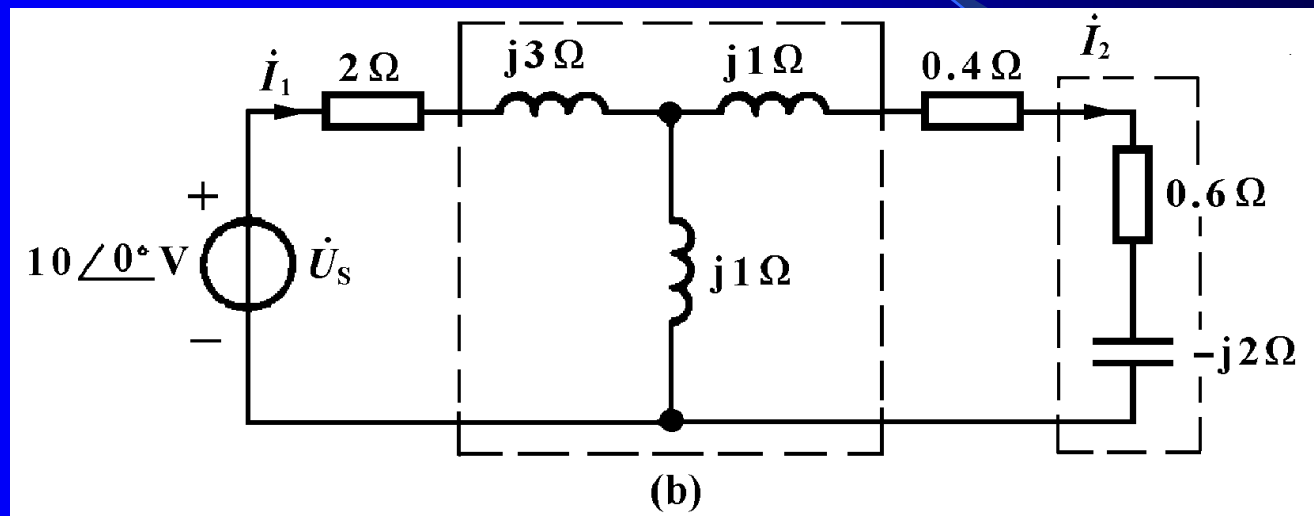


图13-18

解：将耦合电感 b、d 两点相连，用去耦等效电路代替耦合电感，得到图(b)相量模型。



等效电路中三个电感的阻抗为：

$$Z_a = j\omega(L_1 - M) = (j4 - j1)\Omega = j3\Omega$$

$$Z_b = j\omega M = j1\Omega$$

$$Z_c = j\omega(L_2 - M) = (j2 - j1)\Omega = j1\Omega$$

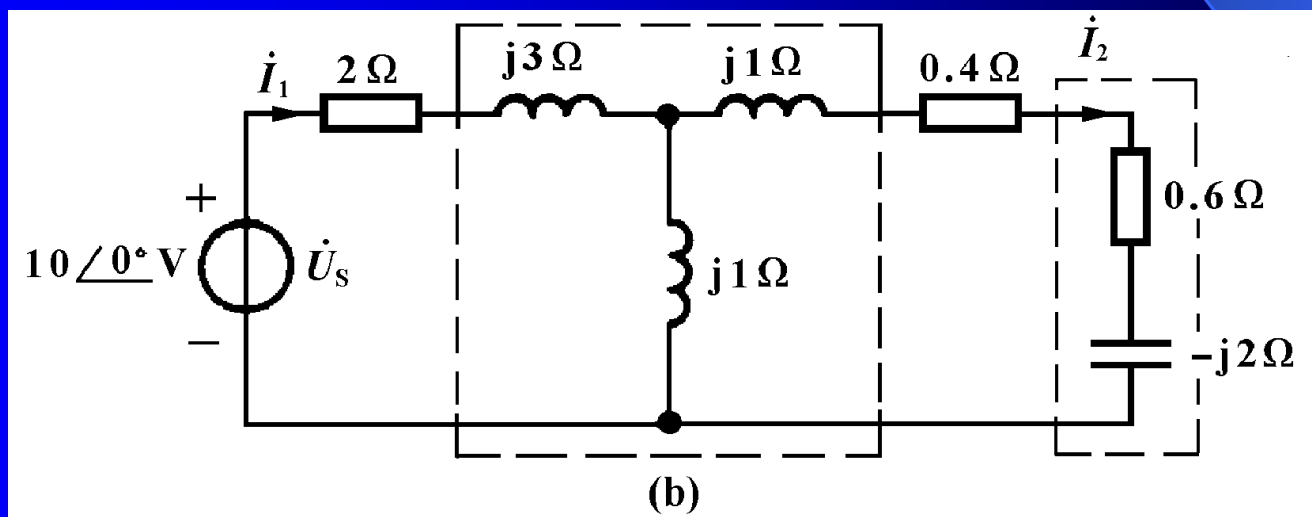
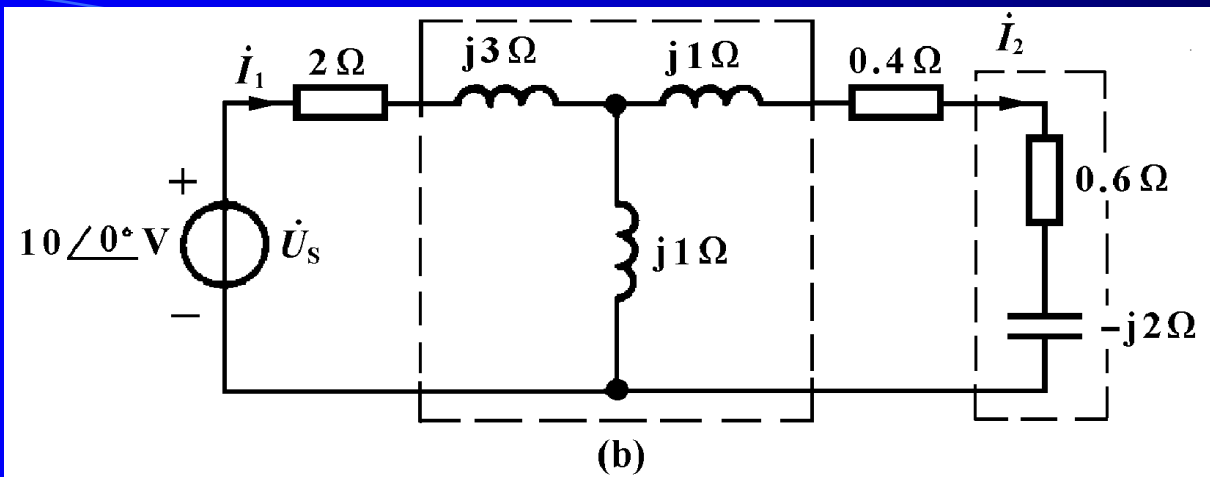


图13-18



用阻抗串并联和分流公式求得：

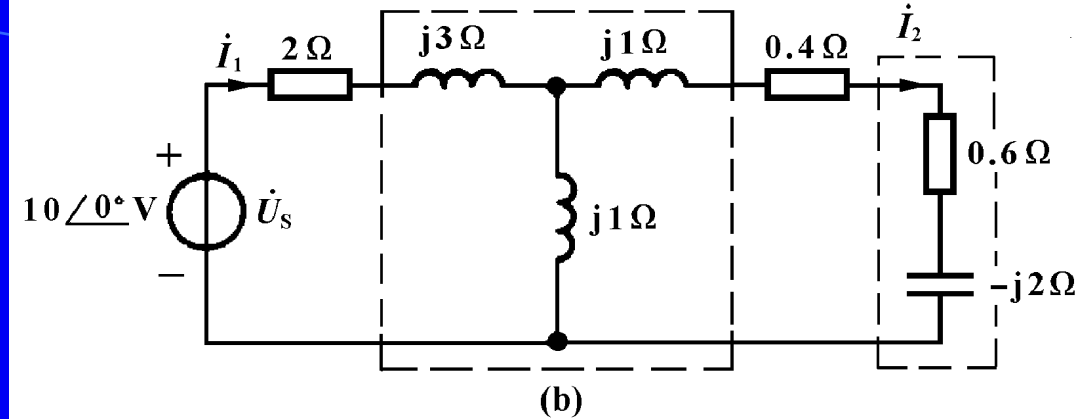
$$Z_i = \left[ 2 + j3 + \frac{j1(1-j1)}{0.4+0.6} \right] \Omega = (3 + j4) \Omega$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{Z_i} = \frac{10\angle 0^\circ}{3 + j4} \text{ A} = 2\angle -53.1^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{j1}{j1 + 1 - j1} \dot{I}_1 = 2\angle 36.9^\circ \text{ A}$$

$$i_1(t) = 2\sqrt{2} \cos(10^3 t - 53.1^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 2\sqrt{2} \cos(10^3 t + 36.9^\circ) \text{ A}$$



为求负载可获得的最大功率，断开负载  $Z_L = (0.6 - j2)\Omega$

求得

$$\dot{U}_{oc} = \frac{j1}{2 + j4} \dot{U}_s = \frac{j10(2 - j4)}{20} \text{ V} = (2 + j1) \text{ V} = \sqrt{5} \angle 26.6^\circ \text{ V}$$

$$Z_o = \left[ 0.4 + j1 + \frac{j1(2 + j3)}{2 + j4} \right] \Omega = (0.5 + j1.8) \Omega$$

根据最大功率传输定理，当负载为

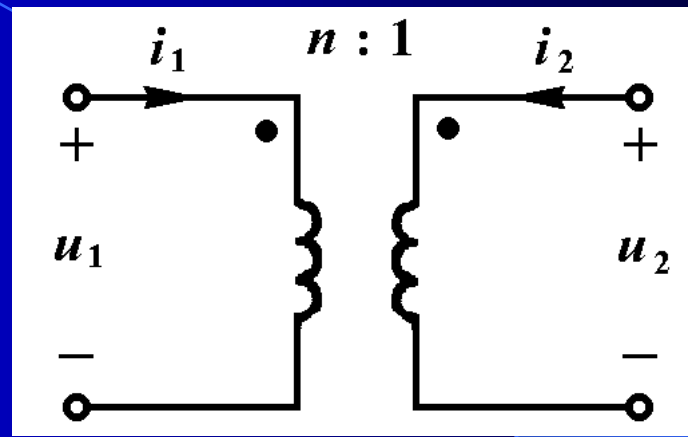
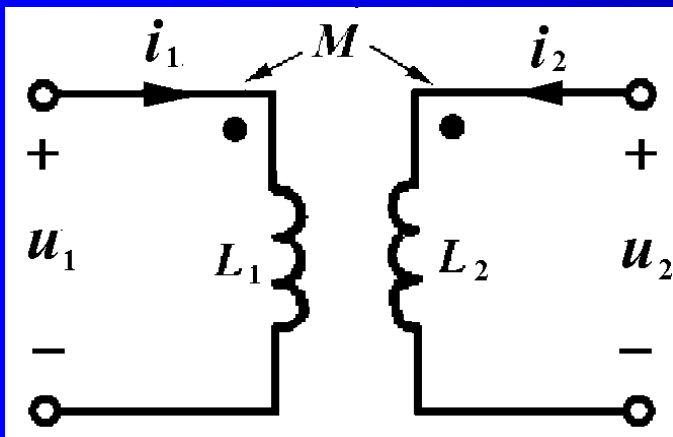
$$Z_L = Z_o^* = (0.5 - j1.8) \Omega$$

可获得最大功率

$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_o} = \frac{5}{4 \times 0.5} \text{ W} = 2.5 \text{ W}$$

## § 13-5 耦合电感与理想变压器的关系

我们介绍了耦合电感和理想变压器两种电路元件，其电压电流关系如下所示，一个是双口动态元件，另一个是电阻双口元件，它们都是从具有互感耦合的线圈抽象出的理想电路元件，为什么要提出两种电路元件？它们之间的关系如何？



$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= nu_2 \\ i_2 &= -ni_1 \end{aligned} \right\}$$

图(a)耦合电感也可用图(b)所示两个电感和一个理想变压器电路等效。其等效条件推导如下:

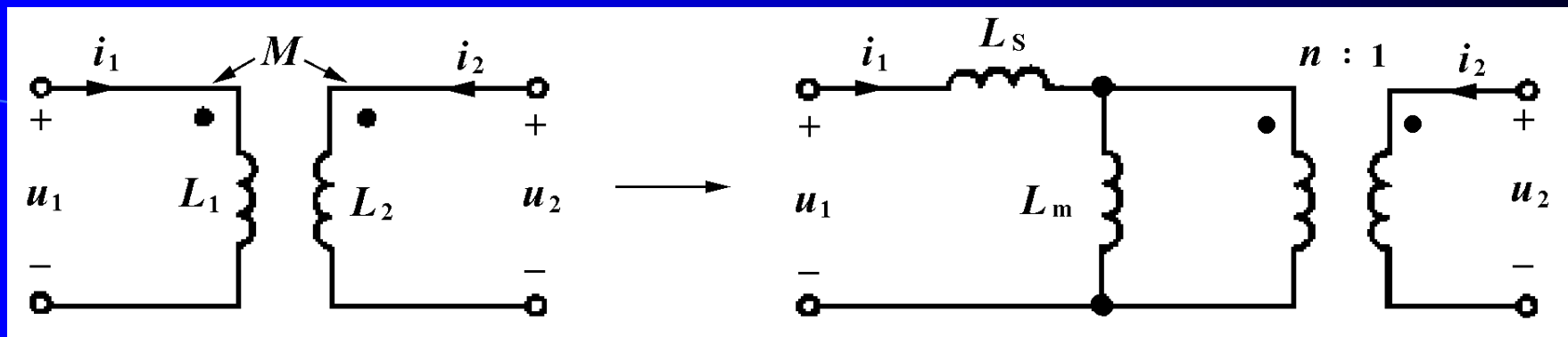


图 13-19

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= (L_S + L_M) \frac{di_1}{dt} + \frac{L_m}{n} \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= \frac{L_m}{n} \frac{di_1}{dt} + \frac{L_m}{n^2} \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\}$$

$$L_1 = L_S + L_m$$

$$M = \frac{L_m}{n}$$

$$L_2 = \frac{L_m}{n^2} = \frac{M}{n}$$

$$n = \frac{M}{L_2}$$

$$L_m = \frac{M^2}{L_2}$$

$$L_S = L_1 - L_m = L_1 - \frac{M^2}{L_2}$$

图(a)耦合电感与图(b)所示两个电感和一个理想变压器器电路等效电路的等效条件为:

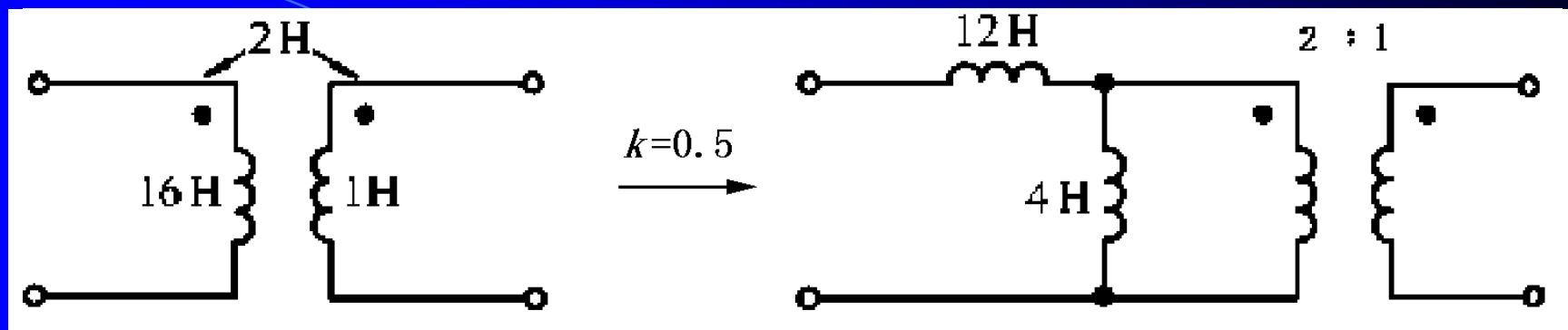
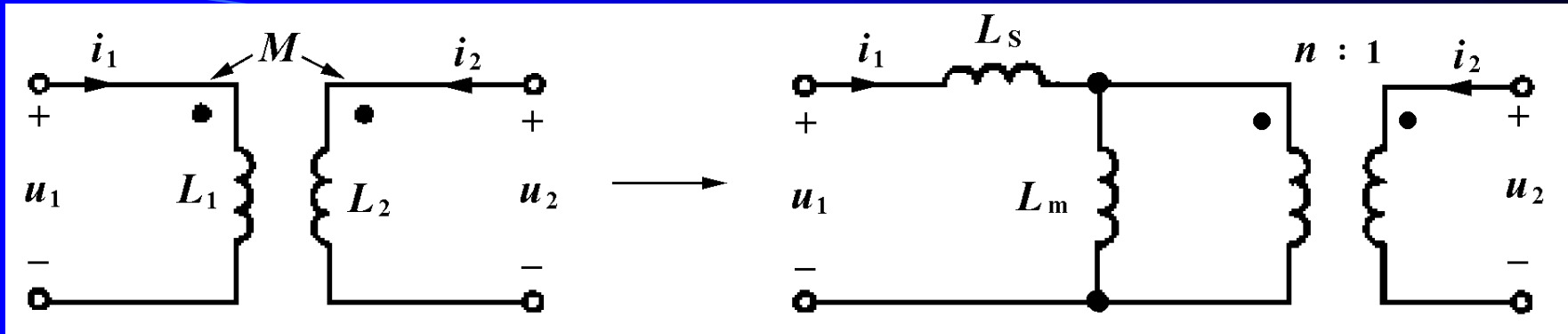


图13-19

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{M}{L_2} & L_m &= \frac{M^2}{L_2} & L_S &= L_1 - L_m = L_1 - \frac{M^2}{L_2} \end{aligned} \right\}$$

式中 $L_S$ 称为漏电感， $L_m$ 称为磁化电感。





当耦合因数 $k=1$ 时， $M = \sqrt{L_1 L_2}$  上式变为：

$$n = \frac{M}{L_2} \quad L_m = \frac{M^2}{L_2} \quad L_s = L_1 - \frac{M^2}{L_2}$$

$$\rightarrow n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad L_m = L_1 \quad L_s = 0$$

这表明对于 $k=1$ 的全耦合变压器，可用一个电感 $L_1$ 和变比为  $n = \sqrt{L_1 / L_2}$  的理想变压器构成其电路模型。

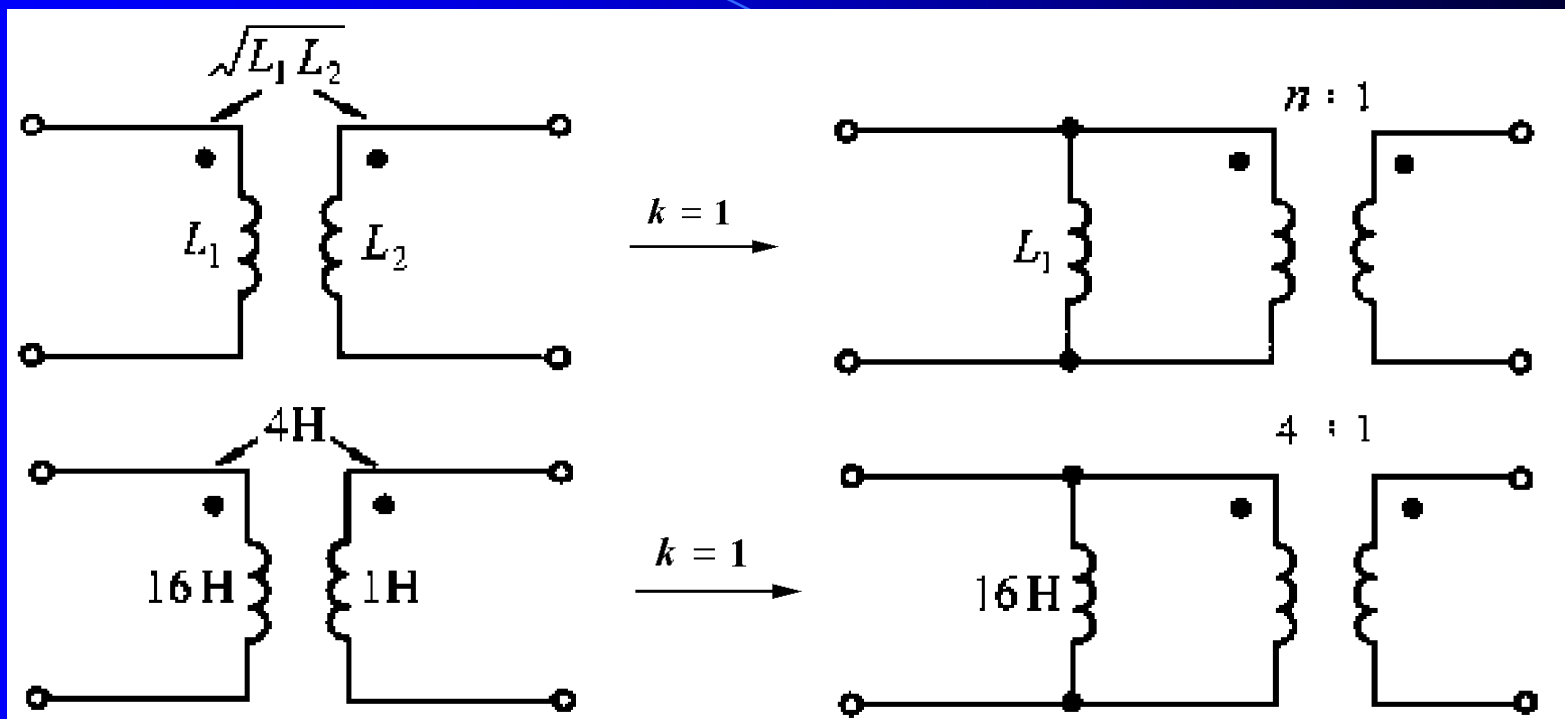
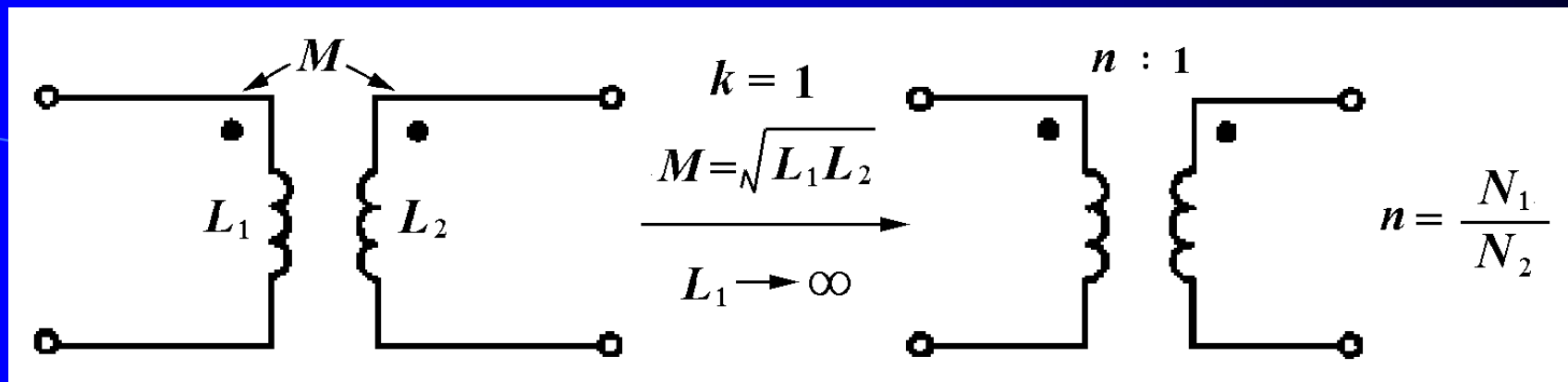


图13-20

$L_1 \rightarrow \infty$  的全耦合电感等效于一个理想变压器。

用耦合因数表示的图(a)耦合电感与图(b)所示两个电感和一个理想变压器电路等效电路的等效条件为：



$$n = \frac{M}{L_2} = k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = k \frac{N_1}{N_2}$$

$$L_m = \frac{M^2}{L_2} = k^2 L_1$$

$$L_S = L_1 - L_m = L_1 - \frac{M^2}{L_2} = (1 - k^2) L_1$$

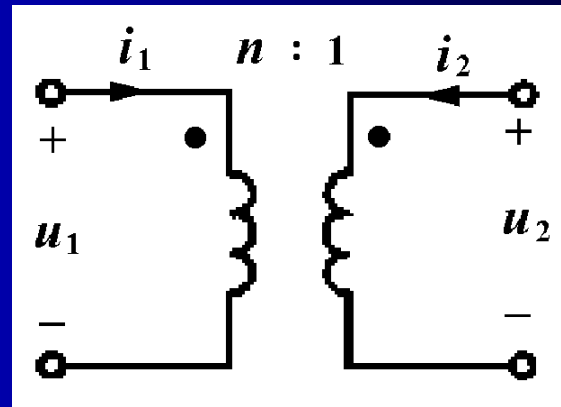
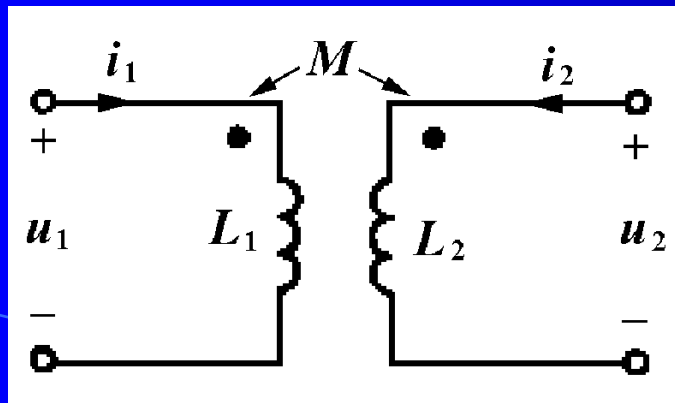
$K=1$

$$n = \frac{N_1}{N_2}$$

$$L_m = L_1$$

$$L_S = 0$$

$L_1 \rightarrow \infty$  的全耦合电感等效于一个理想变压器。



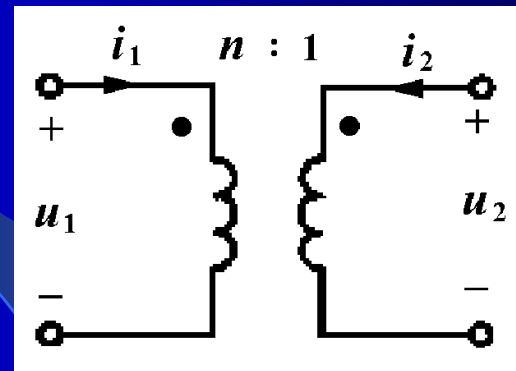
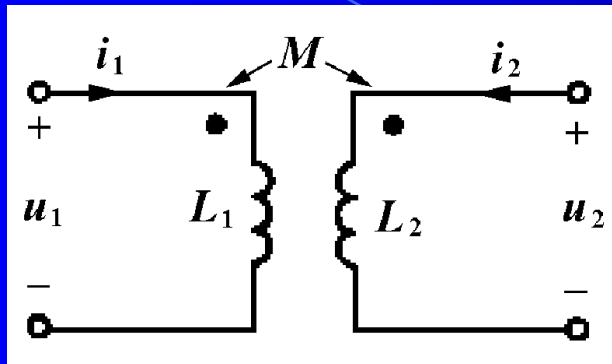
$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= nu_2 \\ i_2 &= -ni_1 \end{aligned} \right\}$$

结论:

1. 耦合电感可以与两个电感 $L_S$ 、 $L_m$ 和一个理想变压器电路等效。
2. 全耦合电感可以与一个电感 $L_1$ 和一个理想变压器电路等效。
3. 电感 $L_1$ 足够大的全耦合电感可以用一个理想变压器电路等效。

上面已经说明，虽然耦合电感是双口动态元件，而理想变压器是双口电阻元件，但是在耦合电感的耦合因数等于1以及电感 $L_1$ 足够大的情况下的确可以用一个理想变压器来等效。这个关系也可以从耦合电感的VCR关系推导出理想变压器的VCR关系来加以证明。



$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= nu_2 \\ i_2 &= -ni_1 \end{aligned} \right\}$$

下面说明在耦合电感的耦合因数等于1的情况下，从耦合电感的VCR关系可以导出理想变压器的方程  $u_1 = nu_2$ 。

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{k=1} \left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\}$$

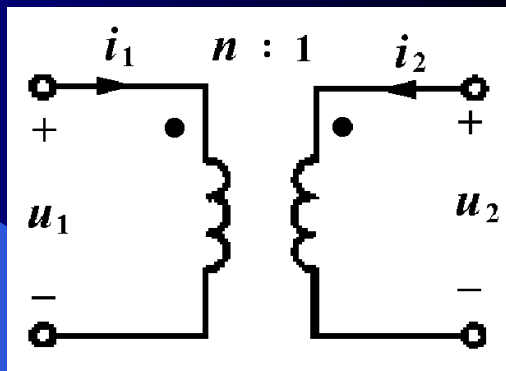
$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_2}{dt} \\ \rightarrow \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} u_2 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\} \rightarrow \underline{u_1 = nu_2}
 \end{aligned}$$

下面说明在耦合电感的耦合因数等于1的情况下，以及电感 $L_1$ 变为无穷大，则可以导出理想变压器的另外一个方程。

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{k=1} \left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\}$$

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_2}{dt} \rightarrow \frac{u_1}{L_1} = \frac{di_1}{dt} + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{di_2}{dt}$$

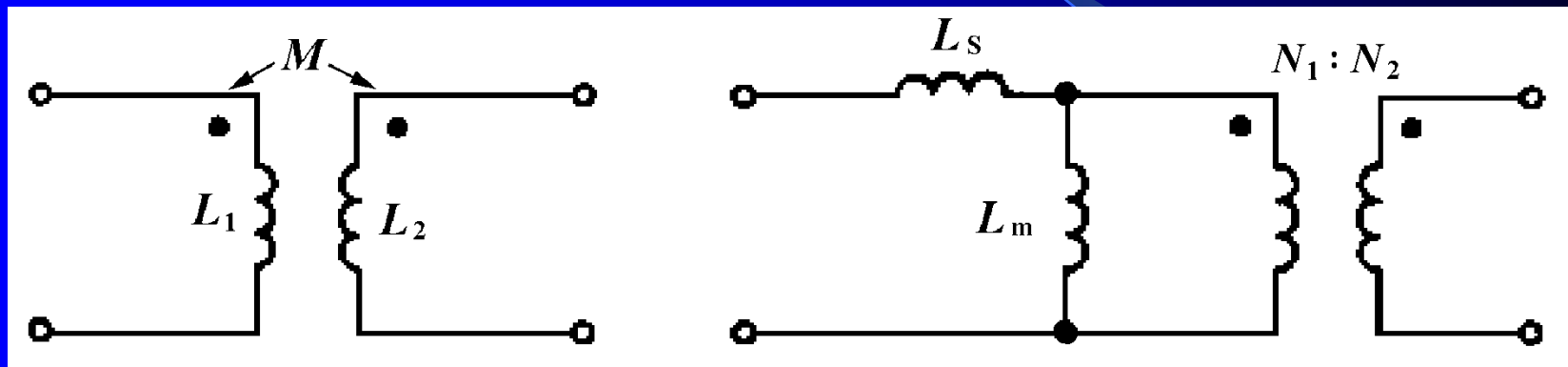
$$\frac{1}{L_1} \int u_1 dt = i_1 + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} i_2 = 0 \rightarrow i_2 = -\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} i_1 = -n i_1$$



$$\left. \begin{aligned} u_1 &= n u_2 \\ i_2 &= -n i_1 \end{aligned} \right\}$$



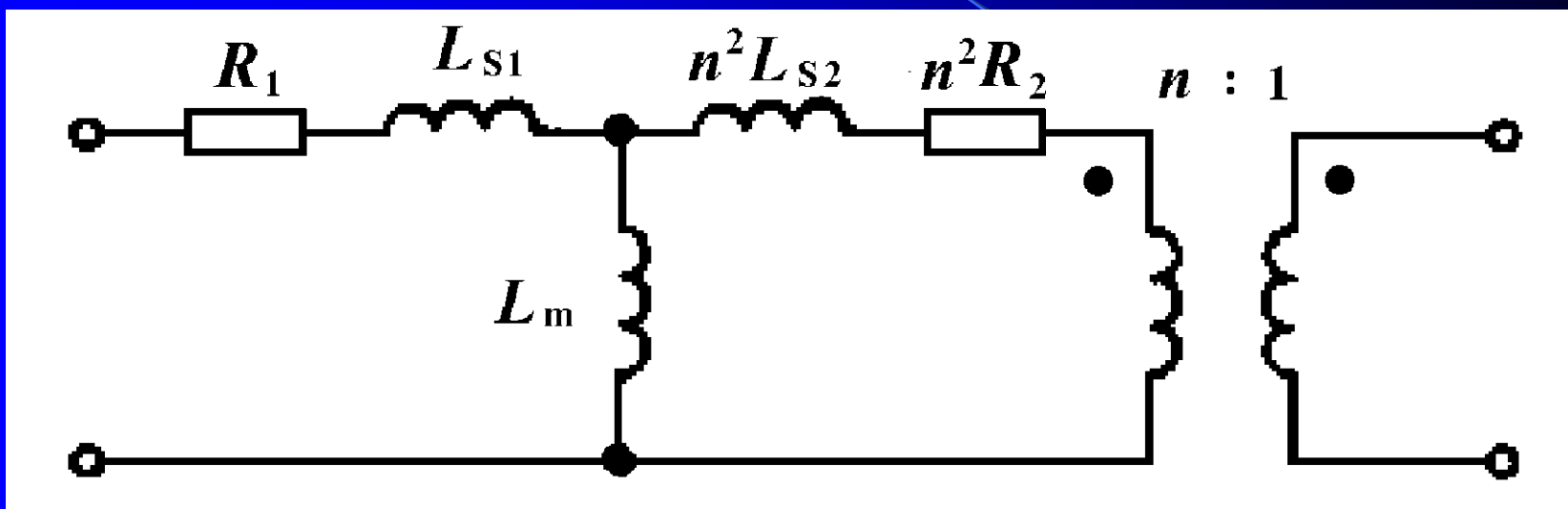
以上讨论表明：用导线绕制的磁耦合线圈，在忽略导线和磁心(或铁心)损耗的条件下，可以用一个耦合电感或两个电感和一个变压器的组合作为它的电路模型。



在耦合因数 $k$ 比较小的情况下，常采用耦合电感作为它的电路模型。

在耦合因数 $k=1$ 的全耦合的情况下，常用由理想变压器组成的电路模型。当 $L_1$ 足够大时，其电路模型就是一个 $N_1:N_2$ 的理想变压器。

在考虑导线和磁心(或铁心)损耗的情况下,可以用以下电路模型作为铁心变压器的更精确的电路模型。



理想变压器的变比等于线圈匝数之比

$$n = \frac{N_1}{N_2}$$

变压器次级线圈的损耗和漏感已经折算到初级。

绕制变压器的磁心和铁心以及线圈的骨架。



例13-8 用耦合电感的等效电路重解例13-7。

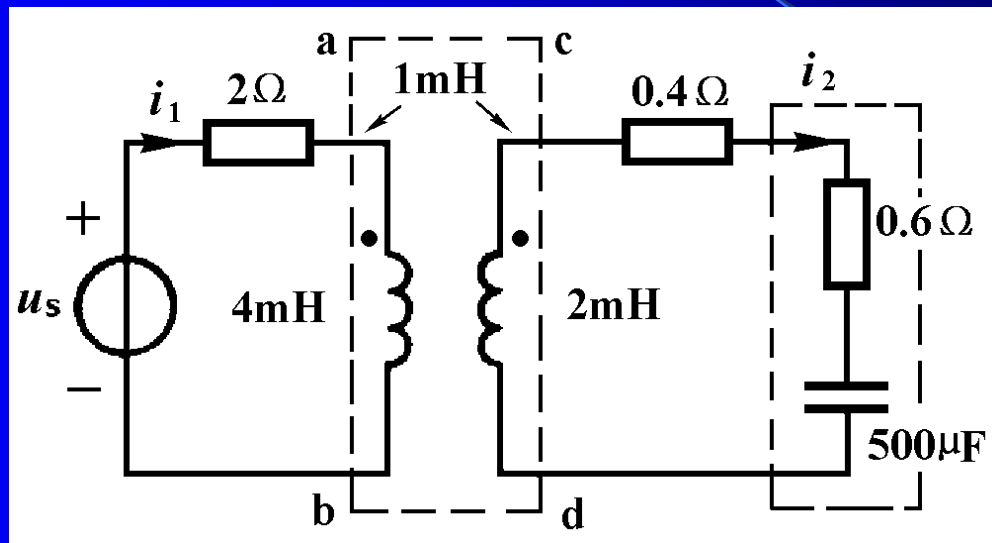


图13-18

解：将上图中耦合电感用含理想变压器的电路代替。

由式(13-27)求得 $n=0.5, L_m=0.5\text{mH}, L_s=3.5\text{mH}$ 。

其相量模型如图13-21所示。

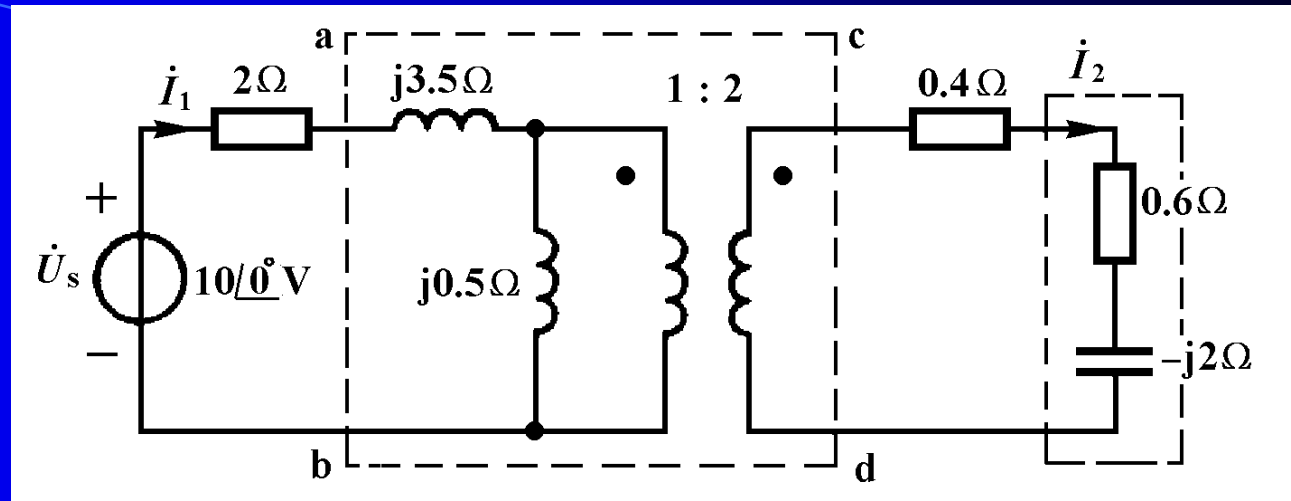


图13-21

由此电路容易计算出输入阻抗、输出端的开路电压以及输出阻抗

$$Z_i = \left[ 2 + j3.5 + \frac{j0.5(0.25 - j0.5)}{0.25 - j0.5 + j0.5} \right] \Omega = (3 + j4) \Omega$$

$$\dot{U}_{oc} = \frac{j0.5 \times 10}{2 + j3.5 + j0.5} \times 2V = \frac{20 \times j0.5}{2 + j4} V = (2 + j1)V$$

$$Z_o = \left[ 0.4 + \frac{4 \times j0.5(2 + j3.5)}{2 + j4} \right] \Omega = (0.5 + j1.8) \Omega$$

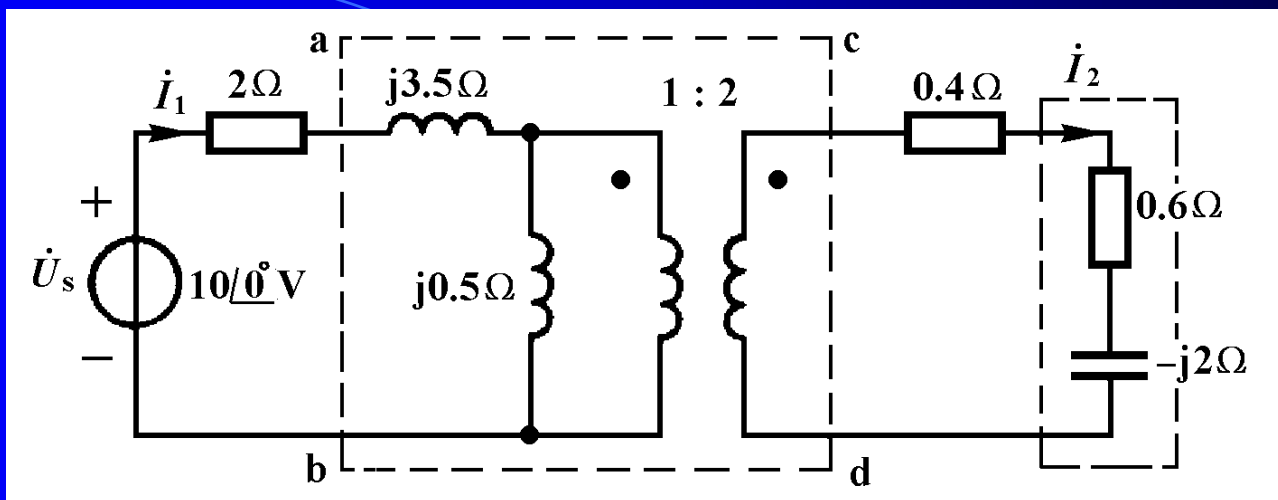


图 13 - 21

$$Z_i = (3 + j4) \Omega \quad \dot{U}_{oc} = (2 + j1) \text{V} \quad Z_o = (0.5 + j1.8) \Omega$$

再计算出电流

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{Z_i} = \frac{10 \angle 0^\circ}{3 + j4} \text{A} = 2 \angle -53.1^\circ \text{A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{j1}{j1 + 1 - j1} \dot{I}_1 = 2 \angle 36.9^\circ \text{A}$$

$$i_1(t) = 2\sqrt{2} \cos(10^3 t - 53.1^\circ) \text{A}$$

$$i_2(t) = 2\sqrt{2} \cos(10^3 t + 3.69^\circ) \text{A}$$

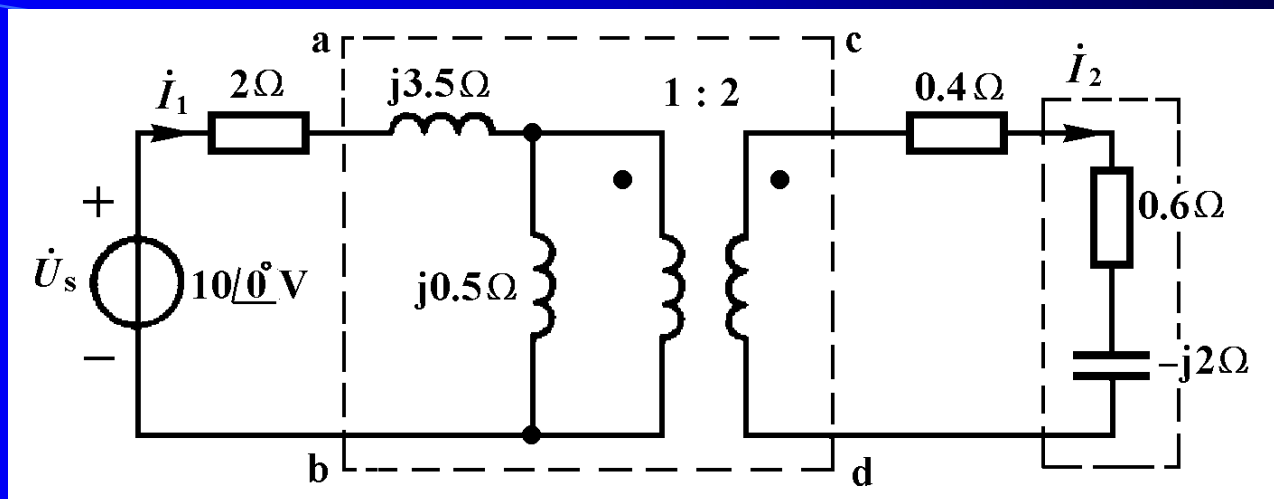


图 13 - 21

根据最大功率传输定理，当负载为  $Z_L = Z_o^* = (0.5 - j1.8)\Omega$  时可获得最大功率

$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_o} = \frac{5}{4 \times 0.5} \text{ W} = 2.5 \text{ W}$$

求解结果与例 13 - 7 相同。